Dr Dragoljub M. Brkić,
dipl. inž.
Tehnički opitni centar KoV,
Beograd

PRIMENA TESTA SLUČAJNOSTI ZA PROVERU HIPOTEZE O SLUČAJNOM IZBORU UZORKA

UDC: 519.246 : 312

Rezime:

U radu je izložen statistički test sa primerima primene, za proveru pretpostavke da je uzorak koji se ispituje izdvojen iz populacije na slučajan način. Radi ilustracije primene, primeri su urađeni primenom posebno razvijenog računarskog programa za rešavanje ovakvih problema.

Ključne reči: statistika, test slučajnosti, uzorak, populacija, Studentov ili t-test, Fišerov ili F-test.

APPLICATION OF THE RANDOMIZED TEST FOR VERIFYING THE RANDOM SAMPLING HYPOTHESIS

Summary:

The paper gives a statistical test for verifuing the hypothesis that an examined sample is randomly taken out from the population. The test is illustrated by two examples with a specially developed computer program for solving this type of problems.

Key words: statistics, randomized test, sample population, Student or t-test, Fisher or F-test.

Uvod

Pri obradi rezultata ispitivanja, pored odbacivanja malo verovatnih vrednosti koje je u toku ispitivanja ili praćenja poprimila posmatrana slučajna promenljiva *t*, potrebno je da se proveri da li skup vrednosti predstavlja uzorak koji je iz populacije izdvojen na slučajan način, ili su neke od njih korigovane radi prikazivanja stanja u populaciji boljim nego što je ono u stvarnosti. Ova korekcija može se izvršiti tako što se izvestan broj vrednosti uveća za određeni iznos, ili da se u nekom slučaju umanje zavisno od toga da li prosek slučajne promenljive treba da bude manje ili veće vrednosti. To važi za situacije kada je obrađivaču rezultata podatke dostavio neko drugi, pa se sumnja u verodostojnost rezultata.

Promena izvesnog broja vrednosti može da bude prouzrokovana i povremenim sistematskim promenama faktora koji utiču na vrednosti posmatrane slučajne promenljive. To se može desiti ako je uzorak veliki ili ako se prikuplja u toku dužeg vremena. Otkrivanje tih nepravilnosti veoma je bitno za korektnu obradu rezultata ispitivanja. Provera hipoteze o tome da li je uzorak iz populacije izdvojen na slučajan način kratko se naziva test slučajnosti. Kao i svi drugi statistički testovi i ovaj test je povezan sa rizicima odluke, tj. postavljena hipoteza se niti prihvata, niti odbacuje sa potpunom sigurnošću, već nosi i određenu neizvesnost koja je srazmerna usvojenim rizicima.

U radu je prikazan test slučajnosti koji je zasnovan na podeli broja vrednosti uzorka na tri približno jednaka dela, i izračunavanju srednjih vrednosti i standardnih devijacija za svaki od ovih poduzoraka i međusobnom upoređivanju tih vrednosti uz primenu Studentovog ili t-testa i Fišerovog ili F-testa. Ako se primenom ta dva testa pokaže da se može usvojiti da su i srednje vrednosti i standardne devijacije međusobno iste u sva tri poduzorka, tada se pretpostavka o slučajnosti uzorka može prihvatiti, a u protivnom se odbacuje sa unapred usvojenim rizicima.

Teorijske postavke problema

Neka su $t_1, t_2, ..., t_n$ vrednosti koje je slučajna promenljiva t poprimila u toku eksperimenta (ispitivanja ili praćenja). Ove vrednosti ne bi trebalo da budu uređene ni u rastućem ni u opadajućem poretku. U stvari, njihov redosled bi trebalo da bude onakav kakav se dobija u toku eksperimenta. Ako su ove vrednosti uređene u nekom od tih poredaka, a nema polaznog neuređenog niza podataka, onda treba „izmešati“ ove vrednosti primenom celobrojnih pseudoslučajnih brojeva koji imaju ravnomernu raspodelu u intervalu $[1, n]$. Neuređeni niz: $t_1, t_2, ..., t_n$ podeli se na približno tri jednaka dela (poduzorka). Neka su brojevi vrednosti slučajne promenljive t u ovim poduzorcima n_1, n_2, i n_3 : $n_1 = [n/3]$, $n_2 = [n/3]$ i $n_3 = n - (n_1 + n_2)$, gde je $[Q]$ celobrojna vrednost broja $Q = n/3$. Naravno, mora biti $n_1 + n_2 + n_3 = n$, gde je n ukupan broj vrednosti slučajne promenljive t u posmatranom uzorku koji je izdvojen iz populacije.

Tačkaste ocene srednjih vrednosti i standardnih devijacija za ova tri poduzorka, date su sledećim izrazima:

$$\hat{m}_1 = \bar{t}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} t_j \tag{1}$$

$$\hat{m}_2 = \bar{t}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} t_j \tag{2}$$

$$\hat{m}_3 = \bar{t}_3 = \frac{1}{n_3}\sum_{j=1}^{n_3} t_j \tag{3}$$

$$\hat{\sigma}_1 = s_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{j=1}^{n_1}\left(t_j - \hat{m}_1\right)^2} \tag{4}$$

$$\hat{\sigma}_2 = s_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}\left(t_j - \hat{m}_2\right)^2} \tag{5}$$

$$\hat{\sigma}_3 = s_3 = \sqrt{\frac{1}{n_3 - 1}\sum_{j=1}^{n_3}\left(t_j - \hat{m}_3\right)^2} \tag{6}$$

Na osnovu tri srednje vrednosti za poduzorke, prikazane izrazima (1), (2) i (3), mogu se formirati tri tačkaste ocene

Studentove ili t-statistike, koje se mogu izraziti sledećom formulom:

$$\hat{t}_{ij} = \frac{\hat{m}_i - \hat{m}_j}{\sqrt{\frac{(n_i-1)s_i^2+(n_j-1)s_j^2}{n_i+n_j-2}}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}}} \quad (7)$$

gde je $i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j$.

Statistike t_{ij} odnose se na prvi i drugi poduzorak (t_{12}), prvi i treći poduzorak (t_{13}) i drugi i treći poduzorak (t_{23}).

Slučajna promenljiva $\hat{t}_{ij}$, data izrazom (7) ima Studentovu ili t-raspodelu sa $n_i + n_j - 2$ stepeni slobode. Kada se usvoji vrednost donjeg kvanta (rizika), p, za ovaj broj stepeni slobode $n_i + n_j - 2$, može se odrediti kvantil Studentove ili t-raspodele: $t_p\ (n_i + n_j - 2)$.

Takođe, na osnovu tri standardne devijacije za poduzorke date izrazima (4), (5) i (6), mogu se formirati tri tačkaste ocene Fišerove ili F-statistike koje se mogu izraziti sledećom formulom:

$$\hat{F}_{ij} = \frac{s_i^2}{s_j^2} \quad (8)$$

gde je $i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j$.

Statistike F_{ij} odnose se na prvi i drugi poduzorak (F_{12}), prvi i treći poduzorak (F_{13}) i drugi i treći poduzorak (F_{23}).

Slučajna promenljiva $\hat{F}_{ij}$, data izrazom (8), ima Fišerovu ili F-raspodelu sa $n_i - 1$ i $n_j - 1$ stepeni slobode.

Za usvojene vrednosti donjeg i gornjeg kvanta (rizika), p i q, respektivno, a za ove brojeve stepeni slobode $n_i - 1$ i $n_j - 1$, mogu se odrediti donji i gornji kvantili F-raspodele: $F_d\ (p;\ n_i - 1;\ n_j - 1)$ i $F_g\ (q;\ n_i - 1;\ n_j - 1)$.

Određivanje kriterijuma za test slučajnosti

Kvantil Studentove ili t-raspodele $t_p\ (n_i + n_j - 2)$, za poznatu vrednost broja stepeni slobode $v = n_i + n_j - 2$ i usvojenu vrednost donjeg rizika p, može se odrediti pomoću, za tu svrhu specijalno urađenog, računarskog programa ili naći u odgovarajućoj statističkoj tablici. Treba napomenuti da se u nekim statističkim tablicama kvantila Studentove raspodele daju kvantili za ukupan rizik koji je jednak zbiru donjeg, p, i gornjeg, q, rizika $(p + q)$. Obično su rizici p i q međusobno jednaki, a njihove vrednosti su standardizovane. U tom slučaju iz tablice treba uzeti vrednost kvantila čiji je rizik duplo veći od p. Za ovako određenu vrednost kvantila t-raspodele, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$-t_p\left(n_i+n_j-2\right) < \hat{t}_{ij} < \left|t_p\left(n_i+n_j-2\right)\right| \quad (9)$$

sa ukupnim rizikom $p + q$ može se tvrditi da su srednje vrednosti slučajne promenljive t u prvom, drugom i trećem uzorku međusobno jednake u statističkom smislu, tj. $m_i = m_j;\ i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j$.

Kvantili Fišerove ili F-raspodele: $F_d\ (p;\ n_i - 1;\ n_j - 1)$ i $F_g(q;\ n_i - 1;\ n_j - 1)$, za poznate vrednosti brojeva stepeni slobode $v_1 = n_i - 1$ i $v_2 = n_j - 1$ i usvojene vrednosti donjeg i gornjeg rizika p i q, respektivno, mogu se odrediti pomoću specijalno urađenog računarskog programa ili naći u odgovarajućoj statističkoj tablici. Treba napomenuti da se u statističkim tablicama obično daju vrednosti samo za gornji kvantil F_g, a da se vrednost donjeg kvantila F_d izračunava pomoću relacije između ova dva kvantila:

$$F_{\alpha;\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha;\nu_2,\nu_1}} \qquad (10)$$

gde je $\alpha = q$ – gornji rizik i $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ – gornji, a $F_{(1-\alpha);\nu_2,\nu_1}$ – donji rizik Fišerove ili F-raspodele.

Za ovako određene vrednosti kvantila F-raspodele, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$F_d\left(p,n_i-1;n_j-1\right) < \hat{F}_{ij} < F_g\left(q,n_i-1;n_j-1\right) \qquad (11)$$

sa ukupnim rizikom $p + q$ može se tvrditi da su standardne devijacije slučajne promenljive t u prvom, drugom i trećem uzorku međusobno jednake u statističkom smislu te reči, tj. $\sigma_i = \sigma_j$; $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$.

Ako su istovremeno ispunjena oba uslova definisana izrazima (9) i (11), onda se može prihvatiti pretpostavka da su sva tri poduzorka u statističkom smislu međusobno jednaka, jer su im jednaki osnovni parametri: međusobno su jednake sve tri srednje vrednosti, kao i standardne devijacije. Treba napomenuti da je ovde reč o jednakosti teorijskih ili stvarnih srednjih vrednosti i standardnih devijacija, respektivno, a tačkaste ocene ovih parametara, i u slučaju kada su odgovarajući teorijski parametri jednaki, međusobno se razlikuju. Međutim, ta razlika nije toliko velika da bi opovrgla tvrdnju o jednakosti teorijskih parametara.

Ako se može prihvatiti pretpostavka o jednakosti poduzoraka, onda bi se mogla prihvatiti i pretpostavka da su vrednosti slučajne promenljive t u tim poduzorcima slučajno raspoređene, odnosno da je ceo osnovni uzorak izdvojen iz populacije na slučajan način. Međutim, ako bi se vrednosti koje su namerno menjane raspoređivale ravnomerno po celom skupu neuređenih vrednosti, ovim testom se ta nepravilnost ne bi mogla otkriti. U tom slučaju morale bi se analizirati i ranije serije podataka, ako ih ima, i upoređivati sa posmatranom serijom podataka, pod pretpostavkom da u svim ranijim serijama nisu namerno vršene korekcije vrednosti slučajne promenljive t.

Dakle, ovim testom slučajnosti može se otkriti povremena namerna ili sistematska promena izvesnog broja vrednosti slučajne promenljive t u dovoljno dugom nizu podataka čije vrednosti ne bi trebalo da budu uređene u rastućem ili opadajućem poretku.

Numerički primeri

Primer 1

Pri usvojenim vrednostima parametara Vejbulove raspodele: parametar razmere $b = 100$ i parametar oblika $c = 2,5$ generisano je $n = 30$ pseudoslučajnih brojeva. Ovi brojevi se pridružuju slučajnoj promenljivoj t koja ima dvoparametarsku raspodelu sa datim vrednostima parametara b i c. Vrednosti t i njihov redosled prikazani su po vrstama u sledećoj tabeli:

62,39	71,87	84,10	64,46	105,15
107,47	81,45	124,23	104,00	140,88
84,32	82,60	13,83	88,71	83,66
72,29	60,12	10,60	156,53	57,47
50,46	52,76	77,66	117,81	88,47
44,15	79,02	29,58	124,30	63,43

Primenom testa slučajnosti treba proveriti da li su ove vrednosti pseudoslučajnih brojeva „izabrane" na slučajan način i usvojiti da su vrednosti donjeg i gornjeg rizika $p = q = 0,05$.

Rešenje

Prema izloženom postupku, brojevi vrednosti u prvom, drugom i trećem poduzorku su $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ *i* $n_3 = 10$. Vrednosti u prve dve vrste u tabeli pripadaju prvom poduzorku, u trećoj i četvrtoj drugom poduzorku, a u petoj i šestoj trećem poduzorku. Na osnovu izloženog teorijskog postupka i primenom računarskog programa dobijene su sledeće vrednosti tačkastih ocena za srednje vrednosti i standardne devijacije poduzoraka:

$\hat{m}_1 = 94,6$ $\hat{m}_2 = 71,013$ i $\hat{m}_3 = 72,817$
$\hat{\sigma}_1 = s_1 = 26,1$ $\hat{\sigma}_2 = s_2 = 41,26$ i
$\hat{\sigma}_3 = s_3 = 31,126$.

Tačkaste ocene srednje vrednosti i standardne devijacije kompletnog uzorka su:

$\hat{m} = \bar{t} = 79,477$ *i* $\hat{\sigma} = s = 34,048$.

Tačkaste ocene Studentove ili t-statistike za prvi i drugi, za prvi i treći i za drugi i treći poduzorak imaju sledeće vrednosti: $\hat{t}_{12} = 1,5277$ $\hat{t}_{13} = 1,6958$ i $\hat{t}_{23} = -0,1103$.

Kritična vrednost t-testa za broj stepeni slobode $v = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$ i usvojeni donji rizik $p = 0,05$ jednaka je $t_p\ (v) = t_{0,05}\ (18) = -1,7341$.

Tačkaste ocene Fišerove ili F-statistike za prvi i drugi, za prvi i treći i za drugi i treći poduzorak imaju sledeće vrednosti: $\hat{F}_{12} = 0,4002$ $\hat{F}_{13} = 0,7031$ i $\hat{F}_{23} = 1,7572$.

Kritične vrednosti F-testa, donji i gornji kvantili, za brojeve stepeni slobode $v_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ i $v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$ i usvojeni donji i gornji rizik $p = q = 0,05$ su: $F_d\ (p;\ n_i - 1;\ n_j - 1) = F_d\ (0,05;\ 9;\ 9) = 0,3146$ i $F_g\ (q;\ n_i - 1;\ n_j - 1) = F_g\ (0,05;\ 9;\ 9) = 3,1789$. Ove kritične vrednosti iste su za sva tri slučaja, jer su brojevi vrednosti u poduzorcima jednaki, a otuda su jednaki i brojevi stepeni slobode.

Dobijeni rezultati izračunavanja statistika $\hat{t}_{ij}$ i $\hat{F}_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j$, pripadaju domenu kojeg ograničavaju kritične vrednosti ovih statistika, pri primeni oba testa i Studentovog i Fišerovog, što potvrđuje pretpostavku da je uzorak „izdvojen" iz populacije na slučajan način. Ova tvrdnja iskazuje se sa rizicima $p = q = 0,05$.

Primer 2

Ako se u prvom poduzorku, u vrednostima navedenim u *primeru 1*, prve tri vrednosti uvećaju tako da umesto vrednosti: 62,39; 71,87 i 84,10 budu vrednosti: 124,78; 143,74 i 168,20; sprovodeći isti postupak testa slučajnosti kao u *primeru 1*, treba pokazati da li se sa ovako izmenjenim vrednostima može tvrditi da je uzorak „izdvojen" iz populacije na slučajan način, usvajajući iste vrednosti rizika $p = q = 0,05$.

Rešenje

Prema izloženom postupku, brojevi vrednosti u prvom, drugom i trećem poduzorku su $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ *i* $n_3 = 10$.

Vrednosti u prve dve vrste u tabeli pripadaju prvom poduzorku, u trećoj i četvrtoj drugom poduzorku i u petoj i šestoj trećem poduzorku. Na osnovu izloženog teorijskog postupka i primenom računarskog programa, dobijene su sledeće vrednosti tačkastih ocena za srednje vrednosti i standardne devijacije poduzoraka:

$\hat{m}_1 = 116{,}436$ $m_2 = 71{,}013$ i $m_3 = 72{,}817$
$\hat{\sigma}_1 = s_1 = 30{,}624$ $\hat{\sigma}_2 = s_2 = 41{,}26$ i
$\hat{\sigma}_3 = s_3 = 31{,}126$.

Tačkaste ocene srednje vrednosti i standardne devijacije kompletnog uzorka su: $\hat{m} = \bar{t} = 86{,}755$ i $\hat{\sigma} = s = 39{,}702$.

Tačkaste ocene Studentove ili t-statistike za prvi i drugi, za prvi i treći i za drugi i treći poduzorak imaju sledeće vrednosti:

$\hat{t}_{12} = 2{,}7954$ $\hat{t}_{13} = 3{,}1589$ i $\hat{t}_{23} = -0{,}1103$.

Kritična vrednost t-testa za broj stepeni slobode $v = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$ i usvojeni donji rizik $p = 0{,}05$ jednaka je $t_p(v) = t_{0,05}(18) = -1{,}7341$.

Tačkaste ocene Fišerove ili F-statistike za prvi i drugi, za prvi i treći i za drugi i treći poduzorak imaju sledeće vrednosti: $\hat{F}_{12} = 0{,}5509$ $\hat{F}_{13} = 0{,}9680$ i $\hat{F}_{23} = 1{,}7572$.

Kritične vrednosti F-testa, donji i gornji kvantili, za brojeve stepeni slobode $v_1 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ i $v_2 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$ i usvojeni donji i gornji rizik $p = q = 0{,}05$ su: $F_d(p; n_i - 1; n_j - 1) = F_d(0{,}05; 9; 9) = 0{,}3146$ i $F_g(q; n_i - 1; n_j - 1) = F_g(0{,}05; 9; 9) = 3{,}1789$. Ove kritične vrednosti iste su za sva tri slučaja, jer su brojevi vrednosti u poduzorcima jednaki, a otuda su jednaki i brojevi stepeni slobode.

Dobijeni rezultati izračunavanja statistika $\hat{t}_{ij}$ i $\hat{F}_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$, u svim slučajevima ne pripadaju domenu kojeg ograničavaju kritične vrednosti ovih statistika, pri primeni oba testa i Studentovog i Fišerovog, što ukazuje na to da pretpostavku da je uzorak „izdvojen" iz populacije na slučajan način treba odbaciti. Ova tvrdnja iskazuje se sa rizicima $p = q = 0{,}05$.

Zaključak

Provera pretpostavki o tome da li je uzorak koji se ispituje izdvojen iz populacije na slučajan način ili su neke jedinice uzorka probrane radi prikazivanja populacije drugačijom nego što je ona u stvarnosti u teoriji statistike je poznata kao klasični statistički test. Test slučajnosti koji je izložen u članku, modifikovan je radi povećanja njegove osetljivosti na otkrivanju jedinica u uzorku koje nisu „tipične" za populaciju iz koje je taj uzorak izdvojen. Kriterijum za ovaj test je proširen. Tako, na primer, uveden je kompromisni kriterijum istovremenog ispunjenja zahteva Studentovog ili t-testa i Fišerovog ili F-testa, da bi se postavljena hipoteza o slučajnom izboru uzorka mogla prihvatiti ili odbaciti. Drugim rečima, istovremeno se proverava značajnost promene srednje vrednosti (mere istinitosti) i standardne devijacije (mere preciznosti) u tri približno jednaka poduzorka na koja je podeljen osnovni uzorak. Ako u svim mogućim parovima od ovih poduzoraka (tri kombinacije bez ponavljanja) ne postoji znatna razlika između njihovih srednjih vrednosti i standardnih devijacija, može se prihvatiti hipoteza o slučajnom izdvajanju uzorka iz populacije; u protivnom ta hipoteza može da se odbaci. Ovaj test slučajnosti je sličan testu jednorodnosti ili homogenosti. Predložena su tri poduzorka. Međutim, ako je broj jedinica u osnovnom uzorku veliki može se povećati i broj poduzoraka, ali bi u tom slučaju trebalo istraživati do kojeg broja je prihvatljivo to povećanje. Navedeni primeri, koji su urađeni korišćenjem posebno razvijenog računarskog programa pokazuju valjanost i osetljivost opisanog testa slučajnosti.

Literatura:

[1] Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, VEB Deutscher Verlag d er Wissenschaften, Berlin, 1962.

[2] Chapouille, P., Pazzis, R.: Fiabilité des Systèmes, Masson et C^e, Paris, 1968.

[3] Gnédenko, B., Béliaev, Y., Soloviev, A.: Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité, Éditions, „Mir", Moscou, 1972.

[4] Waerden, B. L.: Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[5] Brunk, H. D.: An Introduction to Mathematical Statistics, Blaisdell Publishing Company, New York, 1965.

[6] Stojanović, S.: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[7] Ivanović, Z.: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1976.