Određivanje ubrzanja i trenutnog pola ubrzanja metodom $1/\omega^2$

MILOŠ D. LJUBOMIROVIĆ, „ELMOS“ Jagodina

Stručni rad
UDC: 531.113
DOI: 10.5937/tehnika1705694L

Rad proučava ravno kretanje i prikazuje metodu, uslovno označenu sa $1/\omega^2$, u kojoj vektore ubrzanja množimo sa recipročnom vrednošću kvadrata ugaone brzine. To je, kod kulisnog mehanizma i klipnog mehanizma sa obrtnim cilindrom omogućilo šematizovanu i jednostavniju konstrukciju plana ubrzanja u odnosu na klasičan postupak.

Osim toga u radu je prikazan novi postupak određivanja trenutnog pola ubrzanja u preseku dve kružnice opisane iz centara vektora ubrzanja pomnoženih recipročnom vrednošću kvadrata ugaone brzine.

Takođe prvi put, u radu je prikazan postupak određivanja trenutnog pola ubrzanja u preseku kružnice koja prolazi kroz početne tačke dva vektora ubrzanja i njihovu presečnu tačku, i kružnice koja prolazi kroz krajnje tačke ta dva vektora i njihovu presečnu tačku

Ključne reči: *planovi ubrzanja, kulisni mehanizam, klipni mehanizam sa obrtnim cilindrom, trenutni pol ubrzanja*

1. UVOD

Grafičke metode u kinematici i teoriji mehanizama poslednjih decenija su gotovo izašle iz upotrebe. Tome je značajno doprinela upotreba kompjutera, što omogućuje da analitički postupak uradimo lako, bez straha od moguće računske greške. Osim toga, u upotrebi su specijalni programi za animaciju i kinematsku analizu.

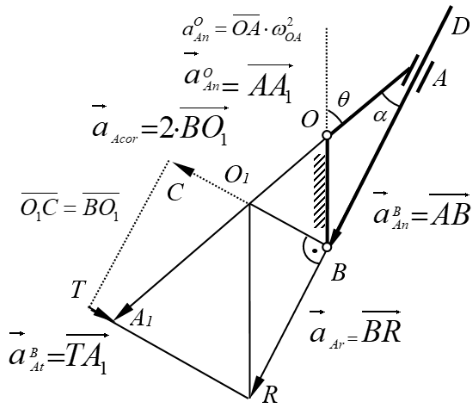
Ipak, autor je u jednom periodu svojih studija istraživao grafičke metode i nastala rešenja primenjivao u kombinaciji sa vrlo preciznim AutoCAD-om. To ne znači da će grafičke konstrukcije opet biti dominantna tehnika, ali kao kontrola analitičkih rešenja ili generator novih ideja uvek će imati svoje mesto u istraživanjima. U ovom radu videćemo metodu uslovno označenu kao $1/\omega^2$.

2. KULISNI MEHANIZAM

Grafičko određivanja ubrzanja kulisnog mehanizma možemo pogledati u [1], [2].

A konstrukcija $1/\omega^2$ teče ovako, slika 1:

- Iz tačke *B* ucrtamo normalu na kulisu *DB*, do preseka sa pravcem krivaje *OA*.
- Iz dobijene tačke O_1 povlačimo paralelu sa *OB* do preseka *R* sa pravcem *AB*.
- Iz preseka *R* povlačimo paralelu sa BO_1 do preseka A_1 sa pravcem *AO*.



$$\vec{a}^O_{An} = \vec{a}_{pn} + \vec{a}_{pt} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} =$$
$$= \vec{a}^B_{An} + \vec{a}^B_{At} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

Slika 1 – Određivanje ubrzanja kulisnog mehanizma

Dobili smo da je:

$$\vec{a}^O_{An} = \overrightarrow{AA_1} \tag{1}$$

$$\vec{a}_{Ar} = \overrightarrow{BR} \tag{2}$$

Adresa autora: Miloš Ljubomirović, „Elmos“, Jagodina, Kneza Lazara 2
e-mail: milos_ljubomirovic@hotmail.com
Rad primljen: 13.01.2015.
Rad prihvaćen: 19.07.2017.

$$\vec{a}_{Acor} = 2 \cdot \overrightarrow{BO_1} \tag{3}$$

$$\vec{a}^{\,B}_{An} = \overrightarrow{AB} \tag{4}$$

$$\vec{a}^{\,B}_{At} = \overrightarrow{TA_1} \tag{5}$$

Dokaz:

Iz izraza za prenosnu brzinu

$\overline{OA} \cdot \omega_{OA} \cdot \cos\alpha = \overline{BA} \cdot \omega_{AB}$, dobijamo,

$$\frac{\overline{AO_1}^2}{\overline{AO}} = a^O_{An} \cdot \frac{1}{\omega^2_{AB}}$$

Iz sličnosti trouglova A_1RA i O_1BA, A_1RO_1 i O_1BO, O_1RA i OBA imamo: $\frac{\overline{A_1A}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{A_1R}}{\overline{O_1B}}$, $\frac{\overline{A_1R}}{\overline{O_1B}} = \frac{\overline{O_1R}}{\overline{OB}}$, $\frac{\overline{O_1R}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{OA}}$, pa sledi $\overline{AA_1} = \frac{\overline{AO_1}^2}{\overline{AO}}$, tj. $\overline{AA_1} = a^O_{An} \cdot \frac{1}{\omega^2_{AB}}$.

Iz izraza za Koriolisovo ubrzanje

$a_{Acor} = 2 \cdot \omega_{AB} \cdot v_{Ar}$ sledi $a_{Acor} = 2 \cdot \omega^2_{AB} \cdot \overline{BO_1}$,

pa posle množenja faktorom $1/\omega^2_{AB}$ imamo

$a_{Acor} = 2 \cdot \overline{BO_1}$.

Iz istog razloga je $a^B_{An} = \overline{AB} \cdot \omega^2_{AB} \cdot \frac{1}{\omega^2_{AB}} = \overline{AB}$.

Preostale dve komponente, a^B_{At} i a_{Ar}, logički smo razmestili.

Dijagram smo mogli uraditi u obrnutom redosledu: od tačke A_1 ka B.

S obzirom da se uvek očuva proporcija trouglova, tj. testerastog dijagrama, jasno je da vektor $\vec{a}^{\,O}_{An}$ možemo naneti u proizvoljnoj, željenoj razmeri.

Analitički postupak određivanja ubrzanja kulisnog mehanizma imamo u [3], a ovde možemo postaviti i ovakve formule:

$$a^B_{An} = a^O_{An} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{BA}} \cdot \cos^2\alpha \tag{6}$$

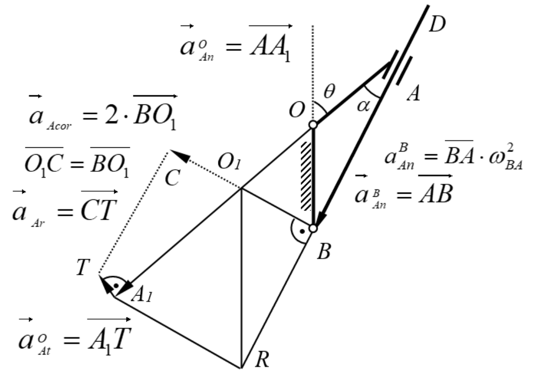
$$a_{cor} = 2 \cdot a^B_{An} \cdot \tan\alpha \tag{7}$$

$$a^B_{At} = a_{Acor} - a^O_{An} \cdot \sin\alpha \tag{8}$$

$$a_{Ar} = a^O_{An} \cdot \cos\alpha - a^B_{An} \tag{9}$$

(α i $\overline{BA}$ se određuju na osnovu poznatih trigonometrijskih relacija)

U slučaju inverznog kulisnog mehanizma, gde pogon daje kulisa BD, postupak i formule su dati na sl. 2:



$$\vec{a}^{\,O}_{A} = \vec{a}^{\,O}_{An} + \vec{a}^{\,O}_{At} = \vec{a}_{pn} + \vec{a}_{r} + \vec{a}_{cor} = \vec{a}^{\,B}_{An} + \vec{a}_{r} + \vec{a}_{cor}$$

Slika 2 – Određivanje ubrzanja inverznog kulisnog mehanizmna

$$a_{cor} = 2 \cdot a^B_{An} \cdot \tan\alpha \tag{10}$$

$$a^O_{An} = a^B_{An} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{11}$$

$$a^O_{At} = (a_{Acor} - a^O_{An} \cdot \sin\alpha)/\cos\alpha \tag{12}$$

$$a_{Ar} = a^O_{An} \cdot \cos\alpha - a^B_{An} - a^O_{At} \cdot \sin\alpha \tag{13}$$

2. KLIPNI MEHANIZAM SA OBRTNIM CILINDROM

Grafičko određivanje ubrzanja kod ovog mehanizma može se videti u [1].

A konstrukcija po metodi $1/\omega^2$ izvodi se ovako, slika 3:

- Odredimo trenutni pol brzina, P_v.
- Iz P_v povlačimo liniju paralelnu sa OB i ona seče liniju BA u tački R.
- Iz tačke R povlačimo normalu na BR i ona seče produžetak linije P_vA u tački A_1.

Iz sličnosti trouglova RA_1A i P_VBA, i OBA i P_VRA imamo da je

$\overline{AA_1} = \frac{\overline{P_VA}^2}{OA}$, a odatle

$\overline{AA_1} = a^O_{An} \cdot \frac{1}{\omega^2_{AB}}$.

Sada, imajući vektor $\vec{a}_A$ određujemo vektor $\vec{a}_B$ smatrajući da štap AB vrši ravno kretanje,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{Bn}^{\,A} + \vec{a}_{Bt}^{\,A}$$

Vektor $\vec{a}_{Bn}^{\,A}$ posle množenja sa $1/\omega_{AB}^2$ poklopiće se sa duži BA. Intenzitet vektora $\vec{a}_{Bt}^{\,A} \cdot \frac{1}{\omega_{AB}^2}$ ne znamo, ali krajnja tačka vektora $\vec{a}_B \cdot \frac{1}{\omega_{AB}^2}$ mora ležati na pravcu A_1R.

Smatrajmo, sada, da štap *AB* vrši složeno kretanje, pa će biti,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Br} + \vec{a}_{Bcor} \quad (\vec{a}_{Bp} = 0)$$

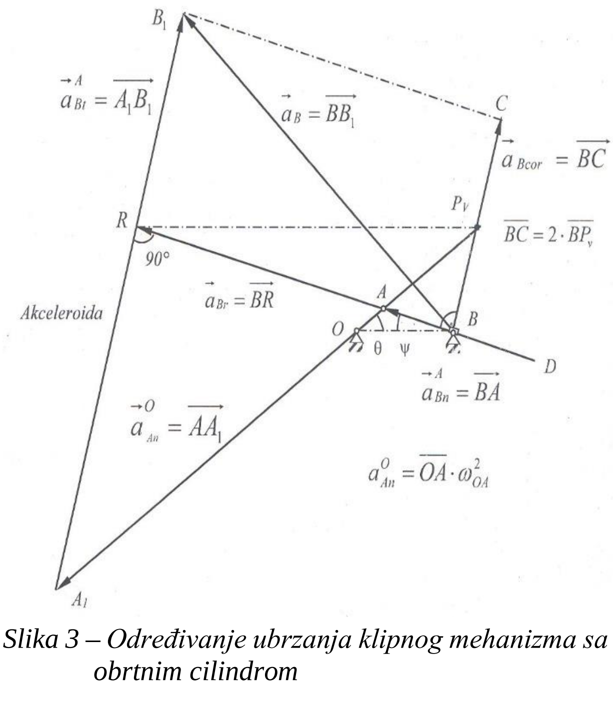
Relativno ubrzanje ima pravac štapa *BA* i mora se poklopiti sa dužinom *BR*.

Preostaje nam da odredimo vektor Koriolisovog ubrzanja.

Kako je $a_{Bcor} = 2 \cdot \omega_p \cdot v_{Br} = 2 \cdot \omega_{AB} \cdot v_{Br}$ i $v_{Br} = \overline{BP_v} \cdot \omega_{AB}$, sledi $a_{Bcor} = 2 \cdot \overline{BP_v} \cdot \omega_{AB}^2$ i posle množenja sa $1/\omega_{AB}^2$,

$$a_{Bcor} = 2 \cdot \overline{BP_v} \tag{14}$$

Tako, udvajanjem duži BP_v, možemo naći i rezultujući vektor $\vec{a}_B$.



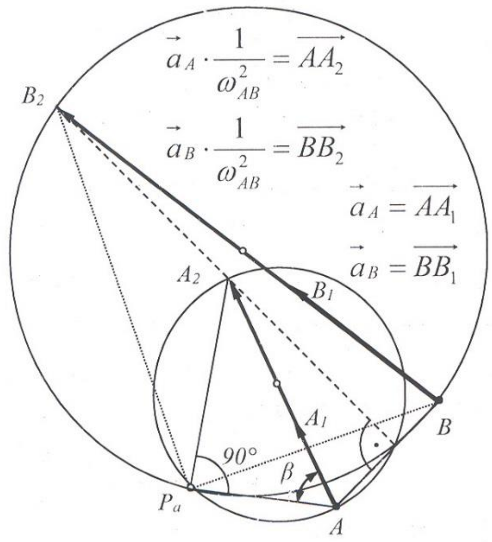
Slika 3 – Određivanje ubrzanja klipnog mehanizma sa obrtnim cilindrom

4. ODREĐIVANJE TRENUTNOG POLA UBRZANJA POMOĆU KRUŽNICA

U slučaju kada su nam poznata dva vektora ubrzanja, trenutni pol ubrzanja određuje se zaokretanjem vektora. Klasično grafičko rešenje nalazi se u svim ozbiljnijim udzbenicima kinematike.

Ovde ćemo videti dve konstrukcije pomoću kružnica. Najpre, postupak $1/\omega^2$:

Ako nad vektorom $\vec{a}_A \cdot 1/\omega_{AB}^2$ opišemo kružnicu iz njegovog centra ona će proći kroz trenutni pol ubrzanja, P_a, slika 4.



(Razmere za dužinu i ubrzanja moraju biti jednake u brojčanom iznosu)

Slika 4 – Određivanje trenutnog pola ubrzanja metodom $1/\omega^2$

Dokaz:

Ukoliko vektor ubrzanja $\vec{a}_A$ pomnožimo nekim koeficijentom *k*, tako da sa duži $\overline{P_aA}$ formiramo pravougli trougao, možemo postaviti sledeću relaciju:

$$k \cdot \left|\vec{a}_A\right| \cdot \cos\beta = \overline{P_aA}$$

odakle, uzevši u obzir da je

$$\left|\vec{a}_A\right| = \overline{P_aA} \cdot \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4} \quad \text{i} \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}}$$

sledi da je $k = \frac{1}{\omega_{AB}^2}$.

Naravno, sve što je rečeno važi i za tačku *B* i vektor $\vec{a}_B$, pa u preseku dve kružnice možemo naći trenutni pol ubrzanja, P_a.

Primetimo da akceleroida B_2A_2 leži u odnosu na pravac *AB* pod uglom od *90°*, što sledi [4] iz obrasca

$\alpha = \arctan \dfrac{\varepsilon_{AB}}{1-\omega_{AB}^2}$, kada umesto ω_{AB} unesemo *1*.

Lako je videti da konstrukcija pravouglog trougla P_aAA_2 omogućuje izračunavanje nepoznate ugaone brzine,

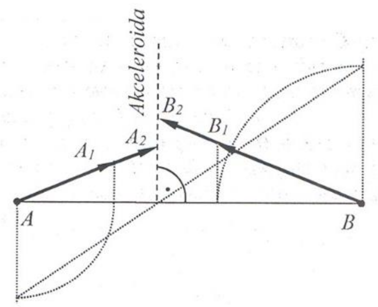
$$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}}} = \sqrt{\frac{\left|\vec{a}_A\right|}{\overline{AA_2}}} \qquad (15)$$

a onda i ugaonog ubrzanja,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_A\right|}{\overline{AA_2}} \cdot \frac{\overline{P_aA_2}}{\overline{P_aA}} \qquad (16)$$

Zbog toga je korisno poznavati postupak da se dva vektora ubrzanja prikažu u razmeri koja obezbeđuje da akceleroida bude pod uglom od *90°*, slika 5.

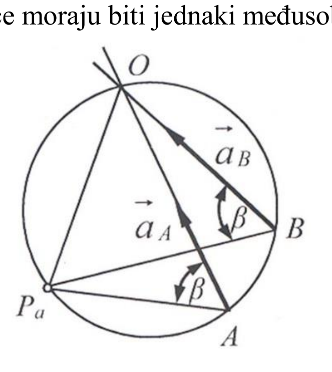
Pokazaćemo, dalje, da još jedna karakteristična kružnica (tj. familija kružnica) mora proći kroz trenutni pol ubrzanja.



Slika 5 – Konstrukcija vektora ubrzanja sa akceleroidom pod uglom od 90°

Naime, dobro je poznato da kružnica koja prolazi kroz početne tačke dva vektora ubrzanja i njihovu presečnu tačku mora proći i kroz trenutni pol ubrzanja, [3]-str. 100, [5]-str. 108.

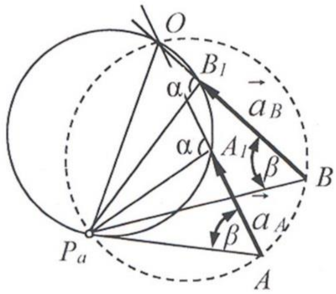
Na slika 6. vidimo najjednostavniji dokaz ove osobine, zasnovan na tome da periferijski uglovi nad tetivom kružnice moraju biti jednaki međusobno.



Slika 6 – Kružnica prolazi kroz početne tačke vektora ubrzanja, njihovu presečnu tačku i trenutni pol ubrzanja P_a

Ali, ono što je posebno korisno od ovog geometrijskog dokaza je to što možemo pokazati i da kružnica koja prolazi kroz završne tačke dva vektora ubrzanja i njihovu presečnu tačku takođe prolazi kroz trenutni pol ubrzanja, slici 7.

$$\Delta P_aAA_1 \cong \Delta P_aBB_1 \rightarrow \angle P_aA_1O = \angle P_aB_1O$$



Slika 7 – Kružnica prolazi kroz završne tačke vektora ubrzanja, njihovu presečnu tačku i trenutni pol ubrzanja P_a

5. ZAKLJUČAK

Ovaj rad odnosi se na ravno kretanje krutog tela. Nastajao je kroz pokušaje da se ubrzanja mehanizama ne određuju klasičnim planovima, već jednostavnijim, šematizovanim konstrukcijama. Osnovna ideja rada je u karakterističnoj razmeri, kojom se postižu planovi ubrzanja sa akceleroidom pod uglom od *90°*. Pokazalo se, kod kulisnog mehanizma i klipnog mehanizma sa obrtnim cilindrom, da taj u suštini jednostavan postupak daje vizuelno skladne konstrukcije i omogućuje lako postavljanje analitičkih izraza za ubrzanja. Osim toga, u radu su prikazana dva nova postupka određivanja trenutnog pola ubrzanja, oba zasnovana na preseku kružnica.

LITERATURA

[1] Živković Ž. Teorija mašina i mehanizama, [Internet] [citirano 13.01.2015]. Dostupno na https://www.-google.rs/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiyw7_Yu6DWAhWFYpoKHc7iCmIQFgglMAA&url=http%3A%2F%2Fwww2.masfak.ni.ac.rs%2Fuploads%2Farticles%2Fwww2_autorizovana_predavanja__mehanizmi_i_masine_copy.pdf&usg=AFQjCNHD9tfwR_NoclzLjOzLoP7gg0nXNQ

[2] Kojić M, Mićunović M, Kinematika, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1975.

[3] Rašković D, Osnovi teorije mehanizama, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1964.

[4] Ljubomirović M, Pravac jednakih ubrzanja pri ravnom kretanju, Tehnika, Beograd, vol. 1, s. 75-78, 2013.

[5] Arnovljević I, Osnove teoriske mehanike III, Naučna knjiga, Beograd, 1947.

SUMMARY

DETERMINATION OF THE ACCELERATION AND INSTANTANEOUS CENTER OF THE ACCELERATIONS BY $1/\omega^2$

This paper explores the straight movement and a method conditionally marked $1/\omega^2$*, in which acceleration vectors multiplied by the reciprocal value of the square of the angular velocity. That is, at the quick-return mechanism and piston mechanism with oscillating cylinder allow schematic and simplified construction plan acceleration compared to the classical procedure.*

In addition, this paper presents a new method of determining the instantaneous center of the accelerations in the intersection of the two circles described from the centers of the acceleration vectors multiplied by the reciprocal value of the square of the angular velocity.

Also for the first time, this paper presents a method of determining the instantaneous center of the accelerations in the intersection of the two circles that passes through the initial point of the two vectors of acceleration and their intersection point, and the circle passing through the endpoints of these two vectors and their intersection point.

Key words: *Acceleration plans, the quick-return mechanism, piston mechanism with oscillating cylinder, instantaneous center of the accelerations*