Statisti ka analiza prvog reda -q modela fedinga

OKO BAN UR, Univerzitet u Prištini,

Fakultet tehni kih nauka, Kosovska Mitrovica

BRANIMIR JAKŠI , Univerzitet u Prištini,

Fakultet tehni kih nauka, Kosovska Mitrovica, Srbija

MILOŠ BAN UR, Univerzitet u Prištini,

Fakultet tehni kih nauka, Kosovska Mitrovica, Srbija

Originalni nau ni rad

UDC: 621.391.812

DOI: 10.5937/tehnika1701077B

U ovom radu, polaze i od dobro poznatog Nakagami-q modela fedinga predloženo je njegovo unapre enje uvo enjem dodatne fleksibilnosti u vidu parametra koji je stepen modula kompleksnog Gauss-ovog procesa, a s ciljem boljeg podudaranja teorijskih rezultata sa vrednostima izmerenim u realnom okruženju. U okviru rada izložena je statisti ka analiza prvog reda novog -q modela fedinga koja uklju uje izvedene analiti ke izraze za funkciju gustine verovatno e, kumulativnu funkciju raspodele, moment n-tog reda, varijansu i karakterist nu funkciju jednog -q procesa. Grafi ki su predstavljeni rezultati za funkciju gustine verovatno e i kumulativnu funkciju raspodele -q procesa.

Klju ne re i: -q feding, funkcija gustine verovatno e, kumulativna funkcija raspodele, moment n-tog reda, varijansa, karakterisit na funkcija.

1. UVOD

Nakagami-q model fedinga je jedan od naj eš e koriš enih modela u opisu statistika anvelope i faze uskopojasnih mobilnih kanala. Tako e, koristi si kao model u opisu raspodele anvelope signala koji se prostire kroz satelitske kanale u uslovima jonosferske sintilacije, kao i u analizi performansi primopredajnih sistema u mobilnim komunikacijama.

Ovaj model fedinga definiše se modulom kompleksnog Gauss-ovog procesa, ija je jedna komponenta u fazi, a druga u kvadraturi. Pomenute Gauss-ove komponente su me usobno nekorelisane, njihove srednje vrednosti jednake su nuli, a varijanse me usobno razli ite.

Nakagami-q model fedinga predstavlja generalizaciju Rayleigh-ovog modela, kod koga su varijanse Gauss-ovih komponenti me usobno jednake [1], pa je samim tim pogodan za primenu u sistemima gde ne postoji opti ka vidljivost izme u predajnika i prijemnika, kao i u satelitskim kanalima koji su pod uticajem snažne jonosferske sintilacije [2]. Tako e, usled ve e fleksibilnosti, Nakagami-q model obezbe uje bo-

lje podudaranje analiti kih rezultata sa eksperimentalnim, tj. izmerenim vrednostima u odnosu na Rayleigh-ev model [3].

U ovom radu je predloženo uopštavanje Nakagami-q modela, i to uvo enjem odre ene nelinearnosti u vidu parametra koji je stepen modula kompleksnog Gauss-ovog procesa. Time se intenzitet rezultuju eg signala ne dobija kao modul kompleksnog Gauss-ovog procesa, kao što je to slu aj kod Nakagami-q modela, ve kao taj modul na stepen >0 . Ovaj novi model fedinga nazivamo -q feding, gde simbolizuje uvedenu nelinearnost, dok q simbolizuje Nakagami-q model fedinga koji je u osnovi novog modela.

Ovo uopštavanje predstavlja unapre enje fleksibilnosti postoje eg Nakagami-q modela, a u cilju još boljeg podudaranja sa eksperimentalnim tj. Vrednostima izmerenim u realnom okruženju.

U radu su prezentovani rezultati statisti ke analize prvog reda -q modela fedinga. Odnosno, predstavljeni su analiti ki izrazi za funkciju gustine verovatno e (PDF – Probability Density Function) [1, 4], kumulativnu funkciju raspodele (CDF – Cumulative Distribution Function) [1, 5], moment n-tog reda [1,6], varijansu [1] i karakterist nu funkciju (MGF – Moment Generating Function) [1] jednog -q procesa. Analiti ki izraz za gustinu verovatno e predstavljen je u zatvorenom obliku, dok analiti ki izrazi ostalih parametara predstavljeni su u vidu beskona nog reda.

Adresa autora: oko Ban ur, Univerzitet u Prištini, Fakultet tehni kih nauka, Kosovska Mitrovica, Kneza Miloša 7, djoko.bandjur@pr.ac.rs

Rad primljen: 19.12.2016.

Rad prihva en: 07.02.2017.

2. -q MODEL FEDINGA

Ako sa $r(t)$ označimo trenutnu vrednost amplitude procesa predstavljenog Nakagami-q modelom, sledi da je [3]

$$r(t) = |X(t) + jY(t)| = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad (1)$$

gde su $X(t)$ i $Y(t)$ nekorelisani uskopojasni Gausovi procesi varijansi σ_1^2 i σ_2^2 , respektivno. Tako e, raspodela gustine verovatno e ovog procesa, data je sledeim izrazom [2, Jed. (2.10)]:

$$p_r(r) = \frac{(1+q^2)r}{q\Omega} \exp\left[-\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega}\right] \times I_0\left(\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega}\right) \quad (2)$$

gde je $I_0(\cdot)$ modifikovana Bessel-ova funkcija prve vrste nultog reda, dok je q parametar koji može imati vrednost iz opsega od 0 do 1.

Označimo sa $R(t)$ trenutnu vrednost amplitude procesa predstavljenog -q modelom. Kao što smo u uvodu istakli, trenutna vrednost amplitude ovog procesa se dobija podizanjem modula kompleksnog Gauss-ovog na stepen $\gamma > 0$, odakle sledi da je

$$R(t) = |X(t) + jY(t)|^\gamma \quad (3)$$

Uvedena nelinearnost, u vidu stepena γ , se sa fizi kog stanovišta može opravdati argumentacijom korišćenom u [7], kojom je objašnjena fizi ka utemeljenost i razložnost uvo enja Weibull-ovog modela.

Naime, u pomenutom radu, autori su uopštavanjem Rayleigh-ovog modela, tako e uvo enjem nelinearnosti u vidu parametra koji je stepen modula kompleksnog Gauss-ovog procesa generisali višedimenzionalnu Weibull-ovu raspodelu, na bazi korelisanih Gauss-ovih procesa.

$$Z = |X(t) + jY(t)|^{2/S}, S > 0 \quad (4)$$

3. FUNKCIJA RASPODELA GUSTINE VEROVATNO E

Obzirom da su $X(t)$ i $Y(t)$ nekorelisani Gauss-ovi procesi, srednje vrednosti nula, i varijansi σ_1^2 i σ_2^2 , respektivno, sledi da je njihova združena gustina raspodele data sledeim izrazom

$$p_{XY}(X, Y) = \frac{1}{2f\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right] \quad (5)$$

Imaju i u vidu (3), te uvo enjem odgovaraju ih transformacionih formula

$$X = R^\frac{1}{\gamma} \cos \theta, \quad Y = R^\frac{1}{\gamma} \sin \theta, \quad (6)$$

združena gustina raspodele može se predstaviti u polarnom koordinatnom sistemu na slede i na in:

$$p_{R,\theta}(r, \theta) = |J| p_{XY}\left(r^\frac{1}{\gamma} \cos \theta, r^\frac{1}{\gamma} \sin \theta\right) \quad (7)$$

pri emu je Jakobijan transformacije

$$J = \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(R, \theta)} \right| = \frac{1}{\gamma} R^{\frac{2}{\gamma}-1} \quad (8)$$

Zamenom (6) i (8) u (5) dobijamo

$$p_{R,\theta}(r, \theta) = \frac{1}{\gamma} r^{\frac{2}{\gamma}-1} \frac{1}{2f\sigma_1^2\sigma_2^2} \times \exp\left[-\frac{r^{\frac{2}{\gamma}} \cos^2 \theta}{2\sigma_1^2} - \frac{r^{\frac{2}{\gamma}} \sin^2 \theta}{2\sigma_2^2}\right] \quad (9)$$

Integracijom prethodnog izraza po θ :

$$p_R(r) = \int_0^{2\pi} p_{R,\theta}(r, \theta) d\theta \quad (10)$$

dolazimo do izraza za raspodele gustine verovatno e procesa $R(t)$:

$$p_R(r) = \frac{1}{\gamma} R^{\frac{2}{\gamma}-1} \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp\left[-\frac{r^{\frac{2}{\gamma}}}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right] \times I_0\left(\frac{r^{\frac{2}{\gamma}}}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right) \quad (11)$$

gde je $I_0(\cdot)$ modifikovana Bessel-ova funkcija prve vrste nultog reda. Ovaj izraz se može dalje srediti uvo enjem slede ih smena

$$\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{(1+q^2)^2}{q^2\Omega}, \quad \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1-q^4}{q^2\Omega} \quad (12)$$

pri emu parametar q može imati vrednosti iz opsega od 0 do 1. Zamenom (12) u (11) dolazimo do slede eg izraza za raspodelu gustine verovatno e procesa $R(t)$:

$$p_R(r) = \frac{(1+q^2)r^{\frac{2}{\gamma}-1}}{\gamma q\Omega} \exp\left[-\frac{(1+q^2)^2 r^{\frac{2}{\gamma}}}{4q^2\Omega}\right] \times I_0\left(\frac{(1-q^4)r^{\frac{2}{\gamma}}}{4q^2\Omega}\right) \quad (13)$$

Može se primetiti, da se izraz za raspodelu gustine verovatno e procesa $R(t)$ dat sa (13), u slu aju kada je $=1$, svodi na izraz za raspodelu gustine verovatno e Nagakami-q procesa $r(t)$ dat sa (1). Prikaz raspodele gustine verovatno e procesa $R(t)$ za razli ite vrednosti parametra i parametra q prikazan je na slici 1.

Slika 1 - Raspodela gustine verovatno e procesa $R(t)$

Sa slike 1 se vidi da sa porastom parametra do-lazi do bržeg opadanja funkcije gustine verovatno e. Odnosno, za ve e vrednosti parametra q raspodela gu-stine verovatno e procesa $R(t)$ ima znatno sporiju pro-menu u odnosu za niže vrednosti parametra q .

4. KUMULATIVNA FUNKCIJA RASPODELE

Po definiciji, kumulativna funkcija raspodele, $F_R(r)$, se dobija na osnovu slede eg izraza

$$F_R(r) = \int_0^r p_R(r) dr \quad (14)$$

Zamenom (13) u prethodnu jedna inu, predstav-ljanjem modifikovanje Bessel-ove funkcije prve vrste nultog reda u vidu beskona nog reda [8]:

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+1)} \quad (15)$$

i zamenom redosleda integraljenja i sumiranja, do-lazimo do slede eg izraza za kumulativnu funkciju ras-podele procesa $R(t)$

$$F_R(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-2k} q}{(1+q^2) \Gamma(1+k)^2} \times \left(\frac{(1+q^2)^2}{q^2 \Omega} \right)^{-2k} \left(\frac{-1+q^4}{q^2 \Omega} \right)^{2k} \times \left(\Gamma(1+2k) - \Gamma\left(1+2k, \frac{(1+q^2)^2}{4q^2 \Omega} R^{\frac{2}{r}}\right) \right) \quad (16)$$

gde je $\Gamma(\cdot)$ Gama funkcija [9]. Prikaz kumulativna fu-ncije raspodele procesa $R(t)$ za razli ite vrednosti parametra prikazan je na slici 2.

Slika 2 - Kumulativna raspodela procesa $R(t)$

Sa slike 2 može se videti da kumulativna vero-vatno a procesa $R(t)$ teži 1 sa porastom vrednosti para-metra r što potvr uje ta nost izraza (16). Kumulativna verovatno a znatno brže teži 1 za niže vrednosti parametra .

Slika 3 - Konvergencija kumulativne raspodele pro-cesa $R(t)$

Pošto je (16) dat u obliku beskona ne sume, na Slici 3 dat je grafik konvergencije sume u (16) za razli iti broj lanova sume. Sa slike 3 se može videti da suma brzo konvergira, i da nakon 12 elemenata teži 1.

5. MOMENT n-TOG REDA

Koriste i (13), n-ti moment procesa $R(t)$, je po definiciji [2] dat slede im izrazom

$$\sim_n = E[R^n] = \int_0^{\infty} r^n \cdot p_R(r) dr \quad (17)$$

gde je $E[\cdot]$ matemati ko o ekivanje. Zamenom (13) i (15) u (17), nakon integraljenja dolazimo do slede eg izraza za moment n-tog reda procesa $R(t)$

$$\sim_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-2k+n\Gamma}}{\Gamma(1+k)^2} q^{1+n\Gamma} \left(\frac{1}{1+q^2} \right)^{1+4k+n\Gamma} \times (-1+q^4)^{2k} \Omega^{\frac{n\Gamma}{2}} \Gamma\left(1+2k + \frac{n\Gamma}{2}\right) \quad (18)$$

Varijansa procesa $R(t)$ je po definiciji [2] data sle im izrazom:

$$\dagger_R^2 = E[R^2] - (E[R])^2 \quad (19)$$

Na osnovu (17) i (18) dolazimo do izraza za momente prvog i drugog reda procesa $R(t)$, tj. $E[R^2]$ i $E[R]$. Zamenom ovih izraza u (19), i nakon odre enih matemati kih manipulacija dolazimo do slede eg izraza za varijansu procesa $R(t)$:

$$\dagger_R^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-4k+2r} q^{1+2r} (-1+q^4)^{2k} \Omega^r}{(1+q^2)^2 \Gamma(1+k)^4} \times$$

$$\left(-2q \left(\frac{1}{1+q^2} \right)^{2(4k+r)} (-1+q^4)^{2k} \Gamma \left(1+2k+\frac{r}{2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 4^k (1+q^2)^{1+4k-2r} \Gamma(1+k)^2 \Gamma(1+2k+r) \right) \quad (20)$$

6. KARAKTERISTI NA FUNKCIJA

Karakteristi na funkcija procesa $R(t)$ se definiše kao

$$M_R(s) = E[\exp(-sR)] = \int_0^{\infty} \exp[-sr] p_R(r) dr \quad (21)$$

Zamenom (13) u (21), kao i predstavljanjem Bessel-ove funkcije u vidu beskona nog reda, primenom (15), karakteristi na funkcija se može izraziti na slede i na in

$$M_R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(k)}{s^{(2+4k)/r}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} r^{b(k)-1} \exp[-r - c r^{2/r}] dr \quad (22)$$

gde je

$$a(k) = \frac{(1+q^2)}{r q \Omega k! \Gamma(1+k)} \left(\frac{1-q^4}{8 q^2 \Omega} \right)^{2k} \quad (23)$$

$$b(k) = \frac{(2+4k)}{r} \quad (24)$$

$$c = \frac{(1+q^2)^2}{4 q^2 \Omega s^{2/r}} \quad (25)$$

Integral oblika

$$\Psi(\langle, \wedge) = \int_0^{\infty} x^{\wedge-1} \exp[-x - \langle x^u] dx \quad (26)$$

koji se pojavljuje u (22), pri emu je $b(k) = \langle$, $c = \wedge$ i $\wedge = 2/r$ je analiti ki rešen u [10], pod uslovom da je racionalan broj. Rešenje je slede eg oblika

$$\Psi(\langle, \wedge) = \frac{\langle^{\wedge} \sqrt{\langle} / \rangle}{(\sqrt{2f})^{\langle \wedge \rangle - 2}} \times$$

$$\times G_{\langle, \wedge}^{\langle, \wedge} \left[\langle \wedge \rangle \left| \frac{\langle^{\wedge} \sqrt{\langle} / \rangle}{(\sqrt{2f})^{\langle \wedge \rangle - 2}} \right| (1-\wedge) / \rangle, (2-\wedge) / \rangle, \dots, (\langle - \wedge) / \rangle, \right]$$

$$\left[\frac{0 / \rangle, 1 / \rangle, \dots, (\langle - 1) / \rangle, \right] \quad (27)$$

gde je $G[\cdot]$ Meijer-ovea G funkcija, a $\langle$ i $\wedge$ su celobrojne pozitivne vrednosti, takve da važi slede i izraz:

$$\frac{\langle}{\wedge} = u \quad (28)$$

U zavisnosti od vrednosti parametra $\wedge$, koji je u našem slu aju

$$\frac{\langle}{\wedge} = u = \frac{2}{r} \quad (29)$$

uvek se može odabrati odgovaraju i skup minimalnih vrednosti parametara $\langle$ i $\wedge$ (na primer: ako je $\wedge = 0.8$, sledi da je $\langle = 2.5$, što zna i da za $\langle$ i $\wedge$, možemo izabrati vrednosti 5 i 2, respektivno). Autori su ovo analiti ko rešenje integrala datog sa (26) koristili i u [3] i [11].

7. ZAKLJU AK

U radu je izložen deo statisti ke anilize jednog novog modela fedinga, koji se bazira na dobro poznatom Nakagami-q modelu. Ovom analizom postavljena je teorijska osnova za dalju statisti ku analizu predloženog modela u smislu analize statistike drugog reda [12, 13], kao i smislu analize performansi razli itih diverziti tehnika i sistema koji se koriste u cilju neutralisanja negativnog uticaja tzv. brzog fedinga na prenos signala u beži nim telekomunikacionim sistemima, naro ito u uslovima nepostojanja direktne opti ke vidljivosti, kao i u satelitskim kanalima sa snažno izraženim uticajem jonosferske sintilacije.

LITERATURA

- [1] Panic S, Stefanovic M, Anastasov J, Spalevic P. *Fading and Interference Mitigation in Wireless Communications*, CRC Press, New York, 2013.
- [2] Simon MK, Alouini, MS. *Digital Communication Over Fading Channels*, 2nd ed., Wiley, New York, 2004.
- [3] Sagias N. C, Karagiannidis G. K. Gaussian Class Multivariate Weibull Distributions: Theory and Applications in Fading Channels, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51, No. 10, pp. 3608-3619, 2005.
- [4] Jakši B, Aleksi D, Mini S, Spalevi P, Dini I, Stefanovi M. Gustina verovatno e signala na izlazu iz makrodiverziti sistema sa tri mikrodiverziti SC prijemnika u prisustvu brzog k-μ fedinga i Gama sporog fedinga, in Proceedings of International Scientific Conference of IT and Business-Related Research - Synthesis 2015, Belgrade, Serbia, pp. 291-296, 16-17 April 2015.
- [5] Jaksic B, Stefanovic M, Aleksic D, Radenkovic D, Minic S. First-Order Statistical Characteristics of

- Macrodiversity System with Three Microdiversity MRC Receivers in the Presence of k - μ Short-Term Fading and Gamma Long-Term Fading, *Journal of Electrical and Computer Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2016, Article ID 9689586, 9 pages.
- [6] Djordjevi N, Jakši BS, Matovi A, Matovi M, Smili M. Moments of Microdiversity EGC receivers and Macrodiversity SC Receiver Output Signal over Gamma Shadowed Nakagami-m Multipath Fading Channel, *Journal of Electrical Engineering (Elektrotehnicki Casopis)*, Vol. 66, No. 6, pp. 348-351, 2015.
- [7] Youssef N, Wang CX, Patzold M. A Study on the Second Order Statistics of Nakagami-Hoyt Mobile Fading Channels, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 54, No. 4, pp. 1259-1265, 2005.
- [8] Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing, Dover, New York, 1972.
- [9] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 2000.
- [10] Sagias NC, Karagiannidis GK, Zogas DA, Mathiopoulos PT, Tombras GS. Performance Analysis of Dual Selection Diversity in Correlated Weibull Fading Channels, *IEEE Trans. on Commun.*, Vol. 52, No. 7. pp. 1063-1067, 2004.
- [11] Sagias NC, Zogas DA, Karagiannidis GK. Selection diversity Receivers Over Nonidentical Weibull Fading Channels, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 54, No. 6. pp. 3608-3619, 2005.
- [12] Jaksic B, Stefanovic D, Stefanovic M, Spalevic P, Milenkovic V. Level Crossing Rate of Macrodiversity System in the Presence of Multipath Fading and Shadowing, *Radioengineering*, Vol. 24, No. 1, pp. 185-191, 2015.
- [13] Jakši BS. Level Crossing Rate of Macrodiversity SC Receiver with Two Microdiversity SC Receivers over Gamma Shadowed Multipath Fading Channel, *Facta Universitatis Series: Automatic Control and Robotics*, Vol. 14, No. 2, pp. 87-98, 2015.

SUMMARY

-Q FADING MODEL: STATISTICAL ANALYSIS OF THE FIRST ORDER

In this paper starting from the well known Nakagami-q fading model we are proposing its improvement by introducing an additional flexibility, in the form of a parameter, which is power of the modulus of complex Gaussian process, in order to provide better matching between theoretical results and experimental values measured in a real environment. Within this paper, we will also present the first order statistical analysis of the proposed -q model. In this paper, a statistical analysis of the first order of the new -q model that includes derived analytical expressions for: probability density function, cumulative distribution function, moment n-th order are presented, variance and moment generating function of one -q process. Results for the probability density function and cumulative distribution function -q process are graphically presented.

Key words: -q fading, probability density function, cumulative distribution function, moment n-th order, variance, moment generating function