Familije Bresse-ovih krugova i grafičko određivanje ubrzanja pomoću istih

MILOŠ D. LJUBOMIROVIĆ, "ELMOS", Jagodina

Stručni rad
UDC: 531.113

U radu se uopštava pojam Bresse-ovih krugova i pokazuje da postoje dve beskonačne familije tih krugova:

- Prva, čija svaka kružnica prolazi kroz trenutni pol brzina i trenutni pol ubrzanja, sa centrom na njihovoj simetrali. U svakoj tački jedne takve kružnice konstantan je ugao izmedju pravca vektora brzine i pravca vektora ubrzanja.

- Druga, čija svaka kružnica ima centar na pravoj koja prolazi kroz trenutni pol brzina i trenutni pol ubrzanja. U svakoj tački jedne takve kružnice konstantan je odnos izmedju intenziteta vektora brzine i intenziteta vektora ubrzanja.

Osim toga pokazan je novi postupak grafičkog određivanja ubrzanja pri ravnom kretanju, preko Bresse-ovih krugova. Odlika ove metode je da nam direktno daje normalno i tangencijalno ubrzanje u odnosu na centar krivine.

Ključne reči: *Bresse-ovi krugovi, familija Bresse-ovih krugova, ubrzanje, grafička konstrukcija*

1. UVOD

Bresse-ovi krugovi (preciznije rečeno kružnice) odnose se na ravno kretanje krutog tela. Postoje dva Bresse-ova kruga: prevojni i prelazni.

U ovom radu videćemo da su to samo specijalni slučajevi bezbrojne familije krugova sa karakterističnim svojstvima.

Osim toga biće pokazan novi postupak grafičkog određivanja ubrzanja pri ravnom kretanju, preko Bresse-ovih krugova.

2. PREVOJNI I PRELAZNI BRESSE-OVI KRUGOVI

Svako ravno kretanje možemo predstaviti kao kotrljanje bez klizanja neke pokretne po nekakvoj nepokretnoj ploči (pokretna i nepokretna ruleta).

Na slici 1 vidimo delove tih ruleta i njihovu tačku dodira koja predstavlja trenutni pol brzina, P_v.

Povucimo u tački dodira tangentu na krivine i odgovarajuću normalu, i to će biti naše ose x i y.

Bresse-ov prevojni krug prolazi kroz tačku P_v, a centar mu je na y osi. Bilo koja tačka na ovoj kružnici, pokazao je Bresse, nalazi se na prevoju svoje putanje, tj. bar na kratko kreće se pravolinijski i, otuda, u tom trenutku nema normalno ubrzanje, $a_n = \dfrac{v_t^2}{R_{\to\infty}} = 0$.

Bresse-ov prelazni krug takodje prolazi kroz tačku P_v, ali mu je centar na x osi. Bilo koja tačka na ovoj kružnici nalazi se na prelazu iz ubrzanog u usporeno kretanje, ili obrnuto, i u tom ekstremnom položaju nema tangencijalno ubrzanje, $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$.

U preseku prevojnog i prelaznog kruga nalazi se trenutni pol ubrzanja P_a, tačka čije je ubrzanje u posmatranom trenutku jednako nuli.

U literaturi [1], [2], [3] možemo videti kinematski zasnovane dokaze Bresse-ovih krugova i odgovarajuće jednačine koje glase:

za prevojni krug,

$$x^2 + (y - \frac{v_p}{2\omega})^2 = (\frac{v_p}{2\omega})^2 \tag{1}$$

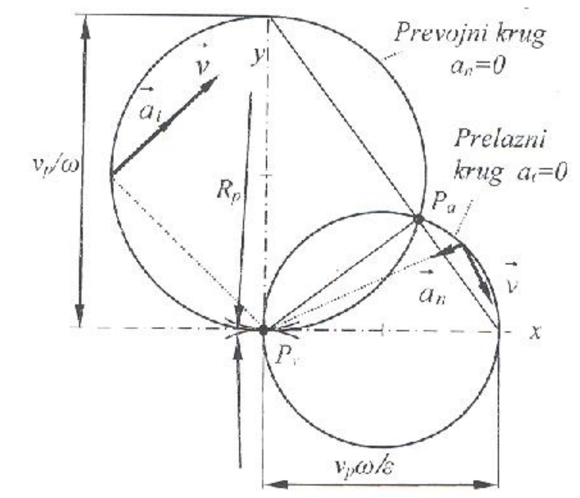
i za prelazni krug,

$$(x - \frac{v_p \omega}{2\varepsilon})^2 + y^2 = (\frac{v_p \omega}{2\varepsilon})^2 \tag{2}$$

gde je v_p brzina pola koja se određuje prema Euler-Savaryjevoj teoremi [3] $\omega = v_p(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_p})$.

Adresa autora: Miloš Ljubomirović, "ELMOS", Jagodina, Despota Stefana bb

Rad primljen: 21.11.2012.
Rad prihvaćen: 17.11.2014.



Slika 1 – Bresse-ov prevojni i prelazni krug

2. UGAO IZMEĐU PRAVCA VEKTORA BRZINE I PRAVCA VEKTORA UBRZANJA

Posmatraćemo sada Bresse-ove krugove u nešto drugačijem svetlu, bez upotrebe pojmova normalnog i tangencijalnog ubrzanja.

Dakle, možemo reći:

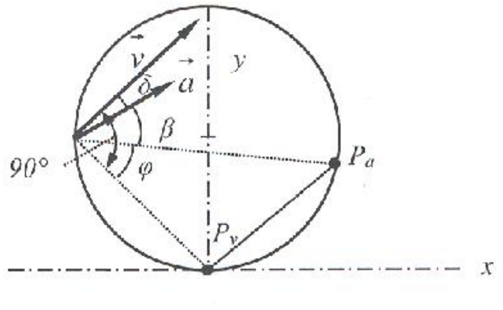
Na prevojnom krugu ugao između pravca vektora brzine i pravca vektora ubrzanja jednak je nuli, a na prelaznom krugu $\pi / 2$.

Logično se postavlja pitanje: postoji li Bresse-ov krug na kome taj ugao ima za konstantu neku drugu vrednost?

Odgovor je potvrdan, a evo zašto:

Duž $\overline{P_vP_a} = \frac{v_p}{\omega} cos\,\beta$ jeste tetiva Bresse-ovih krugova, pa shodno tome periferijski ugao na kružnici, označimo ga sa φ, uvek ima istu vrednost. S obzirom da je i ugao $\beta = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ konstantan sledi i da ugao δ, sl. 2, izmedju pravca vektora brzine i pravca vektora ubrzanja, ima konstantnu vrednost

$$\delta = 90^\circ - \varphi - \beta \tag{3}$$



Slika 2 – Ugao $\delta = 90^\circ - \varphi - \beta$

Sada možemo formulisati pravilo:

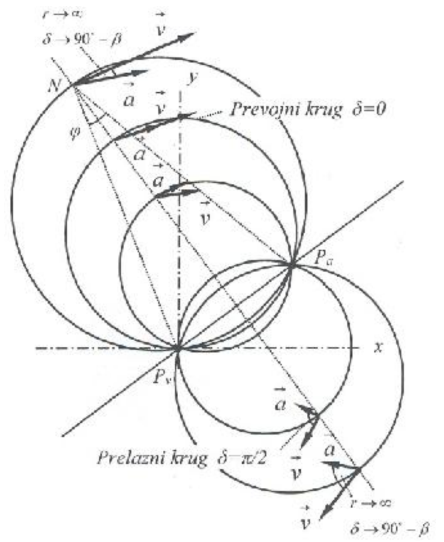
Svaka kružnica koja prolazi kroz trenutni pol brzina i trenutni pol ubrzanja jeste Bresse-ova, i u svakoj njenoj tački isti je ugao između pravca vektora brzine i pravca vektora ubrzanja.

Na sl. 3 dat je grafički prikaz familije Bresse-ovih krugova.

Posmatrajući jednakokraki trougao P_vP_aN postavićemo opštu jednačinu Bresse-ovih krugova:

$$\left[x+\frac{V_p\,cos\,\beta}{2\omega cos(\beta+\delta)}sin\,\delta\right]^2+\left[y-\frac{V_p\,cos\,\beta}{2\omega cos(\beta+\delta)}cos\,\delta\right]^2=\left[\frac{v_p\,cos\,\beta}{2\omega cos(\beta+\delta)}\right]^2 \tag{4}$$

Proverom potvrđujemo da se za $\delta = 0^\circ$ ova jednačina svodi na (1), a za $\delta = \pi/2^\circ$ na jednačinu (2).



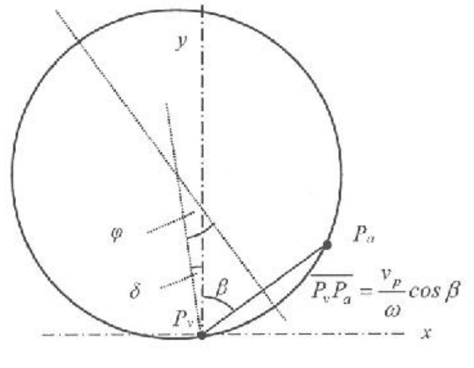
Slika 3 – Familija Bresse-ovih krugova

Konstrukcija Bresse-ovog kruga, za poznate uglove β i δ, moguća je i grafički, sl. 4:

-Povučemo simetralu duži P_v-P_a.

-Iz tačke P_v povučemo pravu pod uglom δ u odnosu na y osu.

-Iz preseka ove dve prave opišemo kružnicu kroz tačku P_v.



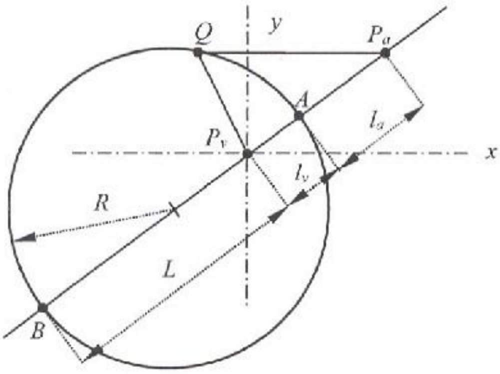
Slika 4 - Grafička konstrukcija Bresse-ovog kruga

4. BRESSE-OVI KRUGOVI NA PRAVCU P_v-P_a

Videćemo sada još jednu familiju kružnica čiji centri leže na pravcu P_v-P_a. Svaka od tih kružnica ima karakteristiku da je u bilo kojoj njenoj tački količnik intenziteta brzine i intenziteta ubrzanja konstantan

$$\frac{|v|}{|a|} = k \tag{5}$$

Dokaz, slika 5:



Slika 5 – Dokaz Bresse-ovog kruga na P_v-P_a

Na pravcu P_v-P_a opišimo kružnicu, i u tačkama A i B, shodno uslovu (5), možemo postaviti dve jednakosti:

$$l_v \cdot \omega = k\left(\frac{v_p}{\omega} cos\, \beta - l_v\right)\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{6}$$

$$L \cdot \omega = k\left(L + \frac{v_p}{\omega} cos\, \beta\right)\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{7}$$

odakle sledi:

$$l_v = \frac{k \cdot v_p \cdot \omega}{\omega + k\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{8}$$

$$l_a = \frac{v_p \cdot \omega^2 / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\omega + k\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{9}$$

$$R = \frac{l_a \cdot l_v}{l_a - l_v} = \frac{k \cdot v_p \cdot \omega^2}{\omega^2 - k^2(\varepsilon^2 + \omega^4)} \tag{10}$$

$$R - l_v = \frac{l_v^2}{l_a - l_v} \tag{11}$$

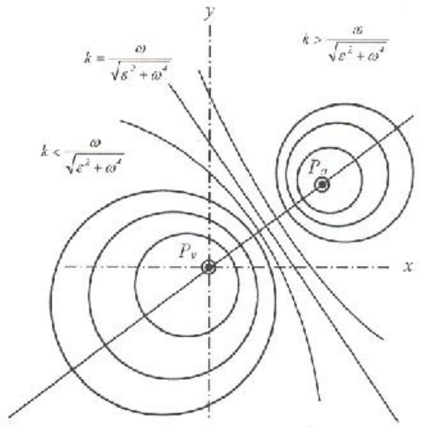
$$R + l_a = \frac{l_a^2}{l_a - l_v} \tag{12}$$

Zatim uočimo na kružnici proizvoljno izabranu tačku Q. Da bi u ovoj tački postojao isti odnos $\frac{|v|}{|a|} = k$, kao u tački A, mora biti zadovoljena relacija $\frac{\overline{P_a Q}}{\overline{P_v Q}} = \frac{l_a}{l_v} = \frac{\omega}{k\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$, a to se, sređivanjem količnika $\frac{\overline{P_a Q}}{\overline{P_v Q}} = \frac{\sqrt{(x_{Pa} - x_Q)^2 + (y_{Pa} - y_Q)^2}}{\sqrt{(x_{Pv} - x_Q)^2 + (y_{Pv} - y_Q)^2}}$ i potvrđuje.

Opšta jednačina Bresse-ovih krugova na pravcu P_v-P_a glasiće:

$$\left[x + \frac{k^2 \cdot v_p \cdot \omega \cdot \varepsilon}{\omega^2 - k^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}\right]^2 + \left[y + \frac{k^2 \cdot v_p \cdot \omega^3}{\omega^2 - k^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}\right]^2 = \left[\frac{k \cdot v_p \cdot \omega^2}{\omega^2 - k^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}\right]^2 \tag{13}$$

Na slici 6 vidimo familiju ovih krugova



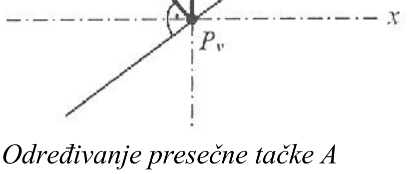
Slika 6 – Familija Bresse-ovih krugova na pravcu P_v-P_a

Iz proporcije $\frac{l_a}{l_v} = \frac{\omega}{k\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ možemo odrediti položaj tačke A na sledeći način, sl. 7:

-U tački P_a ucrtamo vektor brzine $\vec{v}_{pa}$.

-Vektor ubrzanja $\vec{a}_{pv}$, uvećan k puta, rotiramo oko tačke P_v do poklapanja sa normalom na pravac P_v-P_a.

-Spajanjem vrhova ovih vektora dobijamo presečnu tačku A.



Slika 7 - Određivanje presečne tačke A

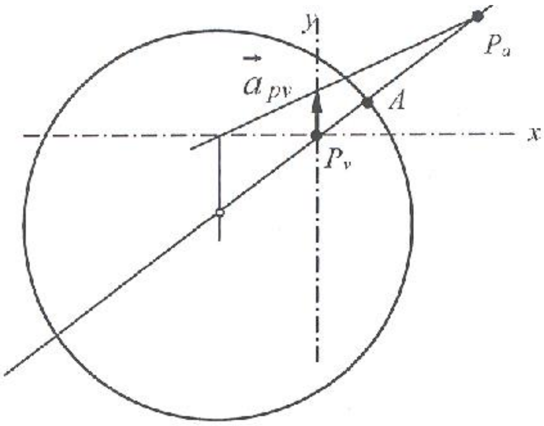
Specijalno, za $k=1$, moguće je grafički odrediti i centar Bresse-ovog kruga na pravcu P_v-P_a, što se zasniva na činjenici da važi identitet

$$(R+l_a)\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}=\frac{v_p\cdot\omega^3}{\omega^2-(\varepsilon^2+\omega^4)} \quad (14)$$

To znači da krajnja tačka vektora ubrzanja centra kruga leži na x osi, pa treba naći presek akceleroide [4] i x ose.

Za pravac P_v-P_a akceleroidu određujemo tako što iz tačke P_a povučemo pravu kroz završnu tačku vektora ubrzanja pola P_v, $\vec{a}_{pv}$.

Iz dobijenog preseka sa x osom spustimo vertikalu do preseka sa pravcem P_a-P_v i to je traženi centar, sl 8.



Slika 8 – Centar Bresse-ovog kruga na pravcu P_v-P_a za K=1

Iz preseka kružnica (4) i (13) možemo odrediti koordinate tačaka koje zadovoljavaju oba uslova, i ugao δ i količnik $\frac{|v|}{|a|}=k$.

Primer 1: Disk poluprečnika $r=100\,mm$ kotrlja se bez klizanja po ravnoj podlozi ugaonom brzinom $\omega=0.4\,s^{-1}$ i ugaonim ubrzanjem $\varepsilon=0.2\,s^{-2}$. Odrediti koordinate tačaka u kojima je intenzitet brzine jednak intenzitetu ubrzanja, a ugao izmedju njihovih pravaca iznosi $\delta=15^\circ$.

Rešenje:

$$v_p=r\cdot\omega=100\cdot 0.4=40\,mm/s$$

$$\beta=arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}=arctg\frac{0.2}{0.4^2}=51.34^\circ$$

$$(x+20.1)^2+(y-75.2)^2=77.8^2$$

$$(x+33.9)^2+(y+27.1)^2=67.8^2$$

$$x_1=22.70\,mm \quad y_1=10.23\,mm$$

$$x_2=-78.58\,mm \quad y_2=23.89\,mm$$

5. ODREĐIVANJE UBRZANJA POMOĆU BRESSE-OVIH KRUGOVA

Neka su nam poznati Bresse-ovi prelazni i prevojni krug, kao na sl. 9, i uočimo pokraj njih proizvoljnu tačku A, čije ubrzanje želimo da odredimo.

To, naravno, možemo uraditi preko trenutnog pola ubrzanja, P_a, ali ovde prikazujemo drugačiji postupak, koji nam direktno daje komponentna ubrzanja $\vec{a}_{An}$ i $\vec{a}_{At}$.

Povucimo iz tačke A pravu kroz trenutni pol brzina P_v i dobićemo preseke sa prevojnim i prelaznim krugom, P_{an} i P_{at}.

Sada, posmatrajući normalno ubrzanje tačke A preko pola P_{an}, a tangencijalno preko pola P_{at} možemo postaviti analitičke izraze:

$$a_{an}=(\overline{AP_v}-\frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\sin\alpha)\cdot\omega^2 \quad (15)$$

$$a_{at}=(\overline{AP_v}-\frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\frac{\omega^2}{\varepsilon}\cos\alpha)\cdot\varepsilon \quad (16)$$

Grafička konstrukcija ubrzanja izvodi se na sledeći način:

- Duž $\overline{AP_{an}}$ predstavlja $\vec{a}_{An}$.
- Iz P_{at} povlačimo pravu kroz trenutni pol ubrzanja P_a, i to je akceleroida tangencijalnog ubrzanja za pravac AP_{at}.
- Iz tačke A povlačimo normalu na $\vec{a}_{An}$ i presek sa akceleroidom određuje krajnju tačku vektora $\vec{a}_{At}$.

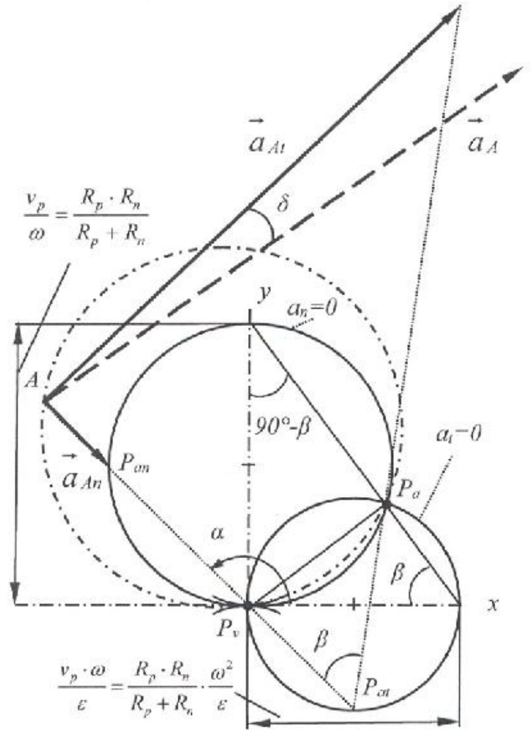
Dokaz:

Ako (15) pomnožimo sa $1/\omega^2$ i prikažemo u odgovarajućoj razmeri dobijamo da je $\vec{a}_{An}=\overrightarrow{AP_{an}}$.

Zatim množimo (16) sa $1/\omega^2$ i postavljamo trigonometrijsku relaciju:

$$\frac{(\overline{AP_v}-\frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\frac{\omega^2}{\varepsilon}\cos\alpha)\cdot\frac{\varepsilon}{\omega^2}}{(\overline{AP_v}-\frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\frac{\omega^2}{\varepsilon}\cos\alpha)}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}=tg\beta \quad (17)$$

S obzirom da je ugao PvPatPa=β, sledi da, pod datim uslovima, akceleroida tangencijalnog ubrzanja za pravac koji prolazi kroz Pv zaista prolazi kroz trenutni pol ubrzanja, i time smo grafičku konstrukciju potvrdili.



Slika 9 – Grafičko određivanje ubrzanja preko Bresse-ovih krugova

Ugao između pravaca vektora brzine i vektora ubrzanja u tački A odredićemo iz relacije:

$$\delta = \arctan\frac{a_{An}}{a_{At}} = $$

$$= \arctan\frac{(\overline{AP_v} - \frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\sin\alpha)\cdot\omega^2}{(\overline{AP_v} - \frac{R_p\cdot R_n}{R_p+R_n}\cdot\frac{\omega^2}{\varepsilon}\cos\alpha)\cdot\varepsilon} \quad (18)$$

6. ZAKLJUČAK

U radu je izvršena jedna vrsta generalizacije Bresse-ovih krugova, a zatim pokazano kako se pomoću Bresse-ovih krugova određuju apsolutno normalno i tangencijalno ubrzanje, u odnosu na centar krivine (za razliku od klasičnog postupka kada normalno i tangencijalno ubrzanje određujemo relativno u odnosu na trenutni pol ubrzanja).

LITERATURA

[1] Arnovljević, I., Osnove teoriske mehanike III, Beograd, 1947.

[2] Rašković, D., Mehanika, Deo II, Kinematika, Beograd, 1966.

[3] http://www.masfak.ni.ac.rs/uploads/articles/www2_autorizovana_predavanja__mehanizmi_i_masine_copy.pdf

[4] Rašković, D., Mehanika II deo, Beograd, 1966.

SUMMARY

FAMILY OF BRESSE'S CIRCLES AND GRAPHIC DETERMINATION OF ACCELERATION USING THE SAME

This work generalizes the notion of Bresse's circles and shows that there are two infinite families of circles:

- first, with each circle passes through the instantaneous center of rotation and instantaneous center of the accelerations, centered on their bisector. At each point of such a circle is constant angle between the direction of the velocity vector and the direction of the acceleration vector.

- second, each circle whose center is on the right which passes through the instantaneous center of rotation and instantaneous center of the accelerations. At each point of such a circle is a constant relationship between the intensity of the velocity vector and the intensity of the acceleration vector.

It's also shown a new method of graphical determining the acceleration in the plane movement, over-Bresse circles. Feature of this method is that it gives us direct normal and tangential acceleration relative to the center of the curve.

Key words: *Bresse's circles, family of Bresse's circles, acceleration, graphic methods*