

## Odvajanje grede konačne dužine od Vinklerove nezatežuće podloge pri dejstvu sile na kraju grede

RATKO B. MARETIĆ, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

VALENTIN B. GLAVARDANOV, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

ALEKSANDAR S. OKUKA, Univerzitet u Novom Sadu,

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Originarni naučni rad

UDC: 624.072.2.042

DOI: 10.5937/tehnika1804479M

*U radu se analizira savijanje grede konačne dužine postavljene na elastičnu podlogu nezatežućeg Vinklerovog tipa. Greda je opterećena konstantnim kontinualnim opterećenjem i silom na jednom kraju. Pokazano je da u slučaju da su zadovoljeni određeni parametri dolazi do delimičnog odvajanja grede od podloge. Do odvajanja može da dođe na jednoj strani grede ili u njenom središnjem delu. Formirane su nelinearne algebarske jednačine čije rešenje daje koordinate tačkaka odvajanja. Određeni su ugibi grede vodeći računa da na mestima odvajanja grede nema dejstva podloge. Na nekoliko primera su data poređenja elastične linije grede prema klasičnom i predloženom proračunu.*

**Ključne reči:** nezatežuća Vinklerova podloga, greda

### 1. UVOD

Grede koje se oslanjaju na elastičnu podlogu predstavljaju model mnogih bitnih konstrukcija, kao što su temelji građevinskih objekata, železničke šine, putevi itd. Iako su svojstva tla, veoma često, elastoplastična, ipak postoje slučajevi kada je model elastične podloge prihvatljiv. Osim toga, na sličan način se mogu modelovati i ploveći objekti kao što su brodovi i splavovi. Zbog izuzetne važnosti ove teme, kao i tehničke primenljivosti, davno su se pojavili razni matematički modeli elastičnog tla, između ostalih i Vinklerov model, koji je i najjednostavniji. Prema Vinklerovom modelu, na gredu, usled interakcije sa podlogom, deluje kontinualno opterećenje koje je proporcionalno ugibu grede.

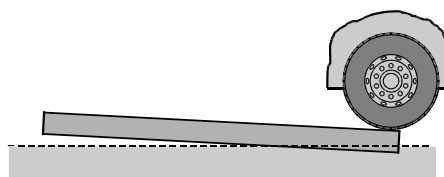
U pojedinim slučajevima, pri dejstvu nekog nesimetričnog opterećenja može doći do odvajanja grede od podloge i njenog izdizanja. Takva situacija može nastupiti, na primer, kada neko teško vozilo nagazi točkom na jedan kraj grede, kao što je to prikazano na slici 1.

Adresa autora: Ratko Maretić, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

e-mail: maretic@uns.ac.rs

Rad primljen: 05.04.2018.

Rad prihvaćen: 02.07.2018.



Slika 1 – Odvajanje kraja grede od podloge pri dejstvu tereta na drugom kraju

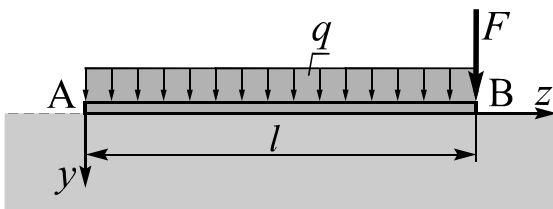
Osnovni problem u tom slučaju što je prema Vinklerovom modelu, deo grede koji se odvojio od podloge i dalje opterećen od strane podloge i to opterećenjem koje gredu vuče ka sebi, što fizički nije tačno. Ovaj nedostatak je davno uočen pa se pojavio i model Vinklerove podloge prema kome između podloge i grede postoji samo pritisno dejstvo. Uobičajeno je da se ova podloga naziva nezatežuća Vinklerova podloga. U radovima [1]-[9] su razmatrani uticaji na savijanje i stabilnost grede na pomenutoj podlozi pri različitim opterećenjima. I pored toga što je ova oblast dobro proučena postoje mogućnosti za dodatna istraživanja.

U ovom radu je ispitan zajednički uticaj sile na jednom kraju grede i kontinualnog opterećenja, kada je ona postavljena na nezatežuću Vinklerovu podlogu. Određene su vrednosti parametara pri kojima dolazi do odvajanja grede od podloge i kakav to ima uticaj na pomeranja. Upoređena su dobijena rešenja sa onima koja ne uzimaju u obzir odvajanje. Na kraju, izveden je zaključak u kojoj su meri, rezultati dobijeni

korišćenjem klasične teorije, zaista ispravni i primenljivi.

2. POSTAVKA PROBLEMA

Posmatraćemo gredu AB postavljenu na elastičnu podlogu nezatežućeg Vinklerovog tipa krutosti  $c$ , pri čemu je  $[c] = 1 \text{ N/m}^3$ , prikazanu na slici 2. Greda je konstantnog poprečnog preseka, koji ima vertikalnu osu simetrije čiji aksijalni moment inercije iznosi  $I$ , dok širina preseka sa donje strane, kojom se ostvaruje dodir sa podlogom, iznosi  $B$ . Dužina grede je  $l$ , dok je  $E$  modul elastičnosti materijala grede. Greda je opterećena konstantnim linijskim kontinualnim opterećenjem  $q$ , koje može biti težina grede i koncentrisanom silom  $F$ , koja deluje u tački B. Uvešćemo koordinatni sistem  $zAy$ , pri čemu je  $y$  osa usmerena prema dole.



Slika 2 – Geometrija grede i njeno opterećenje

Prema korišćenom modelu podloge, greda će, pored aktivnih opterećenja, biti sa donje strane strane, prema gore, opterećena kontinualnim opterećenjem

$$q_p = c B y \tag{1}$$

tako da je diferencijalna jednačina savijanja grede

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} = q - c B y \tag{2}$$

Pošto ćemo razmatrati slučaj grede koja se, jednim svojim delom, odvojila od podloge i samim tim, ostala bez dejstva pritiska podloge (1), na tom delu je savijanje grede opisano diferencijalnom jednačinom

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} = q \tag{3}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (2) je

$$y = e^{kz} (A_1 \sin kz + A_2 \cos kz) + e^{-kz} (A_3 \sin kz + A_4 \cos kz) + \frac{q}{cb} \tag{4}$$

gde je uvedena oznaka

$$k = \sqrt[4]{\frac{cB}{4EI}} \tag{5}$$

dok su  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$  integracione konstante.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3) je

$$y = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4 + \frac{1}{24} \frac{qz^4}{EI} \tag{6}$$

pri čemu su  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$  odgovarajuće integracione konstante.

Da bi smanjili broj parametara koji utiču na savijanje grede, rešenja diferencijalnih jednačina su napisana u bezdimenzionalnoj formi. Ukoliko uvedemo bezdimenzionalne parametre

$$w = \frac{y}{l}, \quad x = \frac{z}{l}, \quad \lambda = kl, \quad Q = \frac{ql^3}{EI} \tag{7}$$

rešenje (4) prelazi u

$$w = e^{\lambda x} (\bar{A}_1 \sin \lambda x + \bar{A}_2 \cos \lambda x) + e^{-\lambda x} (\bar{A}_3 \sin \lambda x + \bar{A}_4 \cos \lambda x) + \frac{Q}{4\lambda^4} \tag{8}$$

dok će rešenje (6) biti

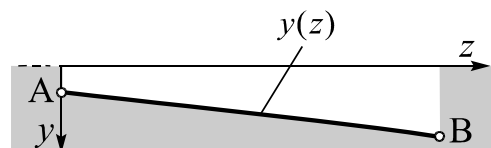
$$w = \bar{C}_1 z^3 + \bar{C}_2 z^2 + \bar{C}_3 z + \bar{C}_4 + \frac{1}{24} Q x^4, \tag{9}$$

pri čemu su uvedene i odgovarajuće bezdimenzionalne integracione konstante.

Da bi sračunali ugibe grede, potrebno je prvo odrediti da li uopšte dolazi do odvajanja grede od podloge. Zatim, ukoliko dolazi do odvajanja, treba odrediti na koji način. U vezi sa tim razlikovaćemo tri slučaja, koji će u nastavku biti posebno razmatrani.

3. SLUČAJ KADA SE GREDA NE ODVAJA OD PODLOGE

Ovaj slučaj zvaćemo klasični slučaj i on podrazumeva da je greda celom dužinom oslonjena na podlogu i da se od nje nije odvojila. Skica jednog takvog slučaja prikazana je na slici 3. Deformacija grede je tada opisana opštim rešenjem (4), odnosno (8).



Slika 3 – Greda se ne odvađa od podloge

Na osnovu uslova koje na krajevima štapa A i B zadovoljavaju moment savijanja i transverzalna sila, granični uslovi su

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dz^3}(0) &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dz^2}(l) &= 0, \quad -EI \frac{d^3 y}{dz^3}(l) = F \end{aligned} \tag{10}$$

Njihov bezdimenzionalni oblik je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3}(0) = 0, \\ \frac{d^2 w}{dx^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3}(l) = -P \end{aligned} \quad (11)$$

pri čemu je

$$P = \frac{F l^2}{EI} \quad (12)$$

Nakon određivanja integracionih konstanti dobijamo da je bezdimenzionalni ugib dat sa

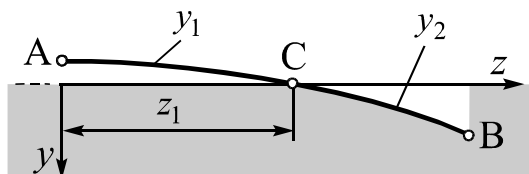
$$w = \frac{p_1 Q + p_2 P}{4\lambda^4(-2 + \cos 2\lambda + \operatorname{ch} 2\lambda)} \quad (13)$$

gde je

$$\begin{aligned} p_1 &= -2 + \cos 2\lambda + \operatorname{ch} 2\lambda, \\ p_2 &= e^{-(1+x)\lambda} (p_3 \cos \lambda x + p_4), \\ p_3 &= (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2\lambda x}) \cos \lambda - 2(e^{2\lambda} + e^{2\lambda x}) \sin \lambda \\ p_4 &= (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2\lambda x}) \sin \lambda \sin \lambda x. \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4. SLUČAJ KADA SE LEVA STRANA GREDE ODVAJA OD PODLOGE

Drugi slučaj savijanja grede podrazumeva da se njena leva strana, suprotna od kraja opterećenog silom, u izvesnoj meri odvoji od podloge. Sa C ćemo označiti tačku, sa nepoznatom koordinatom  $z_1$ , u kojoj dolazi do odvajanja grede od podloge (videti skicu na Slici 4). U tom slučaju savijanje grede za  $0 \leq z \leq z_1$  opisano je jednačinom (3) i rešenjem (6) odnosno (9), koje ćemo označiti sa  $y_1$  i  $w_1$ , dok je za  $z_1 \leq z \leq l$ , opisano jednačinom (2) i rešenjem (4) i (8), koje ćemo označiti sa  $y_2$  odnosno  $w_2$ .



Slika 4 – Greda se levom stranom odvađa od podloge

Granični uslovi u tačkama A i B su

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 y_1}{dz^3}(0) = 0, \\ \frac{d^2 y_2}{dz^2}(l) = 0, \quad -EI \frac{d^3 y_2}{dz^3}(l) = F \end{aligned} \quad (15)$$

dok u tački C mora biti zadovoljeno da do odvajanja dolazi upravo na površi nedeformisane podloge kao i

da prelaz sa jedne na drugu krivu mora biti gladak. Na taj način dobijano uslove

$$\begin{aligned} y_1(z_1) = 0, \quad y_2(z_1) = 0, \\ \frac{dy_1}{dz}(z_1) = \frac{dy_2}{dz}(z_1), \quad \frac{d^2 y_1}{dz^2}(z_1) = \frac{d^2 y_2}{dz^2}(z_1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d^3 y_1}{dz^3}(z_1) = \frac{d^3 y_2}{dz^3}(z_1).$$

Bezdimenzionalni oblik ovih graničnih uslova je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3}(0) = 0, \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2}(1) = 0, \\ \frac{d^3 w_2}{dx^3}(1) = -P, \quad w_1(s) = 0, \quad w_2(s) = 0, \\ \frac{dw_1}{dx}(s) = \frac{dw_2}{dx}(s), \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2}(s) = \frac{d^2 w_2}{dx^2}(s), \\ \frac{d^3 w_1}{dx^3}(s) = \frac{d^3 w_2}{dx^3}(s), \end{aligned} \quad (17)$$

gde je  $s = z_1/l$ .

Na osnovu ovih devet uslova određujemo osam integracionih konstanti, kao i koordinatu  $s$ . Imajući u vidu da se na osnovu graničnih uslova (17)<sub>1</sub> i (17)<sub>2</sub> dobija da je  $\bar{C}_1 = 0$  i  $\bar{C}_2 = 0$ , iz graničnih uslova (17)<sub>3</sub>, (17)<sub>4</sub>, (17)<sub>8</sub> i (17)<sub>9</sub> se mogu odrediti konstante  $\bar{A}_1 - \bar{A}_4$  u funkciji od  $s$ . Njihovom zamenom u uslov (15)<sub>6</sub> dobijamo nelinearnu algebarsku jednačinu po  $s$ . Ta jednačina se može svesti na oblik

$$g_1 + m g_2 = 0, \quad (18)$$

gde je

$$m = \frac{P}{Q} = \frac{F}{ql}, \quad (19)$$

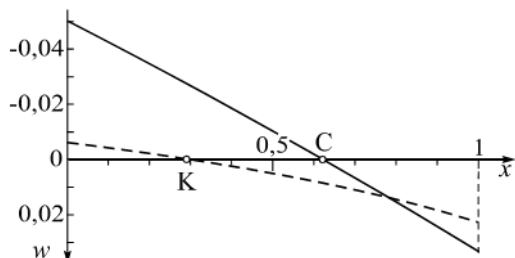
dok su izrazi  $g_1$  i  $g_2$  dati sa

$$\begin{aligned} g_1 &= -4e^{2(1+s)\lambda} + e^{4s\lambda} (s\lambda - 1)^2 + e^{4\lambda} (s\lambda + 1)^2 \\ &\quad - 2e^{2(1+s)\lambda} [(s^2\lambda^2 - 1) \cos 2(s-1)\lambda + 2s\lambda \sin 2(1-s)\lambda] \\ g_2 &= 4\lambda [e^{(3+s)\lambda} - e^{(1+3s)\lambda}] \cos((1-s)\lambda) \\ &\quad - (e^{(3+s)\lambda} + e^{(1+3s)\lambda}) \sin((1-s)\lambda), \quad (20) \\ g_2 &= 4\lambda \{ e^{(3+s)\lambda} [\cos(1-s)\lambda - \sin(1-s)\lambda] \\ &\quad - e^{(1+3s)\lambda} [\cos(1-s)\lambda + \sin(1-s)\lambda] \} \end{aligned}$$

Kada smo odredili  $s$ , možemo odrediti i konačnu vrednost integracionih konstanti  $\bar{A}_1 - \bar{A}_4$  i na kraju, na osnovu uslova (17)<sub>5</sub> i (17)<sub>7</sub> određujemo i preostale

konstante  $\bar{C}_3$  i  $\bar{C}_4$ . Važno je napomenuti da vrednost  $s$  zavisi samo od odnosa bezdimenzionalnih parametara  $P$  i  $Q$ , koji smo označili sa  $m$ .

Jedan tipičan slučaj odvajanja grede od podloge prikazan je na Slici 5. Bezdimenzionalni parametri su  $\lambda=2$ ,  $P=0,3$  i  $Q=0,1$ .



Slika 5 – Upoređenje deformacije grede za  $\lambda=2$ ,  $P=0,3$  i  $Q=0,1$ . Neprekidna linija – uticaj odvajanja, isprekidana linija - klasični proračun

Isprekidanom linijom je prikazano rešenje dobijeno na klasičan način funkcijom (13), dok je neprekidnom linijom prikazan ugib grede kod koje uzimamo u obzir uticaj odvajanja od podloge. Do odvajanja, prema klasičnom proračunu, dolazi u tački K, gde je  $x_K=0,230$ , dok u drugom slučaju do odvajanja dolazi u tački C ( $x_C=0,622$ ). Osim toga, ugibi krajeva grede u prvom slučaju su  $-0,0059$  i  $0,0229$ , dok su u drugom  $-0,0506$  i  $0,0336$ .

Očigledno je da postoji velika razlika u ugibima i položaju mesta odvajanja na osnovu upoređenja ova dva proračuna. Prema tome, za pojedine vrednosti parametara, klasičan proračun daje neprecizne vrednosti ugiba.

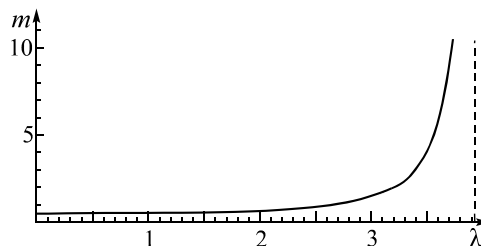
Da bi se stekla opštija slika o ovom problemu, u nastavku je određen uslov pri kojem dolazi do odvajanja grede od podloge. Sa Slika 4 i 5 možemo uočiti da postoje određene vrednosti parametra pri kojima tačka A (levi kraj) ima ugib jednak nuli, pri čemu je očuvan kontakt između grede i podloge. Promena vrednosti ovih parametara, a prvenstveno povećanje vrednosti sile  $F$ , dovešće do odvajanja. Zato je od interesa odrediti vrednosti parametara na samoj granici odvajanja. Pošto u tom slučaju još uvek nema odvajanja, iskoristićemo rešenje (13) kome ćemo nametnuti granični uslov

$$w(0) = 0 \quad (21)$$

Zadovoljavanjem (21) dolazimo do algebarskog izraza koji se može napisati u obliku

$$m = \frac{(2 - \cos 2\lambda - \operatorname{ch} 2\lambda) e^\lambda}{2\lambda [2e^\lambda \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda - (1 + e^{2\lambda}) \sin \lambda]} \quad (22)$$

On predstavlja graničnu vrednost parametra  $m$ , za zadato  $\lambda$ . Povećavanjem parametra  $m$  dolazi do odvajanja grede na način prikazan na slici 4.



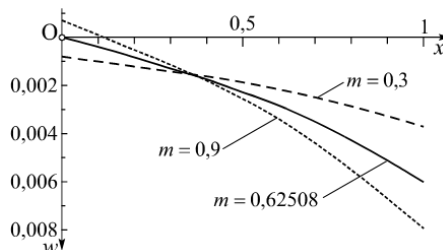
Slika 6 – Grafik veličine  $m=P/Q$  u funkciji od  $\lambda$  dobijen na osnovu izraza (22)

Grafik funkcije (22) prikazan je na slici 6. Pošto je

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} m = 0,5 \quad (23)$$

ova funkcija monotono raste od 0,5 do  $\lambda = 3,9266$ , gde ima asimptotu. Kada je  $\lambda > 3,9266$ , najniža vrednost  $m$  je veća od 80. To područje u ovom radu nije analizirano.

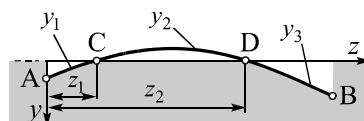
Proverićemo dobijene rezultate tako što ćemo odrediti elastične linije grede za  $\lambda=2$ , kada  $m$  ima vrednosti 0,3, 0,62508 (što je vrednost izračunata obrascem (22)) i 0,9. Ove linije, dobijene funkcijom (13), gde je usvojeno da je  $Q=0,1$ , i  $P=0,1m$ , prikazane su na slici 7. Slika potvrđuje zaključak da se će u slučaju da je  $m > 0,62508$  levi kraj grede uzdići iznad podloge. Zato, elastična linija dobijena sa  $m=0,9$ , nije odgovarajuća, već se za određivanje njenog stvarnog oblika mora koristiti procedura objašnjenja u ovom odeljku.



Slika 7 – Promena izgleda elastične linije u zavisnosti od veličine  $m = P/Q$  za  $\lambda = 2$

## 5. SLUČAJ KADA SE SREDIŠNJI DEO GREDE ODVAJA OD PODLOGE

Treći slučaj oslanjanja grede na podlogu je prikazan na slici 8. Greda je u središnjem delu, između tačaka C i D odvojena od podloge, zbog čega je prestalo dejstvo podloge na gredu pa je u tom delu, gde je  $z_1 \leq z \leq z_2$ , savijanje grede opisano jednačinom (3) i rešenjem (6) odnosno (9), koje ćemo označiti sa  $y_2$  i  $w_2$ .



Slika 8 – Greda koja se središnjim delom odvađa od podloge

U delovima AC ( $0 \leq z \leq z_1$ ), odnosno DB ( $z_2 \leq z \leq l$ ), savijanje je opisano jednačinom (2) i rešenjem (4) i (8), koje ćemo označiti sa  $y_1$  i  $w_1$ , odnosno  $y_3$  i  $w_3$ . U rešenju  $y_3$  ćemo integracione konstante  $A_i$ ,  $i=1,2,3,4$  preimenovati u  $B_i$ .

Granični uslovi u tačkama A i B su

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 y_1}{dz^3}(0) = 0, \\ \frac{d^2 y_3}{dz^2}(l) = 0, \quad -EI \frac{d^3 y_3}{dz^3}(l) = F \end{aligned} \quad (24)$$

Uslovi u tački C su isti kao uslovi (16) dok su u tački D

$$\begin{aligned} y_2(z_2) = 0, \quad y_3(z_2) = 0, \quad \frac{dy_2}{dz}(z_2) = \frac{dy_3}{dz}(z_2), \\ \frac{d^2 y_2}{dz^2}(z_2) = \frac{d^2 y_3}{dz^2}(z_2), \\ \frac{d^3 y_2}{dz^3}(z_2) = \frac{d^3 y_3}{dz^3}(z_2). \end{aligned} \quad (25)$$

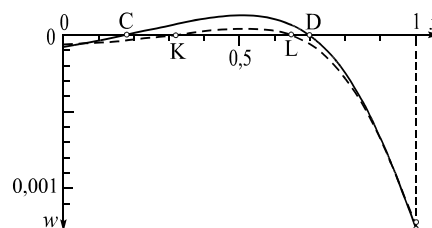
gde smo koristili  $s=z_1/l$  i  $f=z_2/l$ . Bezdimenzionalni oblik graničnih uslova je

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3}(0) = 0, \quad \frac{d^2 w_3}{dx^2}(1) = 0, \\ \frac{d^3 w_3}{dx^3}(1) = -P, \quad w_1(s) = 0, \quad w_2(s) = 0, \\ \frac{dw_1}{dx}(s) = \frac{dw_2}{dx}(s), \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2}(s) = \frac{d^2 w_2}{dx^2}(s), \\ \frac{d^3 w_1}{dx^3}(s) = \frac{d^3 w_2}{dx^3}(s), \\ w_2(f) = 0, \quad w_3(f) = 0, \\ \frac{dw_2}{dx}(f) = \frac{dw_3}{dx}(f), \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2}(f) = \frac{d^2 w_3}{dx^2}(f), \\ \frac{d^3 w_2}{dx^3}(f) = \frac{d^3 w_3}{dx^3}(f), \end{aligned} \quad (26)$$

Ovih 14 uslova omogućavaju da se odredi svih 12 integracionih konstanti i bezdimenzionalne koordinate  $s$  i  $f$ . Uslovi (26)<sub>1-4</sub>, (26)<sub>6-10</sub> i (26)<sub>11-14</sub> su pogodni da se integracione konstante izraze kao funkcije od parametara  $s$  i  $f$ . Zadovoljavanjem preostala dva uslova (26)<sub>5</sub> i (26)<sub>11</sub>, dobijamo sistem od dve nelinearne jednačine na osnovu koga možemo odrediti  $s$  i  $f$ . Te vrednosti se zatim zamenjuju u integracione konstante, čime dobijamo njihove konačne vrednosti, što omogućava da se nacrtaju elastična linija i odrede ugibi. Kao što smo videli u prethodnom slučaju i u ovom

koordinata odvajanja od podloge zavise od parametra  $m$ .

Određićemo uticaj odvajanja od podloge na primeru prikazanom na slici 9, u kojem je usvojeno da je  $\lambda=5$ ,  $P=0,3$  i  $Q=0,1$ . Neprekidnom linijom je prikazan ugib grede kod koje uzimamo u obzir uticaj odvajanja od podloge. Do odvajanja dolazi u tačkama C i D, čije su koordinate  $x_C=0,17566$  i  $x_D=0,69547$ . Isprekidanom linijom prikazano je rešenje dobijeno na klasičan način, korišćenjem funkcije (13). U ovom slučaju gređa se odvajaju od tla u tačkama K i L sa koordinatama  $x_K=0,31844$  i  $x_L=0,64741$ . Postoji očigledna razlika u visini uzdizanja iznad podloge, dok je, za date podatke, maksimalni ugib prema dole, u oba slučaja, vrlo sličan.



Slika 9 – Upoređenje deformacije grede za  $\lambda=5$ ,  $P=0,3$  i  $Q=0,1$ . Neprekidna linija – uticaj odvajanja, isprekidana linija – klasični proračun

Određićemo pri kojim vrednostima parametara  $m$  i  $\lambda$  dolazi do odvajanja grede na način opisan u ovom odeljku. Odvajanje započinje tako što elastična linija grede u jednoj tački dodirne osu  $x$ . U toj tački, čiju ćemo bezdimenzionalnu koordinatu označiti sa  $t$  je zadovoljeno da su ugib i ugao nagiba tangente jednaki nuli, pa je

$$w(t) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(t) = 0, \quad (27)$$

gde je  $w$  dato sa (13). Ovi uslovi dovode do jednačina

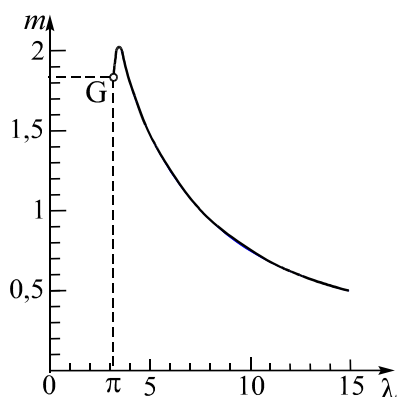
$$r_1 + m(r_2 + r_3) = 0, \quad (28)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \quad (29)$$

gde je

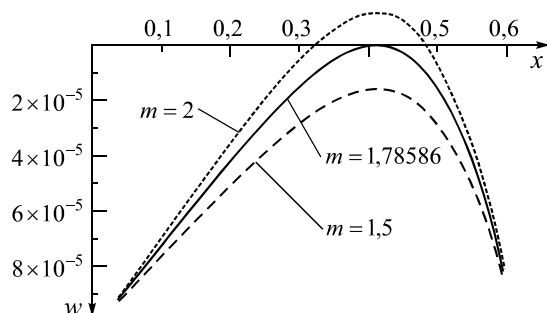
$$\begin{aligned} r_1 &= e^{-2\lambda}(1 - 4e^{2\lambda} + e^{4\lambda}) + 2 \cos \lambda, \\ r_2 &= 2\lambda e^{-(1+t)\lambda} \cos t\lambda [(e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2t\lambda}) \cos \lambda - 2(e^{2\lambda} + e^{2t\lambda}) \sin \lambda], \\ r_3 &= 2\lambda e^{-(1+t)\lambda} (e^{2\lambda} - 1)(1 + e^{2t\lambda}) \sin \lambda \sin t\lambda, \\ k_1 &= -(e^{2\lambda} + e^{2t\lambda}) \cos[(1+t)\lambda], \\ k_2 &= (1 + e^{2(1+t)\lambda}) \cos[(1-t)\lambda], \\ k_3 &= (e^{2\lambda} - e^{2t\lambda}) \sin[(1+t)\lambda], \\ k_4 &= (-1 + 2e^{2\lambda} - 2e^{2t\lambda} + e^{2(1+t)\lambda}) \sin[(1-t)\lambda]. \end{aligned} \quad (30)$$

Ukoliko zadamo  $\lambda$ , iz jednačine (29) možemo odrediti koordinatu  $t$ , a zatim iz (28) i vrednost  $m$ . Grafik parametra  $m$ , dobijen opisanim postupkom, prikazan je na slici 10.



Slika 10 – Grafik veličine  $m=P/Q$  u funkciji od  $\lambda$  dobijen rešavanjem sistema jednačina (28) i (29)

Grafik započinje u tački  $G(\pi, 1,83804)$ , na početku ima blagi rast, a zatim monotono opada. Za vrednosti  $m$  koje su ispod prikazane linije je obezbeđeno da neće doći do odvajanja od podloge.

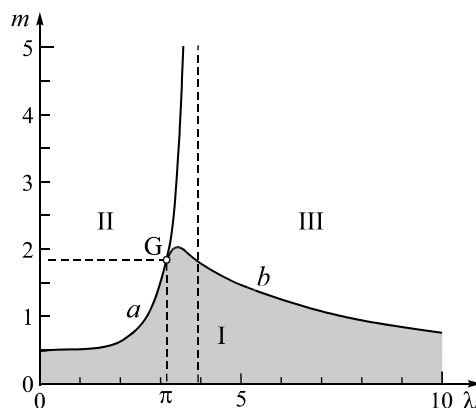


Slika 11 – Promena izgleda elastične linije u zavisnosti od veličine  $m=P/Q$  za  $\lambda=4$

Ilustrujmo ovaj zaključak jednim primerom. Neka je zadato da je  $\lambda=4$ . Iz sistema (28) i (29) se dobija  $m=1,78586$ . Na slici 11 je prikazana odgovarajuća elastična linija koja svoj minimum ima upravo na osi  $x$ . Ako je  $m$  manje od te vrednosti (na primer 1,5) neće doći do odvajanja od podloge, dok ako je veće (na primer 2), dolazi do odvajanja od podloge u središnjem delu grede.

Uloga tačke  $G$  i izgled grafika, prikazanog na slici 10, postaju jasni tek kada se on poveže sa grafikom koji je prikazan na slici 6. Ovaj potpuni grafik prikazan je na slici 12.

Linije  $a$  i  $b$  dele posmatranu površ grafika na tri oblasti koje su označene sa I, II i III. Ukoliko su vrednosti parametara  $\lambda$  i  $m$  takve da se odgovarajuća tačka nalazi u oblasti I (koja je zasivljena) neće biti odvajanja od podloge pa je elastična linija opisana na klasičan način, formulom (13).



Slika 12 – Potpuni grafik veličine  $m = P/Q$  u funkciji od parametra  $\lambda$

Ako parametar  $\lambda$  zadovoljava  $0 \leq \lambda \leq \pi$  i ako je  $m$  iznad linije  $a$  (oblast II), doći će do odvajanja leve strane grede, pa se proračun mora vršiti na način objašnjen u odeljku 4. U slučaju da je  $\pi \leq \lambda$  i  $m$  takvo da je odgovarajuća tačka iznad linije  $b$  (u oblasti III), doći će do odvajanja grede od podloge u središnjem delu, što znači da se proračun vrši prema postupku iz odeljka 5. Posebno je interesantan slučaj kada je  $\pi \leq \lambda \leq 3,9266$ . U zavisnosti od vrednosti parametra  $m$ , odnosno u kojoj oblasti se nalazi odgovarajuća tačka, moguća su sva tri slučaja. Najzad, postaje jasno da se tačka  $G$  nalazi na granicama između sve tri oblasti. Ona je specifična po tome što za parametre  $\lambda=\pi$  i  $m=1,83804$ , koji predstavljaju njene koordinate, elastična linija prolazi kroz levi kraj grede i pri tome je u toj tački ugao nagiba tangente jednak nuli.

## 6. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da korišćenje klasičnog postupka određivanja ugiba nesimetrično opterećene grede na podlozi Vinklerovog tipa, može dovesti do značajnih grešaka.

Do odvajanja grede od podloge može doći na dva različita načina: može se odvojiti strana grede koji je nasuprot sili i može doći do odvajanja u središnjem delu grede. Određena je funkcija zavisnosti parametara  $m$  i  $\lambda$  koja definiše granice oblasti mogućih rešenja.

## 7. ZAHVALNICA

Ovaj rad je finansirao Fakultet tehničkih nauka iz Novog Sada, projekat 2018-54.

## LITERATURA

- [1] Weitsman Y, On Foundations That React in Compression Only, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, No.4, pp. 1019-1030, 1970.
- [2] Kaschievt M. S, Mikhajlov K. A Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation, *Computers & Structures*, Vol. 55. No. 2. pp. 261-264. 1995.

- [3] Zhang Y, Murphy K. D, Response of a finite beam in contact with a tensionless foundation under symmetric and asymmetric loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 24-25, pp. 6745–6758, 2004.
- [4] Ma X, Butterworth J. W, Clifton G. C, Response of an infinite beam resting on a tensionless elastic foundation subjected to arbitrarily complex transverse loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 7, pp. 818–825, 2009.
- [5] Chen J. S, Wu H. H, Response of a Buckled Beam Constrained by a Tensionless Elastic Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 137, No. 6, pp. 383-389, 2011.
- [6] Nobíli A, Variational Approach to Beams Resting on Two-Parameter Tensionless Elastic Foundations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 79, No. 2, 021010, 2012.
- [7] Nobíli A, Variational Approach to Beams Resting on Two-Parameter Tensionless Elastic Foundations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 79, No. 2, 021010, 2012.
- [8] Nobili A, Superposition Principle for the Tensionless Contact of a Beam Resting on a Winkler or a Pasternak Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 139, No. 10, pp. 1470-1478, 2013.
- [9] Zhang L, Zhao M, New Method for a Beam Resting on a Tensionless and Elastic-Plastic Foundation Subjected to Arbitrarily Complex Loads, *International Journal of Geomechanics*, Vol. 16, No 4, 04015093, 2016.
- [10] Ioakimidis N. I, Derivation of conditions of complete contact for a beam on a tensionless Winkler elastic foundation with Mathematica, *Mechanics Research Communications*, Vol. 72, pp. 64-73, 2016.

## SUMMARY

### THE CONTACT SEPARATION OF A FINITE BEAM FROM THE TENSIONLESS WINKLER FOUNDATION DUE TO THE FORCE ACTING AT THE ONE BEAM END

*In this paper, bending of a finite beam, positioned on the elastic foundation of tensionless Winkler type, is analysed. Beam is subjected to the two different types of load, concentrated vertical force acting at the one end in combination with the constant equally distributed continuous load action along its length. It is shown that in the case of satisfying some parameter values, the partial separation of beam from its foundation is possible. The separation can be displayed on the one side or in the middle region of the beam. The position of the points of separation is obtained as the solution of the system of nonlinear algebraic equations. In addition, deflections of the beam are calculated by taking into account the fact that in the region of the separation of the beam from its foundation, the influence of the foundation on the beam deflection does not exist. In a few examples, the beam elastic lines calculated in the classical manner and using the proposed method are compared.*

**Key words:** *Tensionless Winkler foundation, beam*