

## Modelovanje razlike referentnih površi tijela Zemlje za rješavanje problema vertikalnog pozicioniranja

SANJA S. TUCIKEŠI, Univerzitet u Banjoj Luci,

Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet,  
Banja Luka, Bosna i Hercegovina

GORDANA L. JAKOVLJEVIĆ, Univerzitet u Banjoj Luci,  
Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet,  
Banja Luka, Bosna i Hercegovina

JELENA P. GUČEVIĆ, Univerzitet u Beogradu,  
Građevinski fakultet, Beograd

Stručni rad

UDC: 007:528.28]:004

DOI: 10.5937/tehnika1601035T

*Suština rada usmjerena je na modelovanje razlike referentnih površi tijela Zemlje za rješavanje problema vertikalnog pozicioniranja. Pojavom GNSS-tehnologije određivanje undulacije geoida dobija naučni i praktični značaj naročito kod vertikalnog pozicioniranja u cilju zamjene tradicionalnog geometrijskog nivelmana. U ovom radu izvršeno je modelovanje korektivne površi na osnovu GNSS mjerenja kroz praktičan primjer Prostorne lokalne referentne mreže (PLRM) Mrkonjić Grad gdje su mjerenja izvršena GNSS opažanjima. Modelovanje je izvršeno jednodimenzionalnom transformacijom slika nosi te su dobijene vrijednosti prosječnih razlika između ortometrijskih visina određeni GNSS mjerenjem i transformisanih visina.*

**Ključne riječi:** modelovanje, referentne površi, vertikalno pozicioniranje, GNSS

### 1. UVOD

Razvoj geodezije kao naučne discipline vezuje se za ljudske potrebe i saznanja o geometrijskom obliku i fizičkim svojstvima Zemlje. Zemlja predstavlja tijelo nepravilnog oblika, koje ima određene fizičke osobine i djeluje na sav okolni prostor silom Zemljine težine, u okviru svog gravitacionog polja. Od strane Gaussa 1827. godine predloženo je da se za oblik Zemlje usvoji nivoska površina je osnovna osobina da je u svim tačkama upravna na vektor sile težine i da se poklapa sa srednjim nivoom površi mora i okeana. Površina sa navedenim svojstvima njena fizička karakteristika u Listing 1872. godine naziva GEOID. Površina geoida je nepravilna i mijenja svoje geometrijske i fizičke karakteristike u svakoj svojoj tački usljed čega se može opisati samo beskonačnim funkcionalnim redovima te iz praktičnih razloga nije pogodan za geodetska radovanja. Za uspostavljanje geometrijskog i donekle fizičkog odnosa iz-

među tačkama na fizičkoj površi Zemlje koristi se referentno tijelo nivoskog elipsoida (globalni geocentrični elipsoid). Savremena geodetska i geofizička nauka na istraživanja usmjerena su ka određivanju fizičkih i geometrijskih karakteristika površi geoida i površi globalnog geocentričnog elipsoida.

Geometrijske karakteristike se proučavaju i interpretiraju u okviru matematičkih nauka. Geometrija (geometrija Zemlje, metrijsko-mjerenje) je grana matematike koja proučava oblike, njihova svojstva i odnose. Početci geometrije vezani su za praktične potrebe, među kojima su i mjerenja površine zemljišta. Predmet geometrije u novije vrijeme postaje sve širi i apstraktniji. Tačka, prava i ravan su osnovni pojmovi geometrije koji se ne definišu (njihove osobine daju su aksiomatički), a koriste se pri definisanju ostalih geometrijskih pojmova. Skup svih tačkama trodimenzionalni prostor. Tačka predstavlja osnovni geometrijski pojam na kom je geometrija zasnovana. U modernoj matematici, tačka se obično odnosi na element nekih skupova, koji se naziva prostor. Položaj tačke u prostoru određen je jednoznačno njenim koordinatama. Tačka je jedan od najtemeljnijih objekata. Prava je neograničena prava linija, koja je određena sa dvije tačke, a njen položaj u koordinatnom sistemu određen je sa

Adresa autora: Sanja Tucikešić, Univerzitet u Banjoj Luci, Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet, Banja Luka, Vojvode Stepe Stepanovića 77, Bosna i Hercegovina

Rad primljen: 24.11.2015.

Rad prihvaćen: 02.12.2015.

koeficijentom pravca  $k$  (nagib prave) i odsje kom na  $y$ -osi  $n$ . Ravan označava ravnu dvodimenzionalnu površinu (ima dužinu, širinu ali nema visinu) koja se u svakom smjeru širi do beskonačnosti. Pojam „ravan“, označava da kroz svaku tačku ravni može biti povučeno beskonačno različitih pravih koje ona u potpunosti sadrži. Ravan je potpuno određena sa tri nekolinearne tačke, sa dvije prave koje se sijeku, sa pravom i tačkom van te prave itd.

## 2. REFERENTNE POVRŠI TIJELA ZEMLJE

Jedan od značajnijih zadataka geodezije je određivanje odnosa između referentnih površi tijela Zemlje. Geoid se definiše kao ekvipotencijalna površ sile Zemljine težnje koja najbolje aproksimira površ svjetskih mora i okeana, međutim, geoid i kao takav predstavlja komplikovanu površ, nepravilnog oblika koja se može opisati samo beskonačnim funkcionalnim redovima. Iz praktičnih razloga potrebno je koristiti površ što bližu geoidu koja je u isto vrijeme jednostavna za matematičko definisanje – elipsoid. Elipsoid je matematička površ dobijena rotacijom elipse oko svoje male poluose, i nema fizičko značenje. Dimenzija i orijentacija elipse biraju se tako da elipsoid najbolje odgovara geoidu u određenom području, ili preko cijele Zemlje. Normala na elipsoid prolazi kroz tačku  $P$  na fizičkoj površi Zemlje i probada elipsoid u tačku  $Q$ . Odsjek normale, između tačke  $P$  i  $Q$ , predstavlja elipsoidnu visinu. Ortometrijska visina definiše se kao rastojanje od geoida do tačke na fizičkoj površi Zemlje, računato po vertikali. Elipsoid je referentna površ za elipsoidne visine, a geoid za ortometrijske visine. Undulacija geoida  $N$  je rastojanje između elipsoida i geoida duž elipsoidne normale. Undulacija geoida i elipsoidna visina zavise od odabranog referentnog elipsoida. Iz razlika elipsoidnih visina i undulacija geoida dobivaju se fizikalne visine tj. prave ortometrijske visine. Zahvaljujući i GNSS razvijeni su napredni geoidni modeli za transformaciju visina između elipsoidnih koordinatnih referentnih okvira i sistema ortometrijskih visina koje se odnose na srednje plohe vodenih površina. Kao što je rečeno osnovna veza između elipsoidnih visina određenim upotrebom GNSS i ortometrijskih visina određenih metodom geometrijskog nivelmana (Slika 1.) data je sa:

$$H_{ORTOM} = h_{GNSS} - N \quad (1)$$

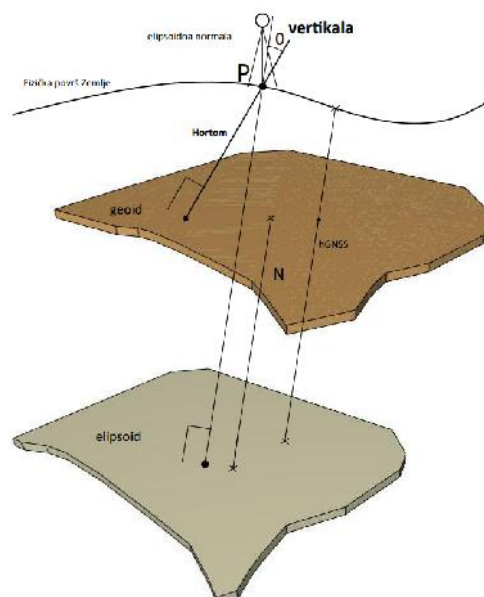
gdje su:  $h_{GNSS}$  - elipsoidna visina tačke,  $H_{ortom}$  - ortometrijska visina tačke i  $N$  - undulacija geoida (geoidna visina).

Određivanje ortometrijskih visina klasičnim geodetskim metodama, pogotovo na strmim terenima, predstavlja težak i dugotrajan proces. Kombinacijom mjerenja, GNSS i undulacije geoida, nudi se opravdana

alternativa klasičnom geometrijskom nivelmanskom mjerenju. Globalni navigacioni satelitski sistemi (GNSS) predstavljaju 3D metodu pozicioniranja kojom se određuje koordinate tačke u Globalnom geocentričnom sistemu WGS84 (World Geodetic System 1984). Koordinate tačke u sistemu WGS84 definišu se pomoću Geodetskih koordinata (latituda–geodetska širina  $\phi$ , longituda–geodetska dužina  $\lambda$  i elipsoidna visina  $h$ ) i geocentričnim koordinatama  $(X, Y, Z)$ . Geocentrični koordinatni sistem koristi rastojanja po  $X, Y$ , i  $Z$  osama od centra sferoida. Visine tačke na površini zemlje određene primjenom GNSS su elipsoidne visine, one se odnose na referentni elipsoid i nemaju fizičko značenje, jer GNSS koristi primarni metod za definisanje lokacije tačke u prostoru.

U inženjersko-tehničkim radovima koriste se visine koje imaju fizičku interpretaciju pa je zato potrebno izvršiti transformaciju elipsoidnih visina u ortometrijske. Izraz za transformaciju je naizgled jednostavan (1), ali problem predstavlja nepoznavanje komponente  $N$ , tj. undulacije geoida. Proces određivanja površi geoida se planira na nivou države i uključuje veliki broj podataka, prije svega: digitalni model visina, digitalni model gustina, gravimetrijski premjer i još mnoga podataka ne samo na nivou države već i šire. Za praktičnu primjenu na ograničenom području od nekoliko kvadratnih kilometara mogu se primijeniti modeli interpolacije i na taj način predstaviti odnos između referentnih površi.

U malim područjima, koje obuhvata GNSS mreža, odnos geoida i elipsoida se može aproksimirati sa korektivnom površ koja apsorbira sve greške modela između ortometrijskih, elipsoidnih i geoidnih visina [1].



Slika 1 - Odnos fizičke površi Zemlje, geoida i elipsoida

Nedosljednost datuma može se opisati preko:

$$h_{GNSS} - H_{ORTOM} - N = A^T \cdot x + \epsilon \quad (2)$$

gdje je:  $A^T$  - matrica dizajna,  $x$  - vektor nepoznatih parametara i  $\epsilon$  - vektor reziduala.  $A^T \cdot x$  opisuje korektivnu površ tj. sve moguće sistematske efekte i nedosljednosti u datumu i podacima.

### 3. MODELOVANJE KOREKTIVNE POVRŠI

Modelovanje korektivne površi omogućuje GNSS korisnicima transformisanje elipsoidnih visina, određenih GNSS, u ortometrijske visine koje se odnose na lokalni vertikalni datum. Tako se modelovanjem se eliminišu sistematske greške i nedosljednost u datumu različitih sistema visina [3]. Za ovaj tip modelovanja koristi se: polinomska interpolacija, metoda konačnih elemenata, polinomi visokog stepena sa različitim baznim funkcijama, jednodimenzionalna transformacija sličnosti.

#### 3.1. Polinomska regresija

Polinomska regresija je najčešća metoda za modelovanje. Ukoliko pretpostavimo da postoji  $n$  datih tačaka, koje su elipsoidne i ortometrijske visine poznate, na definisanom području, opšta jednačina polinomske interpolacije za modelovanje korektivne površi data je sa [4]:

$$N = N(y, x) \quad (3)$$

gdje su:  $y, x$  - koordinate tačaka mreže u Gaus-Krigerovoj projekciji.

Na osnovu datih tačaka, polinomskom interpolacijom, modeluje se ravan koja najbolje aproksimira odabrani polinom. Korištenjem jednačine (3) određuju se nepoznati parametri modela primjenom metode najmanjih kvadrata. Tip korektivne površi može biti definisan kao [9]:

- Ravan (polinom prvog stepena)

$$N_0 = a_0 + a_1Y + a_2X \quad (4)$$

- Bilinearno sedlo (polinom prvog stepena)

$$N_0 = a_0 + a_1Y + a_2X + a_3YX \quad (5)$$

- Površ drugog reda (polinom drugog stepena)

$$N_0 = a_0 + a_1Y + a_2X + a_3Y^2 + a_4X^2 \quad (6)$$

- Površ trećeg reda (polinom trećeg stepena)

$$N_0 = a_0 + a_1Y + a_2X + a_3Y^2 + a_4X^2 + a_5Y^3 + a_6X^3 + a_7Y^3 + a_8Y^2X + a_9YX^2 \quad (7)$$

Pri modelovanju korektivne površi izbor stepena polinoma je veoma značajan jer on definiše tačnost

aproksimacije. Stepennost polinoma zavisi od broja datih tačaka i stepeni slobode.

Najčešće se primjenjuje četvoroparametarski model koji ima oblik:

$$A_i^T \cdot x = x_0 + x_1 \cdot \cos\{\alpha_i \cdot \cos\beta_i\} + x_2 \cdot \cos\{\alpha_i \cdot \sin\beta_i\} + x_3 \cdot \sin\{\alpha_i\} \quad (8)$$

Jednačina (8) odgovara datumskom transformacionom modelu za undulaciju geoida  $N$  [8]

$$\Delta N_i = \Delta a + \Delta X_0 \cdot \cos\{\alpha_i \cdot \cos\beta_i\} + \Delta Y_0 \cdot \Delta X_0 \cdot \cos\{\alpha_i \cdot \sin\beta_i\} + \Delta Z_0 \cdot \sin\{\alpha_i\} + a \cdot \Delta f \cdot \sin^2 \quad (9)$$

gdje su:  $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$  - parametri translacije između dva „paralelna“ datuma;  $\Delta a, \Delta f$  - promjene u spljoštenosti i velike poluose odgovarajuće elipsoida.

#### 3.2. Jednodimenzionalna transformacija sličnosti

Kao što je već rečeno geoid ima nepravilan oblik i ne odgovara ni jednom elipsoidu. Gustina zemlje utiče na oblik geoida izazivajući i izdizanje u gušćim regionima odnosno ulegnuću u rjeđim dijelovima. Međutim, na malim područjima geoid se mijenja veoma malo (nekoliko centimetara po kilometru) pa se može smatrati konstantnim [6]. Površ geoida za posmatrano područje se predstavlja sa jednačinom ravni. To znači, da se u odnosu na date tačke težište ravan, takva da je zbir kvadrata odstupanja visina tačaka od nje minimalan. Tačnost ovako određene geoida zavisi od pouzdanosti elipsoidnih odnosno ortometrijskih visina i njihovih razlika. Dakle, geoid se na području GNSS mreže može posmatrati kao funkcija dvije promjenjive, izraz (3). Funkcija  $N(y, x)$  predstavlja interpolacijsku površ koja je određena brojem tačaka koje su elipsoidne i ortometrijske visine poznate. Površ može biti i ravan pa se lokalni geoid na području GNSS mreže može definisati pomoću polinoma prvog stepena [10]:

$$N = t_h + \alpha \cdot Y_i + \beta \cdot X_i \quad (10)$$

gdje je:  $N$  - geoidna visina (undulacija geoida);  $Y_i, X_i$  - Gaus-Krigerove (DKS) koordinate težišta GNSS mreže,  $t_h, \alpha, \beta$  - transformacioni parametri. Odrediti površ lokalnog geoida (korektivnu površ) znači odrediti transformacione parametre. Transformacioni parametri su: jedna translacija i dvije rotacije. Parametar translacije definiše paralelno rastojanje elipsoida od geoida, dok parametri rotacije definišu nagib tangencijalne ravni elipsoida na odgovarajuću površ geoida. Na osnovu transformacionih parametara, za

ta ke ije su elipsoidne visine poznate, možemo odrediti ortometrijske visine. Transformacioni parametri se odre uju na osnovu datih ta aka. Ta ke u GNSS mreži za koje su poznate elipsoidne i ortometrijske visine nazivamo datim ta kama. Kao što je navedeno ravan je definisana sa minimalno tri nekolinearne ta ke, pa je za odre ivanje transformacionih parametara potrebno najmanje tri date ta ke. Za svaku datu ta ku formira se jedna jedna ina popravaka a transformacioni parametri se odre uju primjenom metode najmanjih kvadrata.

Na osnovu jedna ina (1) i (10) jedna ina veze ima oblik:

$$H = h + t_h + \kappa \cdot Y_i - \gamma \cdot X_i \quad (11)$$

a na osnovu jedna ine (2) i (11) jedna ina popravaka je:

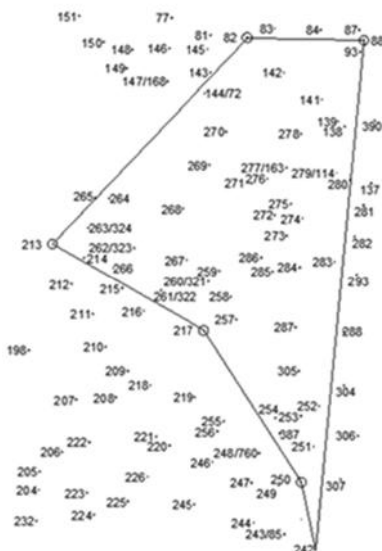
$$\begin{aligned} \epsilon_H &= t_h + Y \cdot \kappa - X \cdot \gamma + f_H, \\ f_H &= h_{GNSS} - H_{ORTOM} \end{aligned} \quad (12)$$

Ocjena nepoznatih parametara je:

$$\hat{x}_i = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot f) \quad (13)$$

#### 4. NUMERIKAI STRAŽIVANJE

U sklopu realizacije projekta: Prostorna lokalna referentna mreža (PLRM) Mrkonji Grad izvršena su GNSS opažanja na ta kama poligonske mreže.



Slika 2 - Ta ke mreže koriš ene za definisanje površi lokalnog geoida

Za ovaj test primjer iskorištene su koordinate 98 ta ka poligonskih ta aka. Na podru ju date GNSS mreže

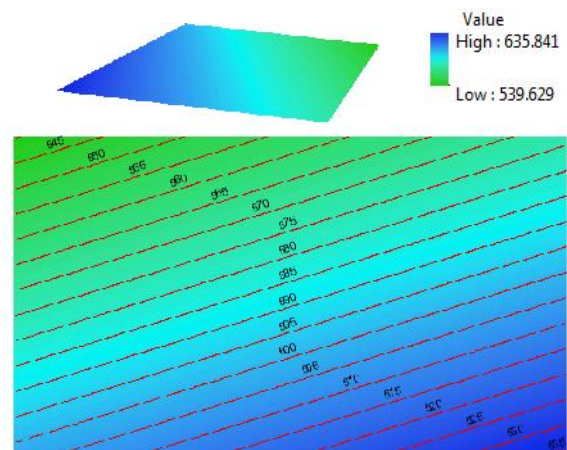
nalazi se 6 datih ta aka ije su elipsoidne i ortometrijske visine poznate. Prvi transformacioni parametri su odre eni na osnovu kombinacije 6 poznatih ta aka 82, 88, 213, 217, 250 i 242, (slika 2).

Drugi transformacioni parametri su odre eni na osnovu kombinacije 4 poznate ta ke 213, 217, 242 i 250, i tre i transformacioni parametri su odre eni sa osnovu kombinacije 4 poznate ta ke 242, 250, 82 i 88.

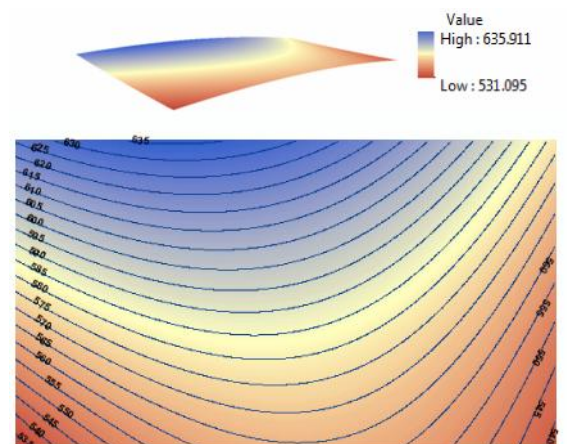
Dalje se pristupilo transformaciji elipsoidnih u ortometrijske visine na 98 ta ka mreže dobijenim transformacionim parametrima. Razlike izme u datih i transformisanih visina kod prve, druge i tre e transformacije date su u tabeli 3.

Tabela 1. Razlike izmedju datih i transformisanih visina primjenom prve, druge i tre e transformacije

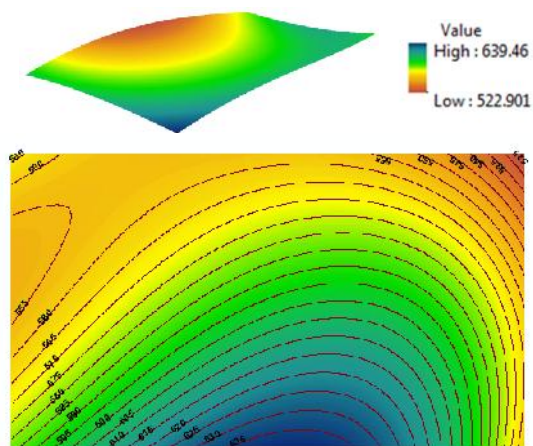
	1. trans.	2. trans.	3. trans.
Min (m)	0.07	0.08	0.08
Max (m)	0.12	0.13	0.09
Sr. vr. (m)	0.09	0.11	0.09



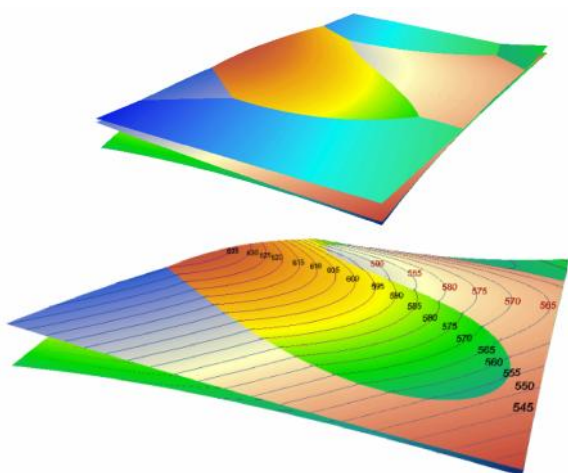
Slika 3 - Površ lokalnog geoida definisana polinomom prvog stepena



Slika 4 - Površ lokalnog geoida definisana polinomom drugog stepena



Slika 5 - Površ lokalnog geoida definisana polinomom tre eg stepena



Slika 6 - Preklapljene površi lokalnog geoida definisane polinomom prvog, drugog i tre eg stepena

## 5. ZAKLJU AK

Vertikalno pozicioniranje podrazumjeva prelaz geometrijski odre enih elipsoidnih visina u ortometrijske visine. Taj prelaz, mogu e je ostvariti uz dovoljno ta no poznavanje me usobnog položaja (rastojanja) odgovaraju ih referentnih površi elipsoida (WGS84) i geoida. Pojavom GNNS-tehnologije odre ivanje undulacije geoida dobija nau ni i prakti ni zna aj naro ito kod vertikalnog pozicioniranja u cilju zamjene tradicionalnog geometrijskog nivelmana. GNNS tehnologija našla je široku primjenu u geodeziji i name e potrebu za definisanjem preciznog modela geoida na nivou podru ja koje se predstavlja. Do usvajanja i publikovanja modela geoida u inženjersko-tehni kim radovima mogu se modelirati korektivne površi i tražiti optimalni prijedlog na lokalnom nivou.

U ovom radu izvršeno je modelovanje korektivne površi na osnovu GNNS mjerenja. Modelovanje je

izvršeno jednodimenzionalnom transformacijom sli - nosti. Vrijednost prosje ne razlike izme u ortometrijskih visina odre enih GNNS i transformisanih visina iznosi od 9 do 11 cm.

U cilju bržeg i ta nijeg odre ivanja ortometrijskih visina, primjenom GNNS-a, na podru ju PLRM Mrkonji Grad porebno je dodati konstantu od 10 cm.

## LITERATURA

- [1] Rangelova, E, Sideris M, transformation between gravimetric and GPS/levelling-derived geoids using additional gravity information, *Jurnal of Geodynamics*, April 2003.
- [2] Stopar B, Kuhar M, Turk G, GPS-derived Geoid using Artificial Neural Network and Least Squares Collocation, *Survey review*, march 2006.
- [3] Kotasakis C, Sideris G, On the adjustment of combined GPS/levelling/geoid networks, *Journal of Geodesy*, vol:73, pg. 412-421, 1999.
- [4] Kavzoglu T, Saka M. H, Modelling local GPS/levelling geoid undulations using artificial neural networks, *Journals of Geodesy*, Vol.:78, pg. 520-527, 2005.
- [5] Vella M. N, J. P, Use Of Similarity Transformation To Improve GPS Heighting, *Map Asia*, 2003.
- [6] Goleš M, Kuhar M, GPS-VIŠINOMERSTVO S POM OJO RTK-METODE IZMERA, *Geodetski vestnik*, vol.52, issue:2, 2008.
- [7] Fotopoulos G, An Analysis on the Optimal Combination of Geoid, Orthometric and Ellipsoidal Height Data, URL: <http://www.geomatics.ucalgary.ca/links-/GradTheses.htm>
- [8] Heiskanen W. A, Moritz H, *Physical Geodesy*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1967.
- [9] Soycan M, Soycan A, Surface modeling for GPS-levelling geoid determination, URL [http://www.is-geoid.polimi.it/Newton/Newton\\_1/soycan.pdf](http://www.is-geoid.polimi.it/Newton/Newton_1/soycan.pdf)
- [10]Boži B, *Geodetski premer 3*, Univerzitet u Beogradu, Gra evinski fakultet, 2008.
- [11]Vani ek P, Krakivski E. J, *Geodezija: koncepti*, prevod: Blagojevi D, Savez geodeta Srbije, 2005.
- [12]Vergos G. S, Sideris M. G, Evaluation of Geoid Models and Validation of Geoid and Gps/leveling Undulation in Canada, URL [http://olimpia.topo-auth.gr/vergos/publications/GPS\\_CANADA\\_2001\\_MOD.pdf](http://olimpia.topo-auth.gr/vergos/publications/GPS_CANADA_2001_MOD.pdf)
- [13]Fotopoulos G, Featherstone W. E, Sideris M. G, Fitting a Gravimetric Geoid Model to the Australian Height Datum via GPS Data, URL [http://www.researchgate.net/publication/239995294\\_Fitting\\_a\\_Gravimetric\\_Geoid\\_Model\\_to\\_the\\_Australian\\_Height\\_Datum\\_via\\_GPS\\_Data](http://www.researchgate.net/publication/239995294_Fitting_a_Gravimetric_Geoid_Model_to_the_Australian_Height_Datum_via_GPS_Data)

**SUMMARY****MODELING DIFFERENCE OF REFERENCE SURFACES OF THE EARTH'S BODY TO SOLVE THE PROBLEM OF VERTICAL POSITIONING**

*The aim of this paper is modeling difference of reference surfaces of the Earth's body to solve the problem of vertical positioning. With development of GNSS technology determining geoid undulation obtained scientific and practical significance especially in the vertical position with the aim of replacing the traditional geometrical leveling. The paper presents the modeling corrective surface based on GNSS measurements through a practical example of Local Spatial Reference Network (PLRM) Mrkonjic Grad where the measurements were made with GNSS observations. The modeling was performed one-dimensional similarity transformation and the average differences between orthometric height of a GNSS measurements and transformed height were determined.*

**Key words:** modeling, referenc surface, vertical positioning, GNSS