# МЕТОДА ПИКОВА – ЈЕДАН СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛ ЗАПРЕМИНА ПРЕКОРАЧЕЊА

Драгутин Павловић [1]
Војислав Вукмировић [2]
Јасна Плавшић [3]
Јован Деспотовић[4]

УДК: 519.217
**DOI: 10.14415/zbornikGFS24.008**

***Резиме:*** *Метода пикова је начин анализе екстремних хидролошких вредности којим се из раположивих података-хидрограма долази до особина стохастичке структуре појаве. Анализира се дискретна расподела броја јављања величине у задатом интервалу времена t и континуална расподела вредности величине прекорачења базног протока. У овом раду користи се стохастички модел за анализу запремине прекорачења базног протока и одговарајућих трајања циклуса између прекорачења. Модел је заснован на принципима прекидних процеса Маркова и претпоставкама о природи функција интензитета процеса. Анализирају се могуће дискретне расподеле броја јављања као последице изабраних облика функција временског и запреминског интензитета процеса. Моделира се непрекидна расподела величина прекорачења, за основне низове и агрегације (удруживања) њихових чланова. Дата је формулација ових расподела у функцији расподеле броја јављања. Наводи се израз за функцију расподеле максималне вредности запремине прекорачења базног протока у интервалу времена t. Уз текст су дати примери анализе података са хидрометријске станице Бездан на Дунаву.*

***Кључне речи:*** *Метода пикова, запремине прекорачења, стохастички модел.*

## 1. УВОД

Екстремне хидролошке појаве (поплаве, суше) резултат су многобројних и међусобно условљених чинилаца. Да би се од њих у будућности заштитили, меродавне рачунске вредности, изражене кроз протоке, запремине, трајања таласа, уобичајено се добијају кроз анализу вероватноће појаве на годишњем нивоу, методом годишњих екстрема. Методом пикова изнад прага, одговори на исти питања добијају се анализом свих екстремних протока већих или мањих од изабраног базног протока. У раду је приказана је примена методе пикова за формирање модела запремина прекорачења прага/базног протока при таласима великих речних вода.

[1] Др Драгутин Павловић, дипл.инж. грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 011 3370 206 (УБ-ГФ), e-mail: epavlovd@hikom.grf.bg.ac.rs
[2] Др Војислав Вукмировић, дипл. инж. грађ., проф. у пензији, (УБ-ГФ), e-mail: vojislav.v@sbb.rs
[3] Др Јасна Плавшић, дипл. инж. грађ., доцент, (УБ-ГФ), e-mail: jplavsic@grf.bg.ac.rs
[4] Др Јован Деспотовић, дипл. инж. грађ., в.проф., (УБ-ГФ), e-mail: jdespotovic@grf.bg.ac.rs

Обим предвиђен за рад не дозвољава опширан опис методе пикова и случајних процеса хидролошких величина. Од домаћих аутора почеци су везани за радове Тодоровића [1,2] и Зеленхасића [3]. Вукмировић [4] је проучавао кретање вученог наноса, кише Деспотовић [5], а протоке Плавшић [6]. Теоријске основе и примери могу се наћи у домаћим публикацијама [7] и [8,9].

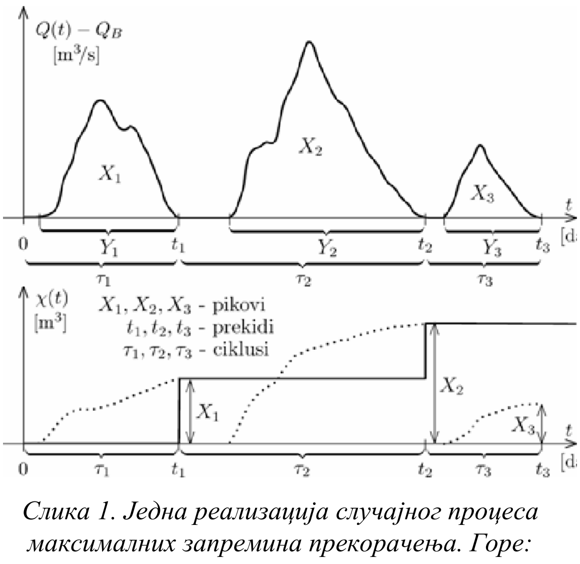
Радови на проучавању запремина прекорачења као случајних процеса нису уобичајени. Методологија приказана у раду део је докторске дисертације наведене под [10] где се могу наћи референце на расположиву литературу.

## 2. МОДЕЛ ЗАПРЕМИНА ПРЕКОРАЧЕЊА

Основна претпоставка је да се информације о стохастичкој структури појаве запремина прекорачења (као карактеристике великих вода) садрже у низовима дневних протока. Из тих информација изводе се закључци о вероватноћи појаве запремина прекорачења, било да се посматрају појединачно или на неки начин удружене.

Прво се дефинише прекидни случајни процес максималне запремине прекорачења (видети слику 1):

$$\chi(t) = \chi_t = \sup_{\substack{t_\nu \le t \\ \nu = 1, \ldots, \eta_t}} \{X(t_\nu), t \geq 0\} \tag{1}$$




*Слика 1. Једна реализација случајног процеса максималних запремина прекорачења. Горе: хидрограм прекорачења базног протока. Доле: највећа појединачна запремина прекорачења (супремум) до времена t .*

Прекид је тренутак $t_n$ када је остварена укупна појединачна запремина прекорачења, а трајањем циклуса $\tau_n$ интервал између два суседна прекида. Ако се врше удруживања запремина прекорачења (по две, три или више узастопних) прекид је тренутак остварења последње запремине у групи.

За опис процеса запремина прекорачења користе се постулати процеса Маркова дискретног типа. Говоре о прекидима по времену и по запреминама таласа (два постулата) и доводе до кључних величина процеса – функција интензитета процеса (временског $\lambda(t,\nu)$ и запреминског $\kappa(x,n)$). То су граничне вредности вероватноће јављања једног прекида у веома малом временском односно запреминском интервалу. Уводи се логична претпоставка о независности прекида по времену и по запремини. Опис процеса је тада облика (2) са почетним условима (3).

$$p'_\nu(t) = \lambda(t,\nu-1)\, p_{\nu-1}(t) - \lambda(t,\nu)\, p_\nu(t)\,, \quad \nu \geq 1$$
$$p'_0(t) = -\lambda(t,0)\, p_0(t) \tag{2}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad p_0(0) = 1\,,$$
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\nu(0) = 0\,, \quad \forall\, \nu \geq 1\,. \tag{3}$$

Ради решавања израза (2) проучавају се следеће појаве и њихови закони вероватноће: (а) $\nu$ број прекида у $t$ интервалу времена $\eta_{t\ i}$ и дискретни закон $p_\nu(t)$; (б) $\tau$ трајање циклуса између $\nu$ два, три или више узастопних прекида у времену и закон $G(\tau_i)$; (ц) $n$ број прекида у $x$ интервалима вредности запремине $\mu_x$ и закон $p_n(x)$; (д) $V$ вредности запремине прекорачења при $n$ једном, два или више прекида по запремини и закон $H(x_i)$. Основни низови трајања циклуса и запремина прекорачења означени су са $\tau$ или $\tau_1$ и $x$ или $x_1$, агрегације по два узастопна члана низова са $\tau_2$ и $x_2$, и узастопних $i$ чланова са $\tau_i$ односно $x_i$. Приказаће се решења система (2) посматрајући трајање циклуса $t$; решење за број јављања прекида по вредности запремине је еквивалентно; само се користе друге ознаке.

## 2.1. АНАЛИЗА БРОЈА ЈАВЉАЊА ПРЕКИДА ПО ВРЕМЕНУ И ЗАПРЕМИНИ

Решење система (2), тј. дискретна расподела броја јављања прекида по времену $p_\nu(t)$, зависи од облика функције интензитета процеса $\lambda(t,\nu)$. Из искуства у примени методе пикова претпостављају се облици за $\lambda(t,\nu)$ као у табели (1) који доводе до три дискретне фукције расподеле: биномне, Пуасонове и негативне биномне. Прва два облика не зависе од боја јављања $\nu$, а у друга два су раздвојени утицаји времена $t$ броја јављања $\nu$. Величина $\Lambda(t)$ је интеграл временског чиониоца функције интензитета, тј. $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$ и надаље ће се користити као практична замена функције интензитета која је тешко директно осмотрива.

*Табела 1: Облик функције интензитета и дискретни закон броја јављања прекида.*

| тип | функција интензитета | дискретни закон броја јављања прекида $p_\nu(t) = P\{\eta_t = \nu\}$ | назив |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lambda_0 = \text{const.}$ | $e^{-\lambda_0 t}\ \dfrac{[\lambda_0 t]^\nu}{\nu!}$ | Пуасонов са константним параметром |
| 2 | $\lambda(t)$ | $e^{-\Lambda(t)}\ \dfrac{[\Lambda(t)]^\nu}{\nu!}$ | Пуасонов са променљивим параметром |
| 3 | $\lambda(t)\ \left(1+\dfrac{\nu}{a}\right)$ | $\dfrac{\Gamma(\nu+a)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(a)}\ \left(1-e^{-\Lambda(t)/a}\right)^\nu\ e^{-\Lambda(t)}$ | негативни биномни |
| 4 | $\lambda(t)\ \left(1-\dfrac{\nu}{b}\right)$ | $\dfrac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(b+1-\nu)}\ e^{-\Lambda(t)}\ \left(e^{\Lambda(t)/b}-1\right)^\nu$ | биномни |

За број прекида по запремини функција запреминског интензитета има ознаку $\kappa(x,n)$, а у изразима из табеле 1 $\lambda(t)$ треба заменити са $\kappa(x)$, $\nu$ са $n$, $\Lambda(t)$ са $K(x)=\int_0^x \kappa(s)\,ds$, где је $x$ запремински интервал у коме се посматра број јављања.

## 2.2 РАСПОДЕЛА ЗАПРЕМИНА ПРЕКОРАЧЕЊА

Функција раподеле запремина прекорачења при $n$ прекида дефинише се са

$$H_n(x)=P\{X_n\le x\} \tag{4}$$

а њена веза са дискретном расподелом броја јављања $n$ прекида по запремини је

$$p_n(x)=P\{X_n\le x\}-P\{X_{n-1}\le x\} \tag{5}$$

Из израза (5) (према [1], видети и [4], [10]), добијају се за функцију расподеле $n$ узастопних запремина прекорачења, односно густину расподеле изрази

$$H_n(x)=1-\sum_{i=0}^{n-1} p_n(x),\quad h_n(x)=\varkappa(x,n-1)\,p_{n-1}(x) \tag{6}$$

За расподелу појединачних прекорачења (за $n$=1), из израза (6) следи,

$$H_1(x)=1-e^{-\mathcal{K}(x)},\quad \mathcal{K}(x)=\int_0^s\varkappa(s)ds \tag{7}$$

Из израза (7) и посматрајући изразе за облике дискретне расподеле из табеле 1, долази се до веома важног закључка – да расподела запремина прекорачења не зависи од типа дискретне расподеле броја прекида. Изразу за $H_1$ одговара облик неколико непрекидних функција расподела. Од погодних су за моделовање изабране једнопараметрска експоненцијална и двопараметрске Вејбулова и Парето ([10]). Тако се долази и до модела за $K(x)$ али и $\kappa(x)$, дела функције запреминског интензитета процеса који зависи само од запреминског корака.
Табела (2) приказује облике $H_n(x)$ функције расподеле $n$ запремина прекорачења у функцији претпостављеног облика функције запреминског интензитета процеса.

*Табела 2: $H_n(x)$ функција расподеле $n$ узастопних запремина прекорачења у функцији облика функције $\kappa(x,n)$ запреминског интензитета процеса.*

| тип $\varkappa(x,n)$ | $H_n(x)$ [$H_1(x)$ увек по изразу (7)] |
|---|---|
| $\varkappa_0=\text{const.}$ | $1-e^{-\varkappa_0 t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\varkappa_0 t)^i}{i!}$ |
| $\varkappa(x)$ | $1-e^{-\mathcal{K}(x)}\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{\mathcal{K}(x)^i}{i!}$ |
| $\varkappa(x)\left(1+\frac{n}{a}\right)$ | $H_{n-1}-\frac{e^{-\mathcal{K}}}{(n-1)!}\left\{\prod_{i=1}^{n-1}(a+i-1)\right\}(1-e^{-\mathcal{K}/a})^{n-1},\ n=2,3,\ldots$ |
| $\varkappa(x)\left(1-\frac{n}{b}\right)$ | $H_{n-1}-\frac{e^{-\mathcal{K}}}{(n-1)!}\left\{\prod_{i=1}^{n-1}(b-i+1)\right\}(e^{\mathcal{K}/b}-1)^{n-1},\ n=2,3,\ldots$ |

## 2.3. РАСПОДЕЛА МАКСИМАЛНЕ ЗАПРЕМИНЕ ПРЕКОРАЧЕЊА

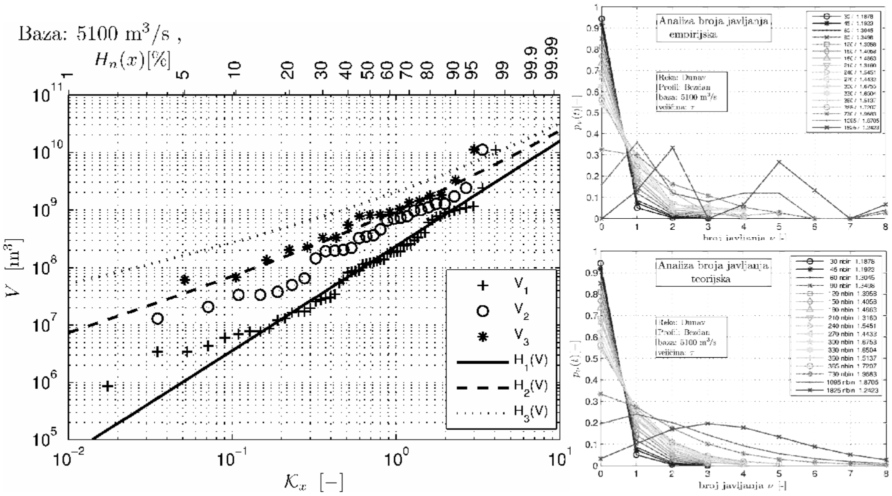
Функција раподеле максималне запремине прекорачења у временском интервалу (0,$t$], користећи и дефиницују процеса (1), гласи:

$$F_t(x)=P_t\{X\leqslant x\}=P_t\{\chi(t)\leqslant x\}=p_0(t)+\sum_{\nu=1}^{+\infty}[H(x)]^\nu p_\nu(t) \tag{8}$$

У изразу су расподеле броја јављања прекида у времену $p_\nu(t)$ и запремина прекорачења $H(x)=H_1(x)$ (одређује је $p_n(t)$ расподела броја прекида по запремини).

## 3. ПРИМЕР ПРИМЕНЕ МОДЕЛА

Приказан стохастички модел примењен је на средњим дневним протоцима од 1931. до 2009. са хс Бездан на Дунаву [10]. Анализа је спроведена за велики број прагова протока. Дат је изглед моделираних функција $H_n(x)$, за $n$=1,2,3 и броја јављања прекида по времену $p_\nu(t)$ за један праг са карактеристичним понашањем (слика 3). Основни низ ($n$=1) је моделиран Вејбуловом расподелом, а $p_\nu(t)$ негативном биномном расподелом. Облик $H_{n=\{1,2\}}(x)$ следи избор Поасонове расподеле за $p_n(x)$ броја прекида по запремини. Основни низ запремина и низ по две удружене суседне запремине сагласни су по тесту Колмогоров-Смирнова, док удруживање по три запремине није. Уочен је проблем великог опсега вредности запремина пре-




*Слика 2.Праг протка 5100 $m^3$/s. Лево: функције $H_n(x)$, за $n$=1,2,3. линије - теоријске, маркери – емпиријске. Десно: расподела јављања прекида по времену $p_\nu(t)$, горе- емпиријска, доле- теоријска.*

корачења, што се може превазићи избором неке друге расподеле за $H_1(x)$. Преузимање узорачке оцене параметра $a$ усвојене дискретне расподеле $p_n(x)$ за формирање $H_n(x)$ не даје добре резултата - разијена је процедура која параметре фитује да се оствари најбоља могућа условна сагласност.

## 4. ЗАКЉУЧАК

Рад приказује стохастички модел запремина прекорачења базног протока заснован на методи пикова; то је прекидни случајни процес заснован на постулатима Маркова о прекидима по времену и запремини прекорачења. Систем једначина који је опште решење зависи од функција временског $\lambda(t,\nu)$ и запреминског $\kappa(\mathrm{x},n)$ интензитета процеса. Њихов претпостављен облик одређује расподелу броја прекида – биномну, Пуасонову или негативно биномну. Расподела прекида имплицира расподеле времена трајања циклуса $G_\nu(\tau_i)$ и запремина прекорачења $H_n(x_i)$. Расподеле основних низове $G_1(\tau_i)$ и $H_1(x_i)$ не зависе од броја јављања - обликом могу одговарати експоненцијалној, Вејбуловој или Парето расподели. Расподеле удруживања ($\nu$,$n$=2,3,...) су рекурентне преко $G_1(\tau_i)$ и $H_1(x_i)$. Модел је примењен на хидрограмима средњих дневних протока хс Бездан, река Дунав. Број прекида у времену следи негативну биномну расподелу, а трајања циклуса и запремина прекорачења основних низова Вејбулову. Методологије прорачуна је допуњена због немогућности директне примене теоријских претпоставки за прорачун $G_\nu(\tau_i)$ и $H_n(x_i)$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Todorović, P.: On some problems involving random number of random variables, *Annals of Mathematical Statistics*, **1970**, vol 41, no 3, pp 1059-1063.

[2] Todorović, P.: Stochastics model for floods, *Water Resources Research*, **1978**, vol 14, no 2, pp 345-356.

[3] Todorović, P., Zelenhasić, E.: A Stochastics model for flood analysis, *Water Resources Research*, **1970**, vol 6, no 6, pp 1641-1648.

[4] Вукмировић, В.: *Анализа кретања вученог наноса помоћу сличајних процеса*, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд, **1975**.

[5] Деспотовић, Ј.: *Анализа јаких киша као узрочника поплава помоћу случајних процеса*, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд, **1996.**

[6] Плавшић, Ј.: *Анализа ризика од поплава помоћу прекидних случајних процеса*, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд, **2004.**

[7] Вукмировић, В.:*Анализа вероватноће појаве хидролошких величина*, Грађевински факултет Универзитета у Београду и Научна књига, Београд, **1990.**

[8] Зеленхасић, Е.: *Стохастичка хидрологија*, Пан-меркур, Нови Сад, **1997.**

[9] Зеленхасић, Е., Руски, М.: *Инжењерска хидрологија*, Научна књига, Бгд, **1991.**

[10] Павловић, Д.: *Моделирање стохастичке структуре карактеристика великих вода добијених из серија пикова изнад прага*, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду, Београд, **2013.**


# PEAKS OVER THRESHOLD METHOD – ONE STOCHASTIC MODEL FOR FLOOD VOLUMES


***Summary:*** *Peaks-over-threshold method (POT) is the way for analysis of the stochastic structure of extreme hydrological events. For a chosen base flow and for characteristic value obtained form partial hydrographs, the POT method encompasses detection of discrete probability distribution of number of events in chosen time interval and continuous distribution of the exceedance values (peaks). This article presents a stochastic model for the analysis of the base flow exceedance volumes and accompanied cycle times between the ends of the sucessive exceedaence events. The model is based on the*

*Markov's discreteds model principles and the assumptions about the form of the process intensity functions. The number of occurrence discrete distributions are discussed according to chosen forms of the time and volume intensity functions. The continuous distributions of the base flow exceedance characteristic values are modelled for the base series of values and their aggregation. The distribution of the maximum exceedance volume over the base flow in chosen time interval is formulated. The article presents an application of the suggested procedures on the mean daily flows hydrographs from the Bezdan gauging station on the Danube river.*

***Keywords:*** *POT method, flood volumes, stochastic model*