Analiza primene Gausove metode kod rešavanja glavnih geodetskih zadataka na elipsoidu

MIRKO A. BORISOV, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

MILAN S. VRTUNSKI, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

IVAN R. ALARGI, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

MILENKO Z. VLADISAVLJEVIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Stručni rad

UDC:528.232.2:519.218.7

DOI: 10.5937/tehnika1506929B

Rad se bavi problematikom Gausove metode i njene primene kod rešavanja glavnih geodetskih zadataka na zemljinom elipsoidu. Postoji veliki broj metoda za rešavanje glavnih geodetskih zadataka na elipsoidu. One se mogu grupisati u tri kategorije, odnosno metode za: mala rastojanja (do 200 km), srednja rastojanja (od 200 do 1000 km) i velika rastojanja (preko 1000 km). Cilj u ovom radu jeste analiza primene Gausove metode, odnosno poređenje dobijenih vrednosti dužina Gausovim modelom za mala i srednja rastojanja, sa rezultatima koji se dobijaju Beselovom univerzalnom metodom. Iz dobijenih rezultata i vrednosti dužina, mogu se izvesti određene analize i zaključiti, do kojih vrednosti se može praktično primenjivati Gausova metoda. Naime, dobijeni rezultati pokazuju da su Gausova rešenja pogodna i za srednja rastojanja (do 400 km), s tim što se za mala rastojanja, na primer, do 150 km mogu zanemarivati članovi četvrtog reda.

Ključne reči: Gausova metoda, glavni geodetski zadaci na elipsoidu, Beselova metoda

1. UVOD

Glavni geodetski zadaci na elipsoidu se odnose na rešavanje pravog (prvog) i obrnutog (drugog) geodetskog glavnog zadatka. Prvi geodetski glavni zadatak podrazumeva da se na osnovu početne geografske širine i dužine (φ_1 , λ_1) date tačke na elipsoidu, azimuta geodetske linije α_1 u toj tački i dužine geodetske linije s , sračunaju geografske koordinate (φ_2 , λ_2) tražene tačke i obrnuti azimut α_2 u toj tački.

Drugi geodetski glavni zadatak podrazumeva da se na osnovu poznatih geografskih koordinata početne i krajnje tačke sračuna dužina geodetske linije s , pravi α_1 i obrnuti α_2 azimut [1]. Međutim, za rešavanje glavnih geodetskih zadataka na elipsoidu, kod srednjih i velikih rastojanja, pribegava se posrednom rešenju na lopti, a dobijene vrednosti se na kraju svode na elipsoidne [2].

Predmet ovog rada je Gausova metoda i njena moguća primena, tj:

- Gausovo rešenje oba glavna geodetska zadatka za mala i srednja rastojanja; i
- Beselovo rešenje oba glavna geodetska zadatka za sva rastojanja.

Kratkim rastojanjima smatraju se dužine geodetske linije do 200 km, srednjim od 200 do 1.000 km i velikim od 1.000 do 20.000 km [1].

Ove metode se primenjuju u praksi za: rešavanje sfernih trouglova, računanje polarnih koordinata za velika odstojanja, računanje geografskih koordinata u trigonometrijskoj mreži.

Osnovni cilj u radu jeste računanje traženih (nepoznatih) veličina i analiza dobijenih rezultata Gausovom metodom. Naime, drugim glavnim geodetskim zadatkom na elipsoidu računaju se dužine geodetskih linija, pravih i obrnutih azimuta. Dobijeni rezultati se proveravaju korišćenjem prvog glavnog geodetskog zadatka na elipsoidu pomoću Beselove metode. I na kraju, analizom rezultata dolazi se do zaključaka o proširenoj primeni Gausove metode.

Adresa autora: Mirko Borisov, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

Rad primljen: 27.04.2015.

Rad prihvaćen: 18.05.2015.

2. GLAVNI GEODETSKI ZADACI NA ELIPSOIDU

Na obrtnom elipsoidu (slika 1), prikazane su dve tačke P_1 i P_2 . Pritom, ako su poznate geografske koordinate λ_1 i φ_1 tačke P_1 kao i dužina s i azimut α_1 geodetske linije P_1P_2 u tački P_1 , onda su geografske koordinate λ_2 i φ_2 tačke P_2 jednoznačno određene [3]. Takođe, ako su poznate geografske koordinate tačke P_1 i P_2 onda je jednoznačno definisana dužina geodetske linije s i njeni azimuti α_1 i α_2 u tačkama P_1 i P_2 .

Slika 1 - Glavni geodetski zadaci na elipsoidu

Kao prvi geodetski glavni zadatak ili direktni problem, označava se slučaj kada su date geografske koordinate λ_1 i φ_1 tačke P_1 kao i dužina s i azimut α_1 u tački P_1 geodetske linije koja povezuje tačke P_1 i P_2 . Traže se geografske koordinate λ_2 i φ_2 tačke P_2 kao i azimut α_2 geodetske linije P_1P_2 u tački P_2 . Kao drugi geodetski glavni zadatak ili obrnuti problem označava se slučaj kada su date geografske koordinate λ_1 , φ_1 i λ_2 , φ_2 tačke P_1 i P_2 , a traži se dužina s geodetske linije između tih tački kao i azimuti α_1 i α_2 u tačkama P_1 i P_2 [4].

Gore pomenuti glavni geodetski zadaci rešavaju se različitim metodama. Međutim, sva rešenja se mogu podeliti u tri osnovne grupe, i to za [1]:

- Mala rastojanja;
- Srednja rastojanja; i
- Velika rastojanja.

a) Mala rastojanja obuhvataju dužine najviše do 200 km. Ova rešenja se javljaju uglavnom u klasičnoj triangulaciji. Za rešenje oba geodetska zadatka postoji više metoda. Metode poivaju na principu razvijanja jednačina u red, koji ima dobru konvergenciju u ograničenom području primene. Za mala rastojanja najčešće se primenjuju:

- Ležandrova metoda razvijanja u red;
- Šrajberova metoda pomoćne tačke; i
- Gausova metoda srednjega argumenta.

Osim ovih metoda, postoje i drugi postupci i metode. Jedna od njih je Klarkova metoda koja se

prema odredbama ranijih pravilnika za državni premer koristila kod nas za računanje geodetskih koordinata u trigonometrijskoj mreži 1. reda [1].

Slika 2 - Gausovo rešenje

b) Srednja rastojanja obuhvataju dužine do 1.000 km. Ova se rešenja javljaju uglavnom kod trilateracije. Za rešenje zadataka u ovom području postoji više tačnih i približnih metoda. S obzirom, da metode za kratka rastojanja pomoću dodatnih članova mogu znatno proširiti područje primene, a sa druge strane metode za velika rastojanja mogu bez teškoća da se primene i na dužine od 400 do 500 km, onda ne postoje stvarne potrebe za posebna rešenja kod srednjih rastojanja [1].

c) Velika rastojanja se odnose na dužine od 1.000 km do 20.000 km. Za ova rastojanja postoje posebna rešenja za oba geodetska glavna zadatka, i to kako za visoku tako i za približnu tačnost. Rešenja za velika rastojanja baziraju uglavnom na Beselovom principu. Međutim, postoji niz drugih metoda i principa kao što je konformno preslikavanje na loptu. Na Beselovom principu su izgrađena i do detalja u svim pojedinostima razrađena upravo rešenja za oba glavna geodetska zadatka, i to za velika i srednja rastojanja [1].

3. GAUSOVO REŠENJE GLAVNIH GEODETSKIH ZADATAKA NA ELIPSOIDU

Na slici 2, prikazane su dve tačke P_1 i P_2 , čije su širine λ_1 i λ_2 i dužine φ_1 i φ_2 , i koje su međusobno povezane geodetskom linijom dužine s , i u krajnjim tačkama ima azimute α_1 i α_2 . Za pomoćnu tačku P_c može se uzeti sredina geodetske linije, tako da je odstojanje pomoćne tačke od obeju krajnjih tački jednako $s/2$. Širina i dužina ove tačke označava se sa λ_c i φ_c a azimut geodetske linije sa α_c . Polazeći od ove tačke duž geodetske linije levo i desno, moguće je srazložiti razlike širina, dužina i azimuta između pomoćne tačke P_c i krajnjih tački P_1 i P_2 [1].

Osim vrednosti c_1, c_2, c_3 , uvode se srednje vrednosti:

$$\{\xi_m = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}; \eta_m = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}; r_m = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (1)$$

kao i veličina [1]: $V^2 = 1 + y^2$, gde je: $y = e' \cos \xi$

Razlika geografskih širina, geografskih dužina i azimuta, dobija se određenim izvođenjem i transformacijama [1], odnosno:

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \frac{\dots}{M_m} \cdot s \cdot \cos r_m \cdot \left\{ 1 + \frac{s^2}{24N_m^2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\sin^2 r_m (2 + 3y_m^2 + 3\xi_m^2) + 3y_m^2 \cdot \cos^2 r_m \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\lg^2 \xi_m - 1 - y_m^2 - 4y_m^2 \cdot \lg^2 \xi_m \right) \right] \left. \right\} \\ \eta_2 - \eta_1 &= \frac{\dots}{N_m} \cdot s \cdot \frac{\sin r_m}{\cos \xi_m} \cdot \left\{ 1 + \frac{s^2}{24N_m^2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\sin^2 r_m \cdot \lg^2 \xi_m - \cos^2 r_m \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(1 + y_m^2 - 9y_m^2 \cdot \lg^2 \xi_m \right) \right] \left. \right\} \\ r_2 - r_1 &= \frac{\dots}{N_m} \cdot s \cdot \sin r_m \cdot \lg \xi_m \cdot \left\{ 1 + \frac{s^2}{24N_m^2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\cos^2 r_m (2 + 3y_m^2 + 3y_m^2 \cdot \lg^2 \xi_m + 3\xi_m^4) + \right. \\ &\quad \cdot \left. \sin^2 r_m (2 + 2y_m^2 + \lg^2 \xi_m) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Na osnovu datih veličina, u prvom približenju može se napisati [1]:

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= l = \frac{\dots}{N_m} \cdot \frac{1}{\cos \xi_m} \cdot s \cdot \sin r_m \\ r_2 - r_1 &= (\eta_2 - \eta_1) \sin \xi_m \cdot \left\{ 1 + \frac{l^2 \cdot \sin^2 \xi_m}{12 \dots^2} V_m^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{24 \dots^2} \cdot \frac{(1 + y_m^2 - 9y_m^2 \cdot \lg^2 \xi_m)}{V_m^4} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

gde je:

N – poluprečnik po prvom vertikalu

s – dužina geodetske linije

e' – drugi numerički ekscentricitet

odnosno [1]:

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{N_m^2} \cos^2 r_m &= \frac{b^2}{\dots^2 V_m^4} \\ \frac{s^2}{N_m^2} \sin^2 r_m &= \frac{l^3 \cdot \cos^2 \xi_m}{\dots^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Računanja po ovim formulama, kao što se iz samih obrazaca vidi, izvode se putem postupnih približavanja. Obrnuti geodetski zadatak javlja se u praksi

mnogo ređe od direktnog zadatka. On se može rešiti po bilo kojim formulama direktnog zadatka, ali najbolje rešenje se dobija po formulama srednjeg argumenta [1].

4. BESELOVO REŠENJE GLAVNIH GEODETSKIH ZADATAKA NA ELIPSOIDU

Jedna od najboljih metoda koja se praktično može primeniti na bilo koja rastojanja između tačaka je postupak Besela. Ideja Beselovog postupka sastoji se u tome da se elipsoid projektuje na jediničnu sferu, jer je tada integracija mnogo jednostavnija [5]. U tom slučaju:

- Geografskoj širini ξ tačke geodetske linije na elipsoidu, odgovara redukovana širina ξ_r na jediničnoj sferi;
- Geografskoj dužini s tačke geodetske linije na elipsoidu, odgovara ugao σ na jediničnoj sferi; i
- Dužini geodetske linije s na elipsoidu, odgovara dužina s_r na jediničnoj sferi

Između odgovarajućih veličina na elipsoidu i jediničnoj sferi potrebno je uspostaviti veze. Geografska i redukovana širina povezane su relacijom:

$$\lg \xi_r = (1 - f) \lg \xi \quad (5)$$

gde je f spljoštenost elipsoida $f = \frac{a-b}{a}$

Za transformaciju dužine s u s_r i ugla σ u ξ_r , neophodno je odrediti elipsoidne korekcije $\delta \xi$ i $\delta \sigma$, a njihovo računanje ustvari predstavlja suštinu Beselovog postupka.

3.1. Prvi glavni geodetski zadatak na elipsoidu

Kod prvog glavnog geodetskog zadatka dato je: ξ_1, η_1, r_1 i s , a traži se: ξ_2, η_2, r_2 . Praktični algoritam Beselovog postupka, za rešavanje prvog geodetskog glavnog zadatka, odvija se kroz sledeće faze [1]:

Prva faza

Određuju se pomoćne veličine s ciljem da se izračunaju koeficijenti K_1, K_2 i K_3 , odnosno:

$$\begin{aligned} \lg \xi_{r1} &= (1 - f) \lg \xi_1, \quad \lg \xi_{r1} = \frac{\lg \xi_1}{\cos r_1}, \quad \cos \sigma_n = \cos \xi_{r1} \sin r_1, \\ t &= \frac{1}{4} e'^2 \sin^2 \sigma_n, \quad v = \frac{1}{4} f \sin^2 \sigma_n \end{aligned} \quad (6)$$

Nakon toga se računaju koeficijenti:

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 + t \left\{ 1 - \frac{1}{4} t [3 - t(5 - 11t)] \right\}, \\ K_2 &= t \left\{ 1 - t \left[2 - \frac{1}{8} t (37 - 94t) \right] \right\}, \\ K_3 &= v [1 + f + f^2 - v(3 + 7f - 13v)] \end{aligned} \quad (7)$$

Druga faza

Određuje se elipsoidna korekcija ΔS . Njeno računanje se realizuje iterativno, pri čemu se postupak prekida kada razlika izme u poslednje i prethodne iteracije dostigne vrednost manju od granične vrednosti koja se unapred zadaje. Da bi se obezbedila milimetarska tačnost, dovoljno je da se za graničnu vrednost uzme 10^{-12} . Kao početna vrednost elipsoidne korekcije može se uzeti nula, odnosno:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{s}{K_1 b} + \Delta S_1, \Delta S_m = 2\Delta S_1 + \Delta S, \\ \Delta S &= K_2 \sin \Delta S_1 \left\{ \cos \Delta S_m + \frac{1}{4} K_2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\cos \Delta S \cos 2\Delta S_m + \frac{1}{6} K_2 (1 + 2\cos 2\Delta S) \cos 3\Delta S_m \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Treća faza

Računava se geografska širina $\Delta \varphi$ druge tačke:

$$\Delta \varphi_2 = \frac{\sin S_1 \cos \Delta S + \cos S_1 \sin \Delta S \cos \Delta S_1}{\sqrt{1 - \sin^2 S_n \sin^2 (\Delta S_1 + \Delta S)}}, \Delta \varphi_2 = \frac{\Delta \varphi_1}{1 - f} \quad (9)$$

četvrta faza

Određuje se elipsoidna korekcija ΔS , a zatim i geografska dužina $\Delta \lambda$ druge tačke:

$$\begin{aligned} \Delta S &= (1 - K_3) f \cos S_n \left[\Delta S_1 + K_3 \sin \Delta S_1 (\cos \Delta S_m + K_3 \cos \Delta S \cos 2\Delta S_m) \right], \\ \Delta \lambda &= \frac{\sin \Delta S \sin \Delta S_1}{\cos S_1 \cos \Delta S - \sin S_1 \sin \Delta S \cos \Delta S_1}, \Delta \lambda_2 = \Delta \lambda_1 + \Delta S - \Delta S \end{aligned} \quad (10)$$

Peta faza:

Određuje se obrnuti azimut $\Delta \alpha$ po izrazu:

$$\Delta \alpha_2 = \frac{\cos S_1 \sin \Delta S_1}{\cos S_1 \cos \Delta S \cos \Delta S_1 - \sin S_1 \sin \Delta S} \quad (11)$$

3.2 Drugi glavni geodetski zadatak na elipsoidu

Praktični algoritam Beselovog postupka za rešavanje drugog glavnog geodetskog zadatka, takođe, odvija se u nekoliko faza [1]:

Prva faza:

Računaju se redukovane širine $\Delta \varphi_1$ i $\Delta \varphi_2$:

$$\Delta \varphi_1 = (1 - f) \Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2 = (1 - f) \Delta \varphi_2 \quad (12)$$

Druga faza:

Određuje se elipsoidna korekcija ΔS , pomoću veličine i koeficijenta K_3 . Računanje elipsoidne korekcije takođe se mora vršiti iterativno, pri čemu se za početnu vrednost može usvojiti nula, a za graničnu vrednost potrebnu za prestanak iteracija na milimetarskom nivou 10^{-12} .

$$\Delta S = \Delta S_2 - \Delta S_1 + \Delta S$$

$$\Delta S_1 = \frac{\sqrt{(\cos S_2 \sin \Delta S)^2 + (\cos S_1 \sin S_2 - \sin S_1 \cos S_2 \cos \Delta S)^2}}{\sin S_1 \sin S_2 + \cos S_1 \cos S_2 \cos \Delta S}$$

$$\cos S_n = \frac{\cos S_1 \cos S_2 \sin \Delta S}{\sin \Delta S}$$

$$\cos \Delta S_m = \cos \Delta S - \frac{2 \sin S_1 \sin S_2}{\sin S_n}$$

$$t = \frac{1}{4} e^2 \sin^2 S_n$$

$$v = \frac{1}{4} f \sin^2 S_n$$

$$K_3 = v [1 + f + f^2 - v(3 + 7f - 13v)]$$

$$\Delta S = (1 - K_3) f \cos S_n$$

$$\left[\Delta S + K_3 \sin \Delta S (\cos \Delta S_m + K_3 \cos \Delta S \cos 2\Delta S_m) \right] \quad (13)$$

Treća faza

Računava se dužina geodetske linije s , pomoću koeficijenata K_1 i K_2 i elipsoidne korekcije ΔS :

$$K_1 = 1 + t \left\{ 1 - \frac{1}{4} t [3 - t(5 - 11t)] \right\}$$

$$K_2 = t \left\{ 1 - t \left[2 - \frac{1}{8} t (37 - 94t) \right] \right\}$$

$$\Delta S = K_2 \sin \Delta S_1 \left\{ \cos \Delta S_m + \frac{1}{4} K_2 \cdot \right.$$

$$\left. \left[\cos \Delta S \cos 2\Delta S_m + \frac{1}{6} K_2 (1 + 2\cos 2\Delta S) \cos 3\Delta S_m \right] \right\}$$

$$s = K_1 b (\Delta S - \Delta S_1) \quad (14)$$

četvrta faza

Računaju se pravi i obrnuti azimut $\Delta \alpha_1$ i $\Delta \alpha_2$ geodetske linije po izrazima:

$$\Delta \alpha_1 = \frac{\cos S_2 \sin \Delta S}{\cos S_1 \sin S_2 - \sin S_1 \cos S_2 \cos \Delta S}$$

$$\Delta \alpha_2 = \frac{\cos S_1 \sin \Delta S}{\cos S_1 \sin S_2 \cos \Delta S - \sin S_1 \cos S_2} \quad (15)$$

4. ANALIZA REZULTATA I DISKUSIJA

Praktični deo rada obuhvata rešavanje drugog geodetskog glavnog zadatka na elipsoidu tj. računanje dužine geodetskih linija, pravih i obrnutih azimuta korišćenjem:

- Gausove metode za mala rastojanja;

- Gausove metode za srednja rastojanja; i
- Beselove metode za sva rastojanja.

Dobijeni rezultati se proveravaju korišćenjem prvog geodetskog glavnog zadatka na elipsoidu pomoću istih metoda, i nakon toga se upoređuju međusobno. Pritom, uzeti su parovi tačaka na proizvoljnim mestima, pri čemu su dužine geodetskih linija između tih tačaka različitih kategorija rastojanja (mala rastojanja - do 200 km, srednja rastojanja - od 200 km do 1.000 km, i velika rastojanja - od 1.000 km do 20.000 km). Za svaku od kategorija, uzeta su po tri para tačaka. Parove tačaka predstavljaju određene lokacije – gradove u Srbiji i na širem geografskom području (Evropa, Azija). Računanja su obavljena u programskom paketu MATLAB [6] verzija 7.12.0 (R2011a). Zadaci su rešavani na elipsoidu *Bessel* iz 1841. godine.

4.1. Mala rastojanja

U tabeli 1, date su geografske koordinate određenih gradova, odnosno njihove geografske širine i

dužine. Sve tačke imaju severne geografske širine i istočne geografske dužine.

Tabela 1. Izabrani gradovi za mala rastojanja

Geografske koordinate gradova		
Grad		
Novi Sad	45° 15' 18,25"	19° 50' 41,64"
Subotica	46° 06' 00,41"	19° 39' 49,97"
Sr. Mitrovica	45° 00' 09,79"	19° 34' 19,59"
Šabac	44° 45' 13,71"	19° 41' 59,06"
Kragujevac	44° 00' 44,16"	20° 55' 34,09"

Drugi geodetski glavni zadatak je realizovan primenom Gausove metode koja obuhvata samo članove prvog i drugog reda, i Beselove metode koja se može primeniti za sva rastojanja. Rešavanjem drugog geodetskog glavnog zadatka dobijena je dužina geodetske linije s i pravi azimut α_1 koji su potrebni za rešavanje prvog geodetskog glavnog zadatka. Rezultati su prikazani u tabeli 2, i tabeli 3.

Tabela 2. Konačno rešenje drugog geodetskog glavnog zadatka za mala rastojanja

Beselova metoda				
Tačka 1	Tačka 2	$s[m]$	α_1	α_2
Novi Sad	Subotica	94964,82087	351° 31' 29,6982"	351° 23' 43,4678"
Sr. Mitrovica	Novi Sad	35309,63274	37° 19' 37,8514"	37° 31' 13,8283"
Šabac	Kragujevac	127813,60093	129° 42' 20,6285"	130° 33' 48,8544"
Gausova metoda				
Tačka 1	Tačka 2	$s[m]$	r_1	r_2
Novi Sad	Subotica	94965,01605	351° 31' 29,7487"	351° 23' 43,5183"
Sr. Mitrovica	Novi Sad	35309,75051	37° 19' 37,4746"	37° 31' 13,4516"
Šabac	Kragujevac	127813,60085	129° 42' 20,6282"	130° 33' 48,8541"

Tabela 3. Konačno rešenje prvog geodetskog glavnog zadatka za mala rastojanja

Beselova metoda		
Tačka 2		Obrnuti azimut
$\{ \alpha_2$	$\} \alpha_2$	Γ_2
46° 06' 00,41"	19° 39' 49,97"	351° 23' 43,4678"
45° 15' 18,25"	19° 50' 41,64"	37° 31' 13,8283"
44° 00' 44,16"	20° 55' 34,09"	130° 33' 48,8544"
Gausova metoda		
Tačka 2		Obrnuti azimut
$\{ \alpha_2$	$\} \alpha_2$	Γ_2
46° 06' 00,4131"	19° 39' 49,9542"	351° 23' 43,5199"
45° 15' 18,2521"	19° 50' 41,6748"	37° 31' 13,4739"
44° 00' 44,1727"	20° 55' 34,0695"	130° 33' 48,8398"

Beselova metoda daje najbolje rezultate za velika rastojanja, ali se može primeniti i na srednja i mala rastojanja sa zadovoljavajućom tačnošću. Gausova

metoda srednjeg argumenta koja obuhvata članove prvog i drugog reda daje tačnije rezultate od Beselove na malim rastojanjima do 150 km. Pritom, kako se

rastojanje poveća tako Gausova metoda daje rezultate sa manjom tačnošću. [1]

Rešavanje oba geodetska zadatka Beselovom metodom se odvija iterativno dok se ne postigne unapred zadata tačnost. Imaju i to u vidu, u prvom glavnom geodetskom zadatku na osnovu dobijenih podataka iz drugog glavnog geodetskog zadatka, dobijaju geografske koordinate sa maksimalnom razlikom od 0,00001".

Rešenje drugog glavnog geodetskog zadatka Gausovom metodom predstavlja direktno rešenje, a rešavanje prvog glavnog geodetskog zadatka se obavlja postupnim približavanjem (iterativno dok se ne postigne unapred zadata tačnost).

Zbog toga se u prvom glavnom geodetskom zadatku na osnovu dobijenih podataka iz drugog glavnog geodetskog zadatka dobijaju geografske koordinate sa većim razlikama nego u slučaju Beselove metode (0,00001").

U tabeli 4, prikazana je razlika rezultata dobijenih rešavanjem drugog glavnog geodetskog zadatka Beselovom metodom i Gausovom metodom za mala rastojanja. Iz dobijenih rezultata može se uočiti da najveća razlika u dužini geodetske linije iznosi 0,19518 m, a najveća razlika pravog azimuta 0,37688". Takođe, najveća razlika obrnutog azimuta iznosi 0,3767".

Tabela 4. Drugi glavni geodetski zadatak

Razlika rezultata Beselove i Gausove metode		
s[m]	$r_1["]$	$r_2["]$
-0,19518	-0,0505	-0,0505
-0,11778	0,37688	0,3767
0,00008	0,0003	0,0003

Tabela 7. Konačno rešenje drugog geodetskog glavnog zadatka za srednja rastojanja

Beselova metoda				
Tačka 1	Tačka 2	s[m]	r_1	r_2
Novi Sad	Be	422092,84958	322° 18' 27.3185"	139° 46' 40.6129"
Minhen	Frankfurt	304590,67528	317° 10' 58.3256"	134° 59' 37.1987"
London	Pariz	335517,72653	150° 45' 58.6015"	332° 28' 54.5639"
Gausova metoda				
Tačka 1	Tačka 2	s[m]	r_1	r_2
Novi Sad	Be	422092,83030	322° 18' 27.3104"	139° 46' 40.6058"
Minhen	Frankfurt	304590,66934	317° 10' 58.3216"	134° 59' 37.1949"
London	Pariz	335517,72290	150° 45' 58.6006"	332° 28' 54.5627"

U tabeli 5, prikazana je razlika rezultata dobijenih rešavanjem prvog glavnog geodetskog zadatka Beselovom metodom i Gausovom metodom za mala rastojanja.

Tabela 5. Prvi glavni geodetski zadatak

Razlika rezultata Beselove i Gausove metode		
Tačka 2	Obrnuti azimut	
$\alpha_2["]$	$\beta_2["]$	$r_2["]$
-0,0031	0,0158	0,0521
-0,0021	-0,0348	0,3544
-0,01267	0,0205	0,0146

4.2 Srednja rastojanja

U tabeli 6, date su geografske koordinate izabranih gradova, odnosno njihove geografske širine i dužine. Sve tačke se nalaze isto no od po etnog (grini) kog meridijana i severno od ekvatora.

Tabela 6. Izabrani gradovi za srednja rastojanja

Geografske koordinate gradova		
Grad		
Novi Sad	45° 15' 18,25"	19° 50' 41,64"
Be	48° 12' 32,87"	16° 22' 21,09"
Minhen	48° 08' 12,81"	11° 34' 34,23"
Frankfurt	50° 06' 38,63"	8° 40' 53,69"
London	51° 30' 40,57"	0° 07' 09,77"
Pariz	48° 51' 23,73"	2° 21' 7,72"

Drugi geodetski glavni zadatak je rešen primenom Gausove metode za srednja rastojanja (sa stranovima viših redova) i Beselove metode koja se može primeniti za sva rastojanja. Rešavanjem drugog geodetskog glavnog zadatka dobijena je dužina geodetske linije s i pravi azimut α_1 koji su potrebni za rešavanje prvog geodetskog glavnog zadatka (tabela 7, i tabela 8).

Tabela 8. Kona no rešenje prvog geodetskog glavnog zadatka za srednja rastojanja

Beselova metoda		
Ta ka 2		Obrnuti azimut
$\{_2$	$\}_2$	r_2
48° 12' 32,87"	16° 22' 21,09"	139° 46' 40.6129"
50° 06' 38,63"	8° 40' 53,69"	134° 59' 37.1987"
48° 51' 23,73"	2° 21' 07,72"	332° 28' 54.5639"
Gausova metoda		
Ta ka 2		Obrnuti azimut
$\{_2$	$\}_2$	r_2
48° 12' 32.8480"	16° 22' 21.1170"	139° 46' 40.6254"
50° 06' 38.6143"	8° 40' 53.7141"	134° 59' 37.2132"
48° 51' 23.7302"	2° 21' 07.7198"	332° 28' 54.5627"

Gausova metoda za srednja rastojanja je ista kao i Gausova metoda za mala rastojanja, samo što se dodaju lanovi etvrtog reda. Dodavanjem lanova etvrtog reda znatno se poveća rastojanje na koje može da se primeni ova metoda. To rastojanje može da iznosi i do 400 km. Međutim, kako se rastojanje povećava, tako Gausova metoda daje sve slabije rezultate.

Takođe, rešenje drugog glavnog geodetskog zadatka Gausovom metodom za srednja rastojanja predstavlja direktno rešenje, a rešavanje prvog glavnog geodetskog zadatka se vrši postupnim približavanjem (iterativno dok se ne postigne unapred zadatost). Zbog toga se u prvom glavnom geodetskom zadatku na osnovu dobijenih podataka iz drugog glavnog geodetskog zadatka, dobijaju geografske koordinate sa većim razlikama nego u slučaju Beselove metode (0,00001").

Iz priloženih rezultata se može zapaziti da najveća razlika u dužini geodetske linije iznosi 0,01927 m, a najveća razlika pravog azimuta 0,0081". Takođe, najveća razlika obrnutog azimuta iznosi 0,0038". Iz dobijenih rezultata može se zaključiti da za mala i za srednja rastojanja, Beselova metoda daje kvalitetnije rezultate tj. preciznije vrednosti kako se rastojanje povećava.

U tabeli 9 prikazana je razlika rezultata dobijenih rešavanjem drugog glavnog geodetskog zadatka Beselovom metodom i Gausovom metodom za srednja rastojanja.

Tabela 9. Drugi glavni geodetski zadatak

Razlika rezultata Beselove i Gausove metode		
s[m]	r_1 ["]	r_2 ["]
0,01927	0,0081	0,0071
0,00594	0,004	0,0038
0,00363	-0,0009	0,0012

U tabeli 10, prikazana je razlika rezultata dobijenih rešavanjem prvog glavnog geodetskog zadatka Beselovom metodom i Gausovom metodom za srednja rastojanja.

Tabela 10. Prvi glavni geodetski zadatak

Razlika rezultata Beselove i Gausove metode		
Ta ka 2		Obrnuti azimut
$\{_2$ ["]	$\}_2$ ["]	r_2 ["]
0,022	-0,027	-0,0125
0,0157	-0,0241	-0,0136
-0,0002	0,0002	0,0012

5. ZAKLJUČAK

U teorijskom delu rada objašnjeni su pojmovi i rešenja glavnih geodetskih zadataka na zemljinom elipsoidu koji su korišćeni u praktičnom delu rada. Razmatrana su teorijska rešenja i algoritmi. Takođe, opisane su faze i postupci teorijskih rešenja glavnih geodetskih zadataka.

U praktičnom delu rada urađeni su proračuni u okviru programskog paketa MATLAB 7.12.0 (R2011a). Za referentni elipsoid je uzet elipsoid *Bessel* 1841, a kao ulazni podaci korišćene su geografske koordinate izabranih tačaka na datom elipsoidu. Iz diskusije dobijenih rezultata može se zaključiti koje su metode najpogodnije za određene dužine, pri čemu se granične vrednosti rastojanja ne poklapaju sa vrednostima predloženim u literaturi – do 200 km mala, 200 do 1.000 km srednja ili preko 1.000 km velika rastojanja.

Gausova metoda je pogodna za rastojanja i do 400 km, s tim što se za rastojanja do 150 km mogu zanemariti lanovi etvrtog reda [1]. Naime, određene vrednosti rastojanja se ne poklapaju sa teorijskim reše-

njima datim u literaturi [1], ali dobijeni rezultati pokazuju da je Gausova metoda pogodna i za veća rastojanja.

LITERATURA

- [1] Živković, A, Viša geodezija, knjiga, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1972.
- [2] Helmert, F. R, The mathematical and physical theories of higher geodesy, Leipzig, 1884.
- [3] Vaniček, P, Krakiwsky, E, Geodezija - koncepti, knjiga, Univerzitet New Brunswick, Kanada, 2005.
- [4] Vincenty, T, Geodetic inverse solution between antipodal points, Wyoming
- [5] Emanuel M. Soldano and Thelma A. Robinson: Direct and inverse solutions of geodesics, Washington D.C., 1963.
- [6] MATLAB 7.12.0 (R2011a) – Help
- [7] Borisov, M, Božić, B, Drobnjak, S, Matematički modeli loksodrome i njihova primena, pregledni naučni rad, Tehnika, br. 4, Beograd, 2011.
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_on_an_ellipsoid preuzeto 22.09.2014.
- [9] <http://geographiclib.sourceforge.net/geodesic-papers/> preuzeto 15.01.2015.
- [10] <http://surveying.wb.psu.edu/ur351/c6/inverse.htm> preuzeto 16.02.2015.

SUMMARY

ANALYSIS OF APPLICATION GAUSSIAN METHOD AT SOLVING THE MAIN GEODETIC PROBLEMS ON THE ELLIPSOID

The paper considers the Gaussian method and its application in solving the main geodetic problems on the Earth's ellipsoid. There are a lot of methods for solving the main geodetic tasks on the ellipsoid. They can be grouped into three categories, ie methods: small distances (up to 200 km), medium range (from 200 to 1000 km) and long distances (over 1.000 km). The aim of this paper is to analyze the application of the Gaussian method, ie comparison of obtained values for length Gaussian model for small and medium distances, with results that were obtained Bessel's universal method. From the results obtained and the values for length, can perform certain analyzes and conclusions to which values can be practically applied Gaussian method. Specifically, the results show that the Gaussian solutions suitable for medium distances (up to 400 km), except that for short distances, for example to 150 km, to be ignored members of the fourth order.

Key words: Gaussian method, the main geodetic problems on the ellipsoid, Bessel's method