

INVERZNA PRIORITIZACIJA U AHP: EVOLUTIVNA STRATEGIJA I DIREKTNI POSTUPAK

Bojan Srđević, Boško Blagojević, Zorica Srđević¹

REZIME

Za višekriterijumski metod Analitički hijerarhijski proces (AHP) karakteristične su matrice poređenja elemenata odlučivanja na nivoima hijerarhije problema cilj-kriterijumi-alternative. Na lokalnom nivou, za datu matricu se određuju težine poređenih elemenata (npr. kriterijuma u odnosu na cilj) i za tu svrhu standardno se koristi Satijev metod sopstvenih vrednosti matrice. U radu se tretira inverzni problem u odnosu na standardni: poznat je vektor težina elemenata i treba rekonstruisati matricu poređenja, odnosno identifikovati moguću semantičko-numeričku performansu donosioca odluka u toku vrednovanja elemenata. Poznato je da je ovaj problem neodređen ako se ništa ne zna o konzistentnosti donosioca odluka pri vrednovanjima. Zbog toga je korišćen specijalno konstruisani algoritam evolutivne strategije da bi se iz praktično beskonačnog skupa mogućih matrica generisao ograničeni skup matrica sa prihvatljivim indeksom konzistentnosti. Ove matrice su analizirane u odnosu na referentnu (početnu) matricu, a kriterijum približnosti (fitness funkcija) u algoritmu evolutivne strategije je apsolutno odstupanje pojedinačnog vektora težina (generisanog u okviru tekuće populacije vektora) od zadatog vektora. Zatim je postupkom direktne inverzije, uz pretpostavku da je donosilac odluka koristio standardnu Satijevu skalu poređenja $[1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 9]$, rekonstruisana početna matrica i za nju izračunato apsolutno odstupanje u odnosu na originalnu matricu. Primer u radu daje uporedni prikaz oba predložena postupka inverzne prioritizacije na osnovu konzistentnosti i apsolutnog odstupanja.

Ključne reči: AHP, inverzna prioritizacija, evolutivna strategija, direktna inverzija

UVOD

Analitički hijerarhijski proces (AHP) (Saaty, 1980) je višekriterijumski metod analize hijerarhijskih problema odlučivanja. Određuje težinske koeficijente elemenata odlučivanja po nivoima hijerarhije, tretira ih kao lokalne težine i na kraju ih sintetizuje da bi se dobile težine elemenata na najnižem nivou hijerarhije (alternative) u odnosu

¹ Dr Bojan Srđević, red. prof.; dipl. inž.- master Boško Blagojević, asistent; dr Zorica Srđević, docent, Poljoprivredni fakultet, Departman za uređenje voda, Novi Sad

na element na najvišem nivou (cilj). U datom nivou se u parovima porede elementi u odnosu na nadređeni element, pri čemu donosilac odluka koristi semantičko-numeričku skalu autora metoda (Saaty, 1980) koja je data u Tabeli 1, a matrice poređenja se tretiraju kao lokalne.

Tabela 1. Satijeva skala relativnog značaja
Table 1. Saaty's fundamental scale

Definicija	Asocirana numerička vrednost
Isti značaj	1
Slaba dominantnost	3
Jaka dominantnost	5
Veoma jaka dominantnost	7
Apsolutna dominantnost	9
Međuvrednosti	2,4,6,8

Iz svake lokalne matrice se matematičkim putem ekstrahuje vektor težina elemenata koji su poređeni pri kreiranju matrice, a najčešće se koristi metod sopstvenih vrednosti (u literaturi poznat kao *EVM - Eigenvector Method*). EVM se, kao i neki drugi metodi za istu namenu, naziva i metod prioritizacije, intuitivno je jasan, a matematički aparat je u suštini jednostavan i svodi se na sledeće:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Matrica poređenja A za n elemenata odlučivanja sadrži numeričke ocene prema Satijevoj skali. Npr., ako je element 1 znatno favorizovan u odnosu na element 2, na mestu a₁₂ matrice A nalazi se broj 5, a na mestu a₂₁ recipročna vrednost, 1/5. Kada bi donosilac odluka bio potpuno konzistentan, što znači da važi tranzitivnost a_{ij} = a_{ik}a_{kj} za svako i, j i k na skupu celobrojnih vrednosti od 1 do n, tada bi se za matricu A mogao odrediti tačan vektor težina

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad \forall w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1 \quad (2)$$

tako da uvek važi

$$a_{ij} = w_i / w_j. \quad (3)$$

Pošto je u realnosti potpuna konzistentnost za n veće od 3 veoma retka ($a_{ij} \neq w_i/w_j$), prioritizacijom se iz matrice A izračunava vektor težinskih koeficijenata koji će na svim pozicijama u matrici A dati što bliže aproksimacije $a_{ij} \approx w_i/w_j$. Ima različitih mera ove približnosti kao što su totalno Euklidsko rastojanje (ED), minimalno odstupanje preferenci (MV), konformnost (C) i sl. (Srdjevic, 2005).

Drugim rečima, matrica A , u kojoj su rezultati poređenja, samo kada bi bila potpuno konzistentna bila bi ista kao matrica:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Kao što je rečeno, postoje različiti (prioritizacioni) metodi da se iz matrice A izračuna vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ koji bi, prema (4), dao blisku aproksimaciju $A \approx X$. Jedan od načina je da se za A najpre odredi njena maksimalna sopstvena vrednost λ_{max} . Vektor sopstvenih vrednosti matrice može se zatim uzeti kao traženi približni vektor \mathbf{w} jer važi:

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \dots & \frac{w_3}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

i dobiti rešavanjem sistema homogenih linearnih jednačina:

$$A\mathbf{w} = n\mathbf{w} \quad (\text{ili što je isto } (A-nI)\mathbf{w} = 0). \quad (6)$$

Sistem (6) ima netrivialno rešenje ako i samo ako je n sopstvena vrednost matrice A , odnosno ako je determinanta matrice $(A-nI)\mathbf{w}$ jednaka nuli. Matrica X ima rang 1 pošto je svaki red matrice proizvod konstante i prvog reda matrice. Zbog toga su sve sopstvene vrednosti, sem jedne, jednake nuli. Zbir sopstvenih vrednosti matrice jednak je tragu matrice, a u ovom slučaju trag matrice X jednak je n . Prema tome, n je sopstvena vrednost matrice A i sistem (6) ima rešenje koje se sastoji od pozitivnih elemenata u vektoru rešenja, a ono je jedinstveno u granicama date multiplikativne konstante (teorema Perron – Frobenius). Drugim rečima, jedinstveno \mathbf{w} se dobija tako što se vektor rešenja iz (6) normalizuje kako je dato u relaciji (2), deljenjem pojedinačnih elemenata sa zbirom svih elemenata.

Jedan od numerički korektnih načina da se odredi w je da se A kvadrira, zatim da se svi elementi u svakoj vrsti saberu i dobijeni zbrovi normalizuju tako što se svaki pojedinačni zbir podeli sa ukupnim zbirom zbrova svih vrsta. Dobijeni vektor je prva aproksimacija traženog vektora. Postupak se ponavlja (kvadrirana matrica se ponovo kvadrira) i određuje novi vektor. Ako su dva uzastopna vektora jednaka na nivou usvojene tačnosti, postupak se završava. Ako taj uslov nije ispunjen, kvadriranje se dalje nastavlja dok se ne postigne željena tačnost. Iskustvo pokazuje da je u 5-6 iteracija traženi vektor pronađen.

EVOLUTIVNA STRATEGIJA I DIREKTNA INVERZNA PRIORITIZACIJA U AHP

Problem inverzne prioritizacije postavlja se na sledeći način:

1. Pretpostavka je da je donosilac odluka izvršio poređenje n elemenata na nekom nivou hijerarhije u odnosu na dati element na višem nivou i formirao recipročnu matricu A dimenzija $n \times n$.
2. Metodom sopstvenih vrednosti (EVM) iz matrice A izračunat je vektor težina elemenata w .
3. Za poznati vektor težina w reprodukovati matricu A . Drugim rečima, vektor iz tačke 2 se smatra poznatim, a matrica iz tačke 1 je nepoznata.

Pošto je problem neodređen, u smislu da može postojati mnogo matrica poređenja koje daju isti ili približno isti vektor težina, predlaže se paralelni metod inverzne prioritizacije koji se sastoji iz dva koraka:

Korak 1:

Za stohastičko pretraživanje domena mogućih matrica A i nalaženje što je moguće približnije matrice za zadati vektor, koristi se specijalni algoritam iz klase evolutivnih strategija (ES). Algoritam ima ugrađeni pod-algoritam za određivanje vektora težina za svaku generisanu (stohastičku) matricu pomoću EVM. Svaka generisana matrica i njen vektor težina testiraju se na zadatu konzistentnost, računa se totalno euklidsko rastojanje generisane matrice A i tekuće X matrice i proverava se kriterijum narušavanja rangova poređenih elemenata. Elitističkom reprodukcijom najbolje matrice kroz generacije matrica, slučajnog uzimanja matrica-jedinki posle mešanja jedinki (kao špila karata) i primene specijalno konstruisanog mutacionog operatora na selektovanoj jedinki, u iterativnom postupku (po pravilima evolutivne optimizacije) identifikuje se matrica dovoljno slična polaznoj matrici, onoj koju je generisao donosilac odluka, a koja je u predloženoj metodologiji nepoznata. Kao tekući kriterijum (fitness funkcija) definisano je apsolutno linearno odstupanje (AO) vektora težina generisanih matrica u populaciji od zadanog.

Napomena: U (Srđević, 2009) korišćen je sličan algoritam koji je nazvan genetičkim (iako to u suštini nije jer ne sadrži rekombinaciju/ukrštanje jedinki već samo mutaciju), a opisan je i primenjen na rešavanje problema inverzne prioritizacije. U ovom

radu algoritam je modifikovan tako da se prostor pretraživanja ograničava samo na matrice zadate konzistentnosti (CR manje ili jednako 0,10), a uz druga poboljšanja doveden je u formu evolutivne strategije (ES).

Korak 2:

Na osnovu zadatog vektora w nepoznata matrica A se reprodukuje putem relacije:

$$a'_{ij} \approx w_i/w. \quad (7)$$

Postupak inverzije je direktan i biće dalje označavan kao DI (direktna inverzija), ali je problem što su a'_{ij} vrednosti po pravilu realni brojevi koji ne pripadaju diskretnim vrednostima iz Satijeve skale [1/9, 1/8, ..., 1/2, 1, 2, ..., 8, 9], odnosno nemaju utemeljenje u semantičkim ocenama međusobne važnosti elemenata koji su poređeni (videti Definicije u Tabeli 1). Takođe, direktna prioritizacija opisana relacijama (1)-(6) sadrži i informaciju o konzistentnosti, dok se za reprodukovanu matricu (7), sa vrednostima generalno nesaglasnim sa diskretnim vrednostima iz Satijeve skale, uporediva konzistentnost CR (Saaty, 1980) može odrediti tek ako se sve vrednosti iz reprodukovane matrice aproksimiraju najbližim korespondentnim vrednostima sa Satijeve skale. Obe operacije (aproksimacija na Satijevu skalu i računanje konzistentnosti) moraju se realizovati da bi rezultati ovog koraka bili uporedivi sa rezultatima iz prvog koraka.

Ideja opisane procedure u dva koraka je da se omogući detaljnija analiza matrica dobijenih inverznom prioritizacijom pomoću evolutivne strategije i direktno, te da se uporede njihove karakteristike u pogledu konzistentnosti, euklidskih rastojanja i kriterijuma narušavanja rangova. Procedura je postavljena za generalni slučaj. U daljim istraživanjima tretiraće se slučajevi nekonzistentnih matrica jer su dosadašnje simulacije pokazale da su često potrebni milioni generisanih slučajnih matrica reda 6x6 i većeg da bi se dobila matrica zadovoljavajuće konzistentnosti. Drugim rečima, očekuje se da će procedura inverzne prioritizacije i analize najbolju performansu imati kod nekonzistentnih matrica iza tolerantne granice CR = 0,10.

PRIMER INVERZNE PRIORITIZACIJE ZA MATRICU 6X6

Za poznatu matricu u Tabeli 2, metodom EVM (relacije 1-6) izračunat je vektor težina dimenzije (6x1), $w = (0,092; 0,115; 0,402; 0,122; 0,112; 0,157)$. Da bi se testirala procedura inverzne prioritizacije na dva načina (evolutivno i direktno), pretpostavka je da je matrica nepoznata, a vektor poznat

Tabela 2. Matrica poređenja i vektor težina
Table 2. Comparison matrix and priority vector

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Vektor težina
C1	1	1/2	1/9	2	1	1/3	0,092
C2		1	1/2	1/2	1	1/2	0,115
C3			1	3	3	3	0,402
C4				1	1	1	0,122
C5					1	1	0,112
C6						1	0,157
CR=0,089; ED=5,57							

Evolutivnom strategijom (ES) u kojoj je generisanje populacija matrica ograničeno samo na prihvatljivo nekonzistentne matrice ($CR \leq 0,10$), identifikovana je matrica sa dovoljno malim AO i sa dozvoljenom nekonzistencijom, Tabela 3.

Tabela 3. Matrica poređenja identifikovana ES i pripadajući vektor težina
Table 3. Comparison matrix identified by ES and corresponding priority vector

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Vektor težina
C1	1	4	1/8	1/2	1	1	0,112
C2		1	1//4	1/2	1/4	1/5	0,047
C3			1	3	3	2	0,402
C4				1	1	1/3	0,118
C5					1	1	0,134
C6						1	0,188
CR=0,083; ED=7,07; AO=0,145; Nađeni vektor u 7013. generaciji							

Direktna inverzija (DI) daje matricu u Tabeli 4, a aproksimiranje na Satijevu skalu daje matricu i korespondentni vektor težina u Tabeli 5.

Tabela 4. Matrica poređenja identifikovana DI**Table 4.** Comparison matrix identified by DI

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
C1	1	0,8	0,23	0,75	0,82	0,59
C2		1	0,29	0,94	1,03	0,73
C3			1	3,29	3,59	2,56
C4				1	1,09	0,77
C5					1	0,71
C6						1

Tabela 5. Matrica poređenja identifikovana DI prema Satijevoj skali i pripadajući vektor težina**Table 5.** Comparison matrix identified by DI according to Saaty's scale and corresponding priority vector

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	Vektor težina
C1	1	1	1/4	1	1	1/2	0,104
C2		1	1/3	1	1	1	0,121
C3			1	3	4	3	0,400
C4				1	1	1	0,121
C5					1	1	0,116
C6						1	0,138
CR=0,009; ED=1,14; AO=0,044							

Početna matrica ima dozvoljenu nekonzistentnost (CR=0,089; Tabela 2). S obzirom da su po oba postupka identifikovane matrice bile u dozvoljenim granicama nekonzistentnosti, na osnovu manje vrednosti AO (AO=0,044 za DI; AO=0,145 za ES) zaključuje se da je postupak DI, prema očekivanju, pronašao matricu koja je sličnija početnoj matrici. Treba napomenuti da je matricu u Tabeli 3 ES algoritam pronašao posle 7013 generacije generisanih i slučajno mutiranih matrica dopuštene nekonzistencije, sa milionima u međuvremenu generisanih matrica nedopuštene nekonzistencije (CR>0,10). Da je identifikacija vršena pomoću ranijeg algoritma iz (Srđević, 2009), zbog relaksiranog tretiranja problema nekonzistentnosti, prema očekivanju, identifikovana matrica imala bi bolju AO vrednost i bila bi dobijena posle mnogo manjeg broja generacija. Međutim, identifikovana matrica bi generalno mogla biti daleko od Pareto granice mogućih 'optimalnih' rešenja zbog čega je pitanje identifikacije usmereno na paralelno procesiranje opisano u ovom radu.

ZAKLJUČAK

Inverzna prioritizacija u AHP ima smisla ako se želi rekonstrukcija ponašanja donosioca odluka u toku vrednovanja (u parovima) elemenata u hijerarhiji elemenata odlučivanja. Na osnovu uvida u dostupnu literaturu, problem nije do sada tretiran, verovatno zato što je neodređen, u smislu da se Pareto granica nedominiranih rešenja teško može utvrditi kroz bilo koji od poznatih metoda prioritizacije (Srdjevic, 2005). Rezultati dosadašnjih istraživanja ovog problema od strane autora ovog rada pokazali su da se za inverznu prioritizaciju mogu paralelno koristiti dva postupka: ES i DI. U radu je na primeru pokazano da DI daje bolje rezultate ako početna matrica, koja se identifikuje, ima dozvoljenu nekonzistentnost ($CR \leq 0,10$). Međutim, ako bi se nekonzistentnost početne matrice povećala, ocenjuje se da postupak DI više ne bi bio u stanju da identifikuje najbolju matricu i da bi se rešenje moralo tražiti preko ES. Ovo je jedan od pravaca daljih istraživanja postupaka određivanja početne (nekonzistentne) matrice na osnovu poznatog vektora prioriteta, kao i prepoznavanja kritičnih poređenja kod kojih je donosilac odluka demonstrirao najveću nekonzistentnost. Predmet istraživanja će biti i drugi metodi prioritizacije i mere nekonzistentnosti.

Zahvalnost: Rad je rezultat istraživanja u okviru projekta 174003 po programu osnovnih istraživanja u oblasti Matematike, kompjuterskih nauka i mehanike 'Teorija i primena Analitičkog hijerarhijskog procesa (AHP) za višekriterijumsko odlučivanje u uslovima rizika i neizvesnosti (individualni i grupni kontekst)' (2011-2014.). Projekat finansira Ministarstvo prosvete i nauke Republike Srbije.

LITERATURA

1. Jandrić Z., Srđević B. (2000): Analitički hijerarhijski proces kao podrška donošenju odluka u vodoprivredi, *Vodoprivreda* 32, str. 327-334.
2. Saaty T.L. (1980): *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York.
3. Srdjevic B. (2005): Combining different prioritization methods in analytic hierarchy process synthesis, *Computers & Operations Research* 32 (7), 1897-1919, Elsevier.
4. Srđević B., Srđević Z. (2009): Inverzna prioritizacija u AHP: Identifikacija matrice poređenja iz zadatog vektora težina primenom genetičkog algoritma, *Letopis naučnih radova* 33 (1), 138-146.

INVERTED PRIORITIZATION IN AHP: EVOLUTION STRATEGY AND DIRECT INVERSION

by

Bojan Srđević, Boško Blagojević, Zorica Srđević

SUMMARY

Important part of the Analytic Hierarchy Process method (AHP) is computing of so called priority vector, i.e. weights of the decision elements involved in pair-wise comparisons and creation of the reciprocal judgment matrix. Standard AHP derives this vector as the principal eigenvector of a matrix, and method used for this is known as Eigenvector Method. However, it is well known that deriving priority vector is underdetermined problem with practically indefinite set of possible solutions (matrices). In fact, the matrix space is enlarging dramatically with raising the number of decision elements and order of the related matrix. This is mainly due to inherent inconsistencies of the decision maker's pair wise comparisons and limitations imposed by using certain ratio scale. In this paper, inversion problem is stated and solved with the use of: 1) Evolution strategy algorithm as an efficient stochastic search engine: for given priority vector identify most probable reciprocal matrix from which the vector could be derived and 2) Direct inversion method. When direct inversion method is used, all values are mapped according to original Saaty's scale. Solving mechanism is based on original Saaty's scale [1/9, 1/8, ..., 1/2, 1, 2, ..., 9] with fitness function defined as closeness of any individual priority vector, derived from generated matrix, to the given priority vector. An example application of proposed approaches is given, followed by brief discussion.

Keywords: AHP, inverted prioritization, evolution strategy, direct inversion

Primljeno: 20.10.2011.

Prihvaćeno: 25.10.2011.