Letopis naučnih radova
Godina 30 (2006), broj 1, strana 184–191

UDK: 634.51: 65.012.123

Originalni naučni rad
Original scientific paper

SINERGIJA LINEARNOG I KOMPROMISNOG PROGRAMIRANJA U ALOKACIONIM ZADACIMA

Srđević B., Srđević Zorica[1]

REZIME

U radu se razmatraju mogućnosti povezivanja standardne jednokriterijumske optimizacije putem LP i tehnike višekriterijumske analize poznate kao kompromisno programiranje (CP) u traženju pozitivne sinergije kod rešavanja složenih zadataka alokacije resursa. Definisana je moguća procedura kuplovanja dve bitno različite kategorije modela diskretnog odlučivanja i naznačen je pravac istraživanja mogućih mehanizama za utvrđivanje pozitivne sinergije, ako postoji.

Ključne reči: sinergija, LP, CP, alokacija

UVOD

U novije vreme određenu pažnju naučne javnosti privlači problem sprezanja tehnika jednokriterijumske i višekriterijumske optimizacije da bi se našla moguća pozitivna sinergija u alokaciji resursa. Jedna od već korišćenih za tu svrhu je standardno Linearno programiranje (LP) koja spada u klase jednokriterijumskih optimizacionih tehnika, a druga je Analitički hijerarhijski proces (AHP) za podršku procesa odlučivanja, kojim se vrednuju hijerarhijski struktuirani višekriterijumski problemi i u krajnjem ishodu određuju kardinalne vrednosti težina alternativa. Ideja je da se putem AHP na manje rigorozan način, koji je prilagođen donosiocu odluka (inače sklonom tzv. mekim optimizacijama), odrede težinski koeficijenti uz nezavisne promenljive u ciljnim funkcijama LP programa i da se zatim matematički dosledno optimizira alokacija resursa. Ako se ovaj princip spajanja AHP i LP metoda shvati kao formiranje sinergijskog modela, postiže se bitno novo i logično povezivanje kvalitativnih i kvantitativnih elemenata važnih za odlučivanje u zadacima alokacije resursa. Dva primera korišćenja opisanog prilaza mogu se naći u radovima (*Saaty et al, 2003*) i (*Srđević, 2006*); u drugom radu razmatrane su neke mogućnosti i ograničenja kompletnih i parcijalnih sinergijskih modela polazeći od nekih ideja datih u radu (*Alphonce,1997*). U navedenim radovima date su preporuke kako graditi sinergijske modele za alokaciju resursa u poljoprivredi i vodoprivredi.

[1]Dr Bojan Srđević, red. prof., dr Zorica Srđević, asistent, Poljoprivredni fakultet, Departman za uređenje voda, Univerzitet u Novom Sadu

U radu (*Srđević, 2005a*) posebno su razmatrane mogućnosti diskretnih modela odlučivanja u poljoprivredi i vodoprivredi. Težište je stavljeno na višekriterijumske modele koji se često primenjuju u praksi: aditivni (*SAW– Simple Additive Weighting*) i produktni (*SPW– Simple Product Weighting*). Od naprednijih višekriterijumskih metoda prikazan je TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*) koji spada u grupu metoda idealne tačke. Sva tri metoda su korišćena u višekriterijumskoj analizi i oceni više zalivnih sistema u Vojvodini.

Ovde se pažnja usmerava na još neka svojstva diskretnih prilaza u odlučivanju i razmatraju mogućnosti sinergije Linearnog programiranja – LP (Linear Programming), inače najčešće korišćenog u poljoprivredi, sa poznatim metodom klasične višekriterijumske optimizacije – CP (*Compromise Programming*) (*Zeleny, 1982*). Prvo su prikazana važnija svojstva ovih metoda, a zatim su diskutovana neka pitanja moguće sinergije.

LP OPTIMIZACIJA I VIŠEKRITERIJUMSKA ANALIZA

Linearno programiranje (LP)

Kada se elementi iz domena mogućih rešenja vrednuju u odnosu na jedan kriterijum, postupak određivanja rešenja (alternative) koje ekstremizira kriterijum označava se kao jednokriterijumska optimizacija. Ako su kriterijum i ograničenja linearni, zadatak se rešava standardnim ili specijalizovanim algoritmima linearnog programiranja (LP).

Standardni LP model u matričnoj notaciji glasi:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizirati:} & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \\ \text{uz ograničenja:} & \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \text{i uslove:} & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad (1)$$

gde je **X** vektor nepoznatih promenljivih (uključujući sve slek, viškovne i veštačke promenljive), $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ je transponovani vektor korespodentnih koeficijenata uz promenljive u ciljnoj funkciji, **A** je matrica koeficijenata iz jednačina ograničenja i **b** je vektor brojeva na desnim stranama jednačina ograničenja ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$). Rešenje modela (1) je vektor **X*** za koji je ciljna funkcija z ekstremizirana (min/max).

Domen dopustivih rešenja je generalno neograničen, a algoritmi LP uspešno eksploatišu činjenicu da postoje nedominirana (neinferiorna) rešenja na obodima domena, odnosno u rogljevima na presecima hiper–ravni. Simpleks, na primer, pretražuje nedominirana rešenja i identifikuje optimalno u odgovarajućem roglju dopustivog domena. Postoje varijante navedenih slučajeva, ali one ne utiču na opštost daljih izlaganja.

Stvari se komplikuju kada ima dva ili više linearnih kriterijuma u istom LP modelu. Bez obzira da li su kriterijumi istog ili različitog karaktera (min, max), optimalno rešenje praktično ne postoji, jer poboljšanje jednog uglavnom vodi pogoršanju jednog ili više ostalih kriterijuma. Promene vrednosti kriterijuma definišu skupove dominiranih i nedominiranih rešenja koje najpre treba odrediti, a zatim traženje najboljeg rešenja nastaviti samo na skupu nedominiranih primenom spoljnog aspiracionog kriterijuma donosioca odluka kojim se definiše različit međusobni značaj osnovnih kriterijuma. Uvođenje aspiracionog kriterijuma u polazni višekriterijumski LP model vodi ka raznim postupcima skalarizacije (*Vemuri, 1974*). Vektorski kriterijum (čiji su elementi postojeći kriterijumi) se najčešće transformiše u skalarni kriterijum tako što donosilac odluka, ili analitičar, definiše težinske koeficijente kojima se množe originalni kriterijumi i tako 'otežani' sabiraju. Skalarizacija nosi nedostatke koji limitiraju domete takve metodologije i rezultata koji se iz nje dobiju, a glavni su što se praktično na samom početku gubi višekriterijumsko značenje zadatka i što je dalji postupak rešavanja praktično neodređen. Kada je moguće, za zadatke sa više kriterijuma ispravnije je koristiti metode višekriterijumske analize (optimizacije), odnosno rešavati ga u originalnom obliku.

Primena metoda višekriterijumske analize podrazumeva rad u diskretnim prostorima odluka (alternativa) i kriterijuma, dakle sa prebrojivim skupovima tačaka. U zadacima LP (sa ili bez skalarizacije) ovo ograničenje ne postoji, sem u specijalnim slučajevima 1–0 ili celobrojnog LP. Ova razlika važna je kada se govori o mestu i načinu upotrebe standardne optimizacije (uključujući i neki od neophodnih metoda skalarizacije), odnosno višekriterijumske analize i odlučivanja.

Kompromisno programiranje (CP)

Metod CP (Kompromisno programiranje) rangira alternative prema bliskosti određenim 'idealnim' vrednostima kriterijuma. Minimizacija blizine idealnim vrednostima je surogat postupka standardne maksimizacije kriterijumske funkcije.

CP koristi matricu performanse R (koriste se i nazivi payoff matrica, rejting matrica, matrica odlučivanja) u kojoj svaki red odgovara jednoj alternativi, svaka kolona jednom kriterijumu, a dati element $r_{ij} \in R$ predstavlja rejting (performansu) alternative A_i u odnosu na kriterijum C_j.

Ako ima m kriterijuma $(C_1, C_2,..., C_m)$ i n alternativa $(A_1, A_2,..., A_m)$, matrica R ima oblik (2). Vrednosti $(w_1, w_2,...,w_m)$ upisane iznad matrice su težinske vrednosti kriterijuma definisane od strane donosioca odluka, ili određene na drugi način; zbir ovih težinskih vrednosti obično je 1, ili se na to može dovesti aditivnom normalizacijom.

$$\mathrm{R} = \begin{array}{c} \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & . & . & C_m \\ w_1 & w_2 & . & . & w_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & . & . & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & . & . & r_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ r_{n1} & r_{n2} & . & . & r_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$

CP definiše kao najbolju onu alternativu koja ima najmanje rastojanje od idealnog rešenja u skupu mogućih rešenja. Mera rastojanja je familija L_p– metrika data kao

$$L_p(i) = \left[\sum_{j=1}^{m} w_j{}^p \left| \frac{r_j^* - r_j}{r_j^* - r_j^{**}} \right|^p \right]^{1/p} \tag{3}$$

gde je $L_p\ (i)$ oznaka za L_p–metriku alternative A_i; r_{ij} je rejting alternative A_i u odnosu na kriterijum C_j; r_j^* i r_j^{**} su najbolja i najgora vrednost rejtinga na skupu alternativa za kriterijum C_j; p je parametar koji ukazuje na sklonost donosioca odluka u vrednovanju. Kao i ranije, m označava broj kriterijuma, a n broj alternativa.

Alternativa sa minimalnom L_p–metrikom smatra se najboljom, a rangiranje se vrši prema rastućoj L_p–metrici.

Težinski koeficijenti kriterijuma w_j (j = 1, 2,..., m) su normirane vrednosti originalnih ocena koje definiše donosilac odluka tako da im je zbir 1. Parametar p posredno iskazuje preference u balansiranju kriterijuma (p = 1), uobičajenom korišćenju efekta kvadriranja greške (p = 2), ili traženju apsolutno dominantnog rešenja ($p = \infty$). Ako se dopušta međusobno kompenziranje kriterijuma, p mora biti 1; ako se smanjuje marginalna vrednost ciljne funkcije, p mora biti veće od 1; kada je važna samo apsolutno najbolja alternativa, p mora biti beskonačno (min–max kriterijum Čebiševa). U svakom od navedenih slučajeva, ciljna funkcija optimizacionog problema se transformiše u različit oblik.

Primeri primene CP mogu se naći u radovima autora (npr. *Srđević et al, 2002; Srdjevic and Cveticanin, 2004*).

PRIMER SINERGIJE LP I CP

Primer primene metoda CP u oblasti poljoprivrede dat u ranijem radu autora (*Srđević, 2002*) korišćen je i u kasnijim radovima za testiranje raznih pristupa i metodologija višekriterijumske analize i sinteze (npr. *Srdjevic, 2005b*). U cilju kontinuiteta, isti primer koristi se za diskusiju u vezi mogućeg novog pravca sinergije CP i LP u postupku traženja optimalne alokacije resursa. Polazna postavka je da CP apriori ne sadrži 'alokacioni kapacitet', već samo vrši rangiranje 'alokacionih opcija'. Standardno LP ima 'alokacioni kapacitet', ali nema 'višekriterijalnost'. Logično je tražiti sinergiju tako da višekriterijumski metod dovede do rangova alokacionih alternativa, a da se zatim rangovi pogodno upotrebe u LP modelu i do kraja reši alokacija.

Problem

Treba alocirati aktivni prostor površinske akumulacije na 6 namena, rukovodeći se sa 5 ekonomskih kriterijuma kao što sledi:

<u>Alternative:</u>

A1: Proizvodnja električne energije
A2: Navodnjavanje
A3: Odbrana od poplava
A4: Snabdevanje vodom
A5: Turizam i rekreacija
A6: Rečni saobraćaj

<u>Kriterijumi:</u>

C1: Povećanje nacionalnog dohotka
C2: Povećanje priliva novca iz inostranstva
C3: Uravnoteženje režima plaćanja
C4: Supstitucija uvoza
C5: Porast regionalnog dohotka

Rešavanje problema metodom CP

Ako se primeni tzv. 'meki postupak vrednovanja' opisan u pomenutom radu (*Srdjevic, 2002*), dobija se rejting matrica iz Tabele 1. Metodom CP (za tri različite metrike) alternative su rangirane kao u Tabeli 2. Ako se detaljnije analiziraju rejtinzi iz Tabele 1, samo je prvi rang (najbolja alternativa) očekivan: A1 je bolja od drugih po svim kriterijumima, osim C5. Dalje rangove nije lako predvideti bez primene višekriterijumskog metoda; drugim rečima, pitanja dominacije među alternativama nisu više dovoljno očigledna.

Tabela 1. Matrica vrednosti alternativa u odnosu na kriterijume (Srđević, 2002)
Table 1. Alternatives v criteria (Srđević, 2002)

Alternative	Kriterijumi				
	C1 w_1=0.36	C2 w_2=0.29	C3 w_3=0.04	C4 w_4=0.18	C5 w_5=0.14
A1	40	3	5	5	20
A2	20	1	2	3	30
A3	30	1	1	1	30
A4	10	1	2	2	50
A5	20	2	2	2	30
A6	10	2	2	3	20

Tabela 2. Rangovi alternativa po različitim metodima (Srđević, 2002)
Table 2. Alternatives' ranks calculated by different methods (Srđević, 2002)

Alternative	CP		
	p=1	p=2	$p=\infty$
A1	1	1	1
A2	4	4	3
A3	3	6	3
A4	6	5	3
A5	2	3	2
A6	5	2	2

Sinergija sa LP

Rezultat u Tabeli 2 je nesumnjivo vredan. Prvo, utvrđeni su rangovi namena akumulacije kao višekriterijumski kompromis, imajući u vidu težine kriterijuma iz Tabele 1. Ako se za CP usvoji karakteristična Euklidska (p=2) metrika, alternative su rangirane A1-A6-A5 itd. Ako se kao merodavna usvoji metrika p=1, tada je redosled A1-A5-A6 itd. CP u dve metrike identifikuje alternativu A1 kao najbolju, a razlika nastupa već na drugoj poziciji. Razlike su vidljive i do kraja liste alternativa.

Razlike u rangiranju po različitim metrikama kao ovde, a još više po različitim metodima (npr. PROMETHEE ili ELECTRE), uobičajene su i retko kada dva metoda daju isti rezultat. Kada je alokacija resursa u pitanju, a ovde je to slučaj, jer se radi o dodeli prostora za različite (i u određenoj meri konfliktne) namene aktivnog akumulacionog prostora, utvrđivanje redosleda namena ne nosi neku naročito bitnu informaciju. Naime, intuitivno je moguće proceniti da su neke namene važnije od drugih. Već i meko vrednovanje alternativa prema kriterijumima nosi implicitnu preferencu donosioca odluka.

Numeričke vrednosti koje kao konačni rezultat proizvodi CP metod (a koje se koriste da se izvrši rangiranje) nisu sa stanovišta alokacije ni od kakvog značaja, tačnije neupotrebljive su. CP generiše 'totalna otežana Euklidska rastojanja od tačke utopije' i ta informacija nije direktno korisna za alokaciju aktivnog prostora akumulacije.

Postavlja se pitanje da li se CP može upotrebiti za alokaciju, koristeći LP kao finalni diskretni model odlučivanja? Drugo pitanje je da li je sinergija postignuta, odnosno da li je pozitivna?

Argumentacija da je gore navedeno moguće sastoji se u sledećem.

Neka su $L_p(i)$ (i = 1, 2,..., 6) metrike alternativa A1-A6 dobijene putem CP za usvojeno p. Ako se metrike prvo transformišu preko recipročnih vrednosti u ekvivalente koji 'korespondiraju maksimizaciji' (podsetimo, CP minimizira odstojanje od idealne tačke) i zatim dobijene vrednosti radi pojednostavljenja preslikaju kao zaokružene vrednosti na skalu [1–100], svakoj alternativi se asocira broj sa te skale koji je komponenta vektora virtuelnih apsolutnih težina alternativa $\mathbf{c} = [c_1, c_2,..., c_6]^T$; bolje rangirana alternativa ima u apsolutnom iznosu veću težinu.

Pretpostavimo da je dat osnovni LP model u sledećem obliku:

Maksimizirati: $z = c_1x_1 + c_2x_2 +... + c_6x_6 = 42x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 21x_5 + 31x_6$

Ograničenja: $x_1 + x_2 +... + x_6 = S$

$x_1 + x_2 \geq 0.6S$

$x_3+x_4+x_5 \geq 0.3S$ (4)

$x_3 + x_6 \geq 0.2S$

Uslovi: $x_1, x_2,..., x_6 \geq 0$.

U ciljnoj funkciji modela (4) koeficijenti uz promenljive odražavaju odnose alternativa i njihovih metrika sračunatih pomoću CP (uporediti na način da se vektoru $\mathbf{c} = [c_1, c_2,..., c_6]^T$ asociraju rangovi iz Tabele 2 za p=2). Na primer, najbolje rangirana namena akumulacije A1 ima najveći koeficijent u ciljnoj funkciji (42), sledeća je A6 sa koeficijentom 31 i tako redom; najniže rangirana alternativa A3 ima i najniži koeficijent (7).

S je raspoloživa aktivna zapremina akumulacije (npr. u milionima m3) koju treba alocirati na 6 namena: $x_1, x_2,..., x_6$ (takođe u milionima m3). Sva ograničenja, osim prvog, su arbitrarna. Prvo ograničenje definiše da alocirane zapremine moraju u zbiru dati ukupan aktivni kapacitet akumulacije. Drugo ograničenje, na primer, definiše da se na namene A1 i A2 mora alocirati najmanje 60% aktivnog kapaciteta akumulacije. Itd.

Rešenje (optimalno) za gornji model glasi: $x_1^*= 60$, $x_2^*= 0$, $x_3^*= 10$, $x_4^*= 0$, $x_5^*= 20$, $x_6^*= 10$.

Na prve tri rangirane namene A1, A6 i A5 iz višekriterijumskog CP modela po očekivanju se alociraju određeni akumulacioni prostor u skladu sa ograničenjima iz LP modela. Dalje, LP model alocira na namenu A3 preostalu zapreminu akumulacije, iako je po CP modelu ova namena pozicionirana na najnižoj tački prioriteta.

DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Alokacija zapremine akumulacije na opisani način, dakle sprezanjem CP i LP metoda, može se utvrditi iako na prvi pogled to izgleda nemoguće. Višekriterijumski model CP u prvoj fazi tretira alternative i kriterijume na drugačiji način nego jednokriterijumski LP model. U LP modelu ciljna funkcija (kriterijum) je konstruisana arbitrarno, ali dosledno poštujući rezultate (rangove) CP modela. Sinergija dva metoda je na taj način postignuta.

Pitanje konzistentnosti postupka postavlja se u ravni da li donosilac odluka u vreme vrednovanja alternativa po definisanim kriterijumim da bi formirao payoff-matricu (npr. kao u Tabeli 1) anticipira ograničenja koja će biti uneta u LP model. U suštini, već i samo korišćenje CP implicira da donosilac odluka ne može očekivati ništa drugo osim rangova alternativa. Dakle, o alokaciji unapred ne može ništa znati. Sa druge strane, u LP modelu rezultat može biti takav da se na neke alternative ne alocira tretirani resurs. U datom primeru, LP model sugerira da na namene A2 i A4 ne treba alocirati akumulacioni prostor, iako su one redom rangirane kao 4. i 5., dakle na višim pozicijama u odnosu na A3, koja je 'dobila' 10 miliona m3 prostora iako je poslednja rangirana po CP modelu.

Iz navedenog proizilazi da funkcija CP modela treba da se ograniči na prepoznavanje višedimenzionalnih konflikata u problemu odlučivanja (više alternativa vrednovanih po više kriterijuma), dok težište treba da je na preciznosti LP modela, naročito njegovih ograničenja. Ciljna funkcija u tom modelu može poslužiti kao mera osetljivosti rešenja (optimalne alokacije) što se može postići finim podešavanjem koeficijenata u vektoru **c**, uz obavezno poštovanje međusobnih odnosa koeficijenata proizašlih iz CP modela.

Iz gornje argumentacije proizilazi da je odgovor na pitanje da li je moguća sinergija CP i LP u alokacinim zadacima potvrdan, ali da se ne može utvrditi da li je sinergija pozitivna jer a priori nema referentnih vrednosti. U korišćenom primeru, ne može se reći da li je nađena alokacija bolja od neke druge, jer takva druga nije poznata. Jasno je da se na ovom pravcu otvara mogućnost daljeg istraživanja, slično kao kada se traže sinergije metoda AHP i LP (*Saaty et al, 2003*; *Srđević, 2006*).

LITERATURA

1. Alphonce C. B.: Application of the analytic hierarchy process in agriculture in developing countries, Agricultural Systems, 53, 97–112, 1997.
2. Saaty, T.L., Vargas L.G., Dellmann K: The allocation of intangible resources: the analytic hierarchy process and linear programming, Socio-Economic Planning Sciences 37 (2003), 169–184, 2003.
3. Srđević B., Višekriterijumsko vrednovanje namena akumulacije, Vodoprivreda 34 (195–200), 35–45, 2002.
4. Srđević B., Srđević Z., Zoranović T., PROMETHEE, TOPSIS i CP u višekriterijumskom odlučivanju u poljoprivredi, Letopis naučnih radova 26 (1), 5–23, 2002.
5. Srđević B.: Diskretni modeli odlučivanja u optimizaciji korišćenja kanalske mreže u Vojvodini, Letopis naučnih radova 29 (1), 31–40, 2005. (a)
6. Srdjevic B.: Combining different prioritization methods in analytic hierarchy process synthesis, Computers & Operations Research 32 (7), 1897–1919, Elsevier, 2005. (b)

7. Srđević B: LP, AHP i sinergija u alokaciji vodoprivrednih budžeta, Vodoprivreda, 2006. (u štampi)
8. Srdjevic Z., and Cveticanin L.: Entropy compromise programming method for parameter identification in the seated driver biomechanical model. International Journal of Industrial Ergonomics 34, 307–318, 2004.
9. Vemuri V.: Multiple-objective optimization in water resource systems, Water Res. Research 10 (1), 44–48, 1974.
10. Zeleny M.: Multiple criteria decision making. McGraw-Hill, New York, 1982.

SYNERGY OF LINEAR PROGRAMMING AND COMPROMISE PROGRAMMING IN SOLVING ALLOCATION PROBLEMS

by

Bojan Srdjevic and Zorica Srdjevic

University of Novi Sad, Faculty of Agriculture, Department of Water Management
Tel: +381–21–485–3337 (B. Srdjevic), +381–21–485–3410 (Z. Srdjevic),
E-mail: bojans@polj.ns.ac.yu srdjevicz@polj.ns.ac.yu

SUMMARY

Paper analyses possibilities of combining standard linear programming (LP) with compromise programming (CP) while searching for their positive synergy in solving complex allocation problems. Procedure for coupling two different categories of discrete decision models is defined and direction for further research related to positive synergy identification is suggested.

Key words: synergy, LP, CP, allocation

Primljeno: 06. 10. 2006.
Prihvaćeno: 10. 10. 2006.