Uslov stabilnosti ravnotežnog položaja štapa pri velikim pomeranjima

DRAGOLJUB D. GRBIĆ, Univerzitet u Beogradu,
Građevinski fakultet, Beograd

Originalni naučni rad
UDC: 624.072.2.046
DOI: 10.5937/tehnika1505755G

U radu se razmatra uslov stabilnosti ravnotežnog položaja štapa pod dejstvom konzervativne sile, a pri velikim pomeranjima. Urađen je jedan primer.

Ključne reči: *stabilnost, ravnotežni položaj, veliki ugibi, štap, konzervativna sila, diferencijalna jednačina, numerički postupak, potencijalna energija*

1. UVOD

Uslov stabilnosti ravnotežnog položaja štapa pri velikim ugibima usled dejstva konzervativnih sila je minimalnost ukupne potencijalne energije štapa (Lagranžova teorema). Ova teorema se koristi u knjigama o stabilnosti konstrukcija.

U ovom radu uvodi se poremećajna sila koja izaziva početno odstupanje štapa od ravnotežnog položaja. Pri tome je usvojeno da je početna brzina jednaka nuli. Nakon uklanjanja poremećajne sile razmatra se kretanje štapa i na osnovu tog kretanja može se ustanoviti da li je položaj ravnoteže stabilan ili nije.

Ako se štap sve vreme kreće u proizvoljno maloj okolini ravnotežnog položaja, tada je taj položaj stabilan. U protivnom on je nestabilan.

Kod primene Lagranžove teoreme nije potrebno poznavanje rešenja diferencijalnih jednačina već samo ukupne potencijalne energije.

U ovom radu uzvodi se uslov stabilnosti, ali je potrebno poznavanje rešenja diferencijalnih jednačina štapa pri velikim pomeranjima.

Uslov stabilnosti u ovom radu izveden je za elastični štap pri velikim ugibima, ali važi i za kruti štap i sistem krutih štapova pri velikim pomeranjima.

2. USLOV STABILNOSTI RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA ŠTAPA

Pravolinijski štap opterećen je konzervativnom silom. Pri tome se zanemaruje uticaj sopstvene težine štapa, ali se pri kretanju štapa ne zanemaruje masa štapa.

U knjizi [1] na strani 20 date su diferencijalne jednačine savijanja štapa pri konačnim pomeranjima. Uzevši u obzir granične uslove ove diferencijalne jednačine se mogu rešiti primenom formula numeričke integracije. Na ovaj način dobijamo u nizu izabranih tačaka sile u preseku, obrtanje preseka štapa i komponentalna pomeranja ose štapa.

Pored toga možemo konstruisati dijagram pomeranja karakteristične tačke u zavisnosti od intenziteta slie (slika 2).

Pod dejstvom konzervativne sile P nosač se nalazi u ravnoreži u položaju 1. Ako sada dodamo priraštaj sile P, štap prelazi u novi položaj ravnoteže 2 koji se malo razlikuje od položaja 1 (slika 1)

Uklonimo li priraštaj sile P, štap će se kretati u okolini ravnotežnog položaja 1 ili će izaći iz okoline položaja 1. Ako za svako e>0, ma koliko malo bilo, možemo naći priraštaj sile P tako da je

$$\max/\,\Delta v\,/ < e, t > t_{o,}$$

tada je taj položaj ravnoteže stabilan.

Ako iz položaja ravnoteže 2 naglo uklonimo priraštaj sile P, tada će na osnovu teoreme o priraštaju kinetičke energije biti

$$dT = P dv_a - dA\ ,\ t = t_0 + 0\ , \qquad (1)$$

gde je

dT – priraštaj kinetičke energije,

dv_a – elementarno pomeranje tačke a,

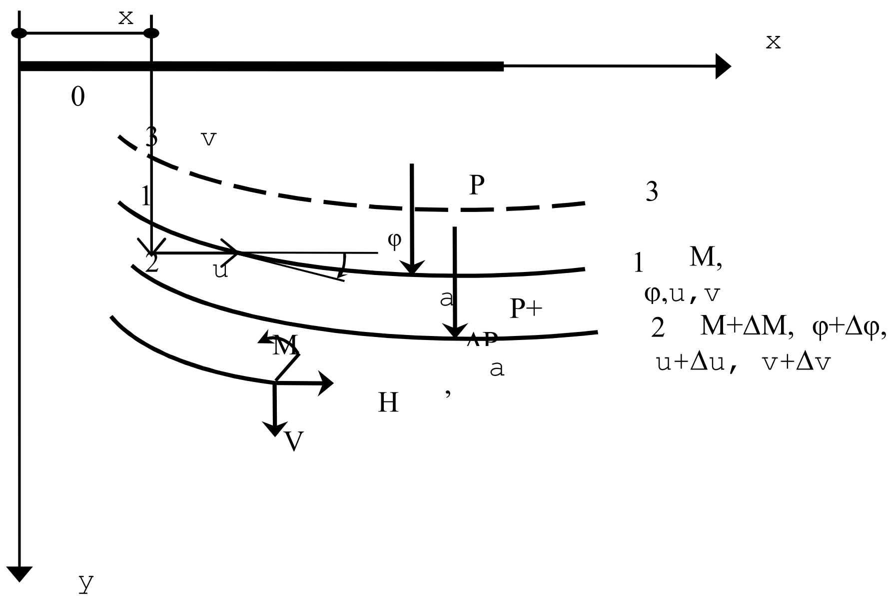
dA – elementarni deformacioni rad štapa,

t_0 – krajnji trenutak vremena u kome je štap u ravnoteži.

Adresa autora: Dragoljub Grbić, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

Rad primljen: 16.04.2015.

Rad prihvaćen: 20.05.2015.



Slika 1 - Nosač opterećen silom P (položaj 1). Nosač optrerećen silom P i priraštajem sile P (položaj 2)

U trenutku neposredno pre uklanjanja priraštaja sile P štap se nalazi u ravnoteži u položaju 2. Za virtuelna pomeranja usvojena su stvarna elementarna pomeranja za trenutak neposredno posle uklanjanja priraštaja sile P.

Tada će biti

$$P dv_a + \Delta P dv_a - dA = 0\ ,\quad t=t_0\ . \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi

$$dT = -\Delta P dv_a\ ,\quad t=t_0+0\ . \qquad (3)$$

Pretpostavimo da se štap udaljava od ravnotežnog položaja 2,

$$dv_a > 0,\quad \Delta P > 0,$$

tada iz (3) sledi

$$dT < 0,\quad t=t_0+0\ (4)$$

Iz (4) sledi da se štap približava ravnotežnom položaju 1, jer priraštaj kinetičke energije ne može biti negativan.

Da li se štap posle uklanjanja priraštaja slie P kreće u okolini ravnotežnog položaja 1? U tom cilju primenićemo zakon o priraštaju kinetičke energije pri kretanju od položaja 1 do položaja 2, a da se pri tome ne pojavljuju ubrzanja.

$$T_2 - T_1 = P\Delta v_a + \tfrac{1}{2}\,\Delta P \Delta v_a - A, \qquad (5)$$

gde je

A – deformacioni rad,

$T_1 = 0$,

$T_2 = 0$.

Iz (5) sledi

$$\prod\nolimits_2(t_0) = -P\Delta v_a - \tfrac{1}{2}\Delta P\Delta v_a + A = 0\ , \qquad (6)$$

gde je

$\prod_2(t_0)$ - ukupna potencijalna energija u položaju 2. Neposredno posle uklanjanja priraštaja sile P biće

$$\prod\nolimits_2(t_0+0) = -P\Delta v_a + A\ . \qquad (7)$$

Iz (6) i (7) sledi

$$-P\Delta v_a + A > 0,\quad -P\Delta v_a + A = h,$$

gde je h ukupna mehanička energija

$$h = T + \prod.$$

Pri kretanju štap prolazi kroz položaj 1 i pretpostavmo da je u položaju 3 njegova kinetička energija jednaka nuli. Tada sledi

$$T_3 - T_2 = -\prod\nolimits_3 + \prod\nolimits_2(t_0+0) = -\prod\nolimits_3 + h, \qquad (8)$$

a ovaj rezultat je u skladu sa

$$\prod\nolimits_3 + T_3 = h.$$

Iz ovoga sledi da se štap kreće u okolini ravnotežnog položaja 1 nakon uklanjanja male poremećajne sile (priraštaj sile P). Dakle, ispitivani položaj ravnoteže 1 je stabilan.

Na osnovu prethodnog izvođenja može se izvesti sledeći zaključak: Ako se štap nalazi u ravnoteži pod dejstvom konzervativne sile, a pri velikim pomeranjima, uz uslov

$$dT = -\Delta P dv_a, \Delta P > 0, dv_a > 0, \qquad (9)$$

tada je taj položaj ravnoteže stabilan. Ovaj uslov je dovoljan.

Ako nije ispunjen navedeni uslov tada je položaj ravnoteže nestabilan.

Primena ovog zaključka biće prikazana kod jednog primera.

Važna napomena

Drugi oblik izraza za potencijanu energiju u trenutku neposredno po uklanjanju poremećajne sile. Iz (6) i (7) smo zaključili da je položaj ravnoteže 1 stabilan. Iz istih izraza sledi

$$\Pi_2(t_0 + 0) = \frac{1}{2}\Delta P \Delta v_a > 0. \qquad (10)$$

Dakle, ako se štap pod dejstvom konzervativne sile, a pri konačnim ugibima, nalazi u ravnoteži uz uslov (10), tada je taj položaj ravnoteže stabilan. Ovaj uslov je dovoljan.

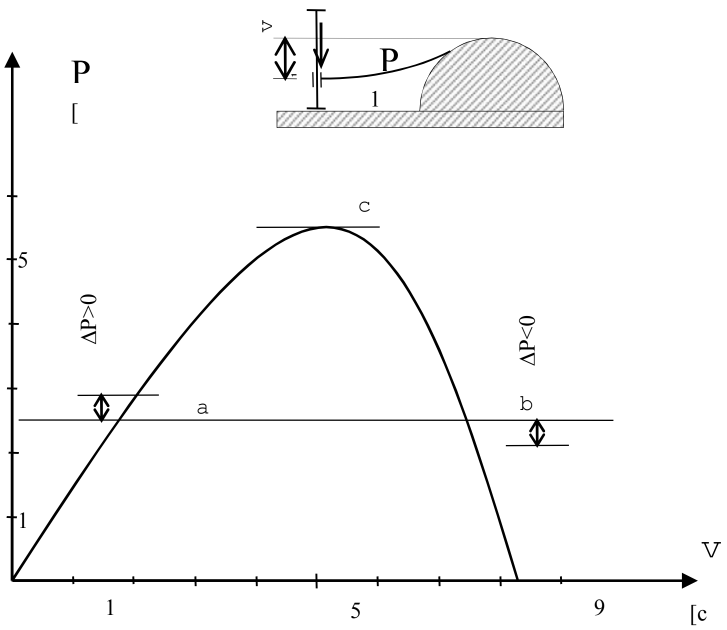
Ovaj zaključak je u skladu sa Lagranževom teoremom o stabilnosti ravnotežnog položaja.

Primer:

U radu [2] razmatra se nosač sa idealnim vezama koji je opterećen konzervativnom silom. Sopstvena težina štapa se zanemaruje, ali ne i masa.

Pod dejstvom sile P muf se pomera vertikalno naniže po osovini koja je nepokretna u prostoru a drugi kraj klizi po cilindru.

Zavisnost pomeranja mufa od sile data je na slici 2.



Slika 2 - Grafik funkcije koji pokazuje vezu između sile i pomeranja mufa

U tački a (slika 2) je

$$\Delta P>0,\ dv_a>0 \rightarrow dT<0 \qquad (7)$$

Iz (7) sledi da je položaj a stabilan.

U tački b (slika 2) je

$$\Delta P<0,\ dv_b>0 \rightarrow dT>0 \qquad (8)$$

Iz (8) sledi da je položaj b nestabilan.

3. ZAKLJUČAK

Uslov stabilnosti ravnotežnog položaja sistema materijalnih tačaka sa idealnim vezama, a pod dejstvom konzervativnih sila, je minimalnost ukupne potencijalne energije (Lagranžova teorema). Za primenu Lagranžove teoreme nije potrebno poznavanje rešenja diferencijalnih jednačina ravnoteže, već samo potencijalna energija.

U ovom radu izveden je dovoljan uslov stabilnosti ravnotežnog položaja štapa pri velikim pomeranjima a pod dejstvom konzervativne sile.

Za primenu ovog uslova potrbno je poznavanje rešenja diferencijalnih jednačina ravnoteže. Ovaj uslov važi i za kruti štap i sistem krutih štapova. Urađen je jedan brojni primer.

LITERATURA

[1] M. Đurić, O. Đurić-Perić, Statika konstrukcija, „Građevinska knjiga”, Beograd, str. 427, 1990.

[2] D. Grbić, Stabilnost jedne grede, Tehnika, Naše građevinarstvo 64, 2, str. 13-15, 2010.

SUMMARY

STABILITY CONDITION OF EQUILIBRIUM POSITION OF A BEAM UDERGOING LARGE DISPLACEMENTS

The paper is considering the stability condition of equilibrium position of a beam undergoing large displacements due to a conservative force. Numerical example is presented.

Key words: *stabiliy, equilibrium position, large displacements, beam, conservstive force, differential equation, numerical procedure, potential energy*