Grafoanalitičko određivanje ubrzanja pri regularnoj precesiji

MILOŠ D. LJUBOMIROVIĆ, „ELMOS“, Jagodina

Originalni naučni rad
UDC: 531.391
DOI: 10.5937/tehnika2005597L

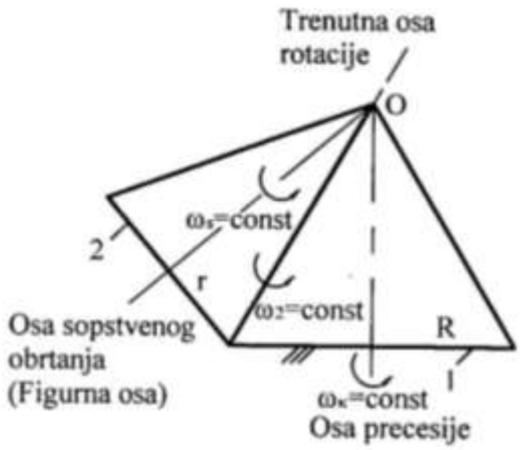
U ovom radu, koji se bavi sfernim kretanjem, najpre je pojašnjeno dopunsko ubrzanje iz Rivalsove teoreme, a potom je, za regularnu precesiju, dat grafoanalitički postupak određivanja ubrzanja pomoću elipsi.

Osim toga, pokazano je kako se grafički određuje centar krivine ako se posmatrana tačka nalazi na ravni simetrije.

Ključne reči: *regularna precesija, grafoanalitičko određivanje ubrzanja, centar krivine*

1. UVOD

Regularna (pravilna) precesija, slika 1, specijalan je slučaj sfernog kretanja, sa kružno-konusnim aksoidima i konstantnim ugaonim brzinama.



Slika 1 - Regularna precesija

Kretanje je prostorno pa ovde i nije baš pogodna kinematska analiza u kojoj se primenjuju geometrijske konstrukcije, ali upravo to bio je izazov autoru da osmisli grafoanalitički postupak određivanja ubrzanja, koji ćemo videti u ovom radu.

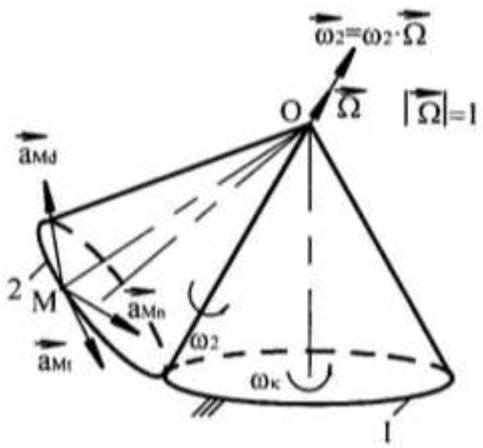
Vodilja u tom naumu bilo je tzv. dopunsko ubrzanje iz Rivalsove teoreme [1], [2].

Suština ove teoreme je u sledećem:

Zamislimo, sliku 2, da je trenutna osa rotacije trajno nepokretna, pa u skladu sa tim nalazimo normalno i tangencijalno ubrzanje željene tačke, recimo M: $\vec{a}_{Mn}$, $\vec{a}_{Mt}$. (U slučaju regularne precesije koju ovde razmatramo bilo bi $a_{Mt} = 0$)

Dalje, uzevši u obzir da ta osa ipak menja položaj, uvodimo dopunsko ubrzanje ($\vec{a}_{Md}$), koje glasi:

$$\vec{a}_{Md} = -\overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega}_k \times \vec{\omega}_2) \quad (1)$$



Slika 2 - Precesiono kretanje i Rivalsova teorema

U malo drugačijem pristupu, kada određujemo aksipetalno i obrtno ubrzanje ($\vec{a}_{M\omega}$, $\vec{a}_{M\varepsilon}$), sa punom primenom vektorskog računa [3], dopunsko ubrzanje

Adresa autora: Miloš Ljubomirović „Elmos“, Jagodina, Despota Stefana bb
e-mail: milos_lj@hotmail.com
Rad primljen: 20.12.2019.
Rad prihvaćen: 25.08.2020.

nije eksplicitno naznačeno, ali je svakako prisutno, kao „sakriveno".

Dokaz dopunskog ubrzanja zasnovan je na izrazu za ugaono ubrzanje

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{\Omega} + \omega\cdot\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 \quad , \quad (2)$$

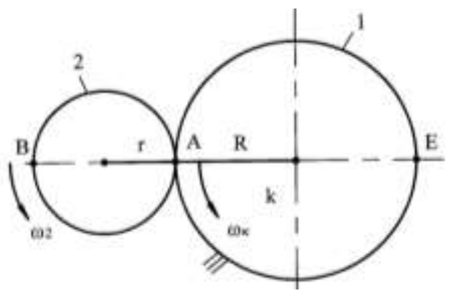
ali to je samo matematički formalizam, i neka prava fizikalna predstava nam uporno izmiče.

U udžbeničkoj literaturi postoje dva pojašnjenja: prvo [4], gde je vektorsko izvođenje propraćeno skicom, i drugo [5], u kome se koristi hodograf ugaone brzine, ali autor je želeo nešto još očiglednije. Razmišljanje o tome vratilo ga je na ravno kretanje, potom na pravljenje analogije sa sfernim kretanjem i naposletku na geometrijsku konstrukciju ubrzanja pomoću elipsi.

2. ANALOGIJA IZMEĐU RAVNOG I SFERNOG KRETANJA

Sličnost između ravnog kretanja predstavljenog ruletama i sfernog kretanja predstavljenog aksoidima [3], [4] poznata je stvar, ali ovde ćemo to malo detaljnije razmotriti.

Posmatrajmo planetarni prenosnik, sl. 3, gde je zupčanik 1 nepokretan, a zupčanik 2 ga obilazi usled okretanja krivaje ***k*** ugaonom brzinom ω_K .



Slika 3 - Ravno kretanje

Apsolutna ugaona brzina zupčanika 2 biće

$$\omega_2 = \omega_K \frac{R+r}{r} \quad , \quad (3)$$

Tačka A je trenutni pol brzina (P_v), koji rotira brzinom

$$V_P = \omega_K \cdot R \quad , \quad (4)$$

Ubrzanje one tačke zupčanika 2 koja se poklopila sa trenutnim polom brzina dobija se po obrascu [1]

$$\vec{a}_A = \vec{V_P} \times \vec{\omega_2} \quad (5)$$

što znači da je usmereno ka centru zupčanika 2.

U skalarnom obliku to ubrzanje glasi

$$a_A = R\cdot\omega_K\cdot\omega_2 \quad (6)$$

Kako je normalno ubrzanje tačke B oko tačke A

$$a_{BN}^{A} = 2\cdot r\cdot\omega_2^2 \quad (7)$$

možemo postaviti odnos

$$\frac{a_{BN}^{A}}{a_A} = \frac{\overline{BE}}{R} \quad (8)$$

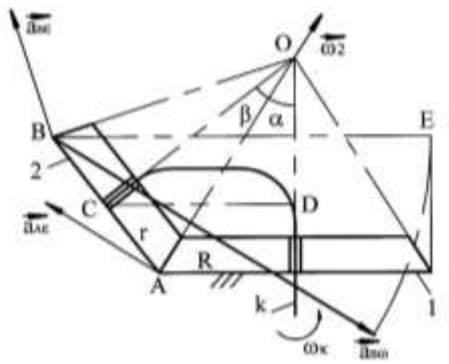
Sada osmotrimo slika 4. Konusni zupčanik 1 je nepokretan, a obilazi ga zupčanik 2 gonjen krivajom ***k*** čija je ugaona brzina ω_K .

Apsolutna ugaona brzina zupčanika 2 biće [4]

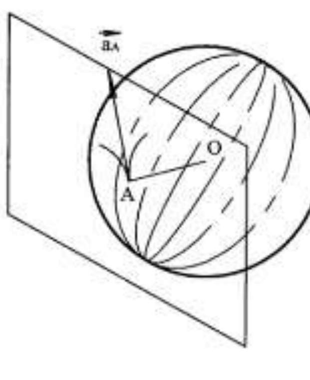
$$\omega_2 = \omega_K \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \quad (9)$$

Ako umesto ove realne mehaničke konstrukcije zamislimo samo dva kruga (dva beskrajno tanka konusna zupčanika) jasno nam je da je tačka A trenutni pol brzina.

U okolini tačke A putanja te tačke priljubljuje se uz ravan koja tangira sferu a prolazi kroz tačku A, pa zaključujemo da u tački A imamo ubrzanje u trenutnom polu brzina koje leži u tangentnoj ravni, normalno na $\overline{OA}$, sl. 5.



Slika 4 - Sferno kretanje



Slika 5 - Ubrzanje u trenutnom polu brzina

Intenzitet ovog ubrzanja odredjujemo po obrascu (6), $a_A = R \cdot \omega_K \cdot \omega_2 = a_{A\varepsilon}$.

Pitamo se, kako se ubrzanje $\vec{a}_{A\varepsilon}$ prenosi na bilo koju tačku zupčanika 2?

U ravni u kojoj leže vektori $\vec{a}_{A\varepsilon}$ i $\overrightarrow{OA}$ postoji rotacija oko tačke O, što znači da se ubrzanje $\vec{a}_{A\varepsilon}$ prenosi po pravilima rotacionog kretanja. Znači, za tačku B biće $a_{B\varepsilon} = R \cdot \omega_K \cdot \omega_2$, sa pravcem po normali na $\overline{OB}$.

Ako, dalje, uzmemo ubrzanje tačke B usmereno ka trenutnoj osi rotacije,

$$a_{B\omega} = \overline{BA} \cdot \cos\beta \cdot \omega_2^2 \tag{10}$$

pa postavimo relaciju $\dfrac{a_{B\omega}}{a_{B\varepsilon}}$, posle kraćeg sređivanja sledi

$$\frac{a_{B\omega}}{a_{B\varepsilon}} = \frac{\overline{BE}}{R} \tag{11}$$

Sada, dovedimo rotacijom ove duži u pravi položaj, slika 4, pa možemo prema osobini linearnog rasporeda odrediti ubrzanja $\vec{a}_\omega$ i $\vec{a}_\varepsilon$ u bilo kojoj tački na prečniku $\overline{AB}$.

Posle svega, vratimo se ravnom kretanju, slika 3:

Šta se dešava sa nekom tačkom M u proizvoljnom položaju na kružnici 2, i njenim normalnim ubrzanjem oko tačke A ($\vec{a}_{MN}^{\,A}$)? Kako će se preslikati kružnica 2?

Na osnovu Memkeove teoreme II [1] znamo da će to biti kružnica, u ovom slučaju upravo kružnica 1.

Ako dalje pratimo započetu analogiju ravnog i sfernog kretanja, logički ili intuitivno predosećamo da će se to dogoditi i u slučaju sfernog kretanja predstavljenog sl. 4. Znači, ubrzanja $\vec{a}_\omega$ tačaka koje se nalaze na kružnici 2 preslikaće tu kružnicu u kružnicu ili najverovatnije, usled deformacije, u elipsu.

Ipak, potreban nam je egzaktni dokaz, a on sledi u narednom poglavlju.

3. ODREĐIVANJE $\vec{a}_\omega$ POMOĆU ELIPSI

Posmatrajmo sliku 6:

Ubrzanje tačke M usmereno ka trenutnoj osi rotacije vektorski se određuje po obrascu

$$\vec{a}_{M\omega} = \vec{\omega}_2 \times \vec{V}_M = \vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_2 \times (\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M})] \tag{12}$$

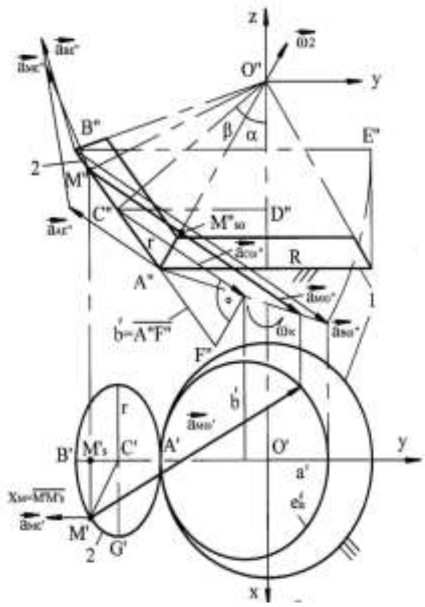
Razvijanjem ovog duplog vektorskog proizvoda imamo

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{M\omega} &= \vec{\omega}_2[\vec{\omega}_2 \cdot (\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M})] - \\
&- (\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M})(\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_2) = \\
&= \vec{\Omega} \cdot \omega_2[\vec{\Omega} \cdot \omega_2 \cdot (\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M})] - \\
&- \omega_2^2(\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M}) = \\
&= \vec{\Omega} \cdot \omega_2[\omega_2 \cdot (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{OM_S} + \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{M_S M})] - \\
&- \omega_2^2(\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M}) = \\
&= \vec{\Omega} \cdot \omega_2(\omega_2 \cdot OM_{S0}) - \omega_2^2(\overrightarrow{OM_S} + \overrightarrow{M_S M}) = \\
&= \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{OM_{S0}} - \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{OM_S} - \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{M_S M} = \\
&= \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{M_S M_{S0}} + \omega_2^2 \cdot \overrightarrow{MM_S}
\end{aligned} \tag{13}$$

Komponentu $\omega_2^2 \cdot \overrightarrow{M_S M_{S0}}$ ubrzanja već smo grafički odredili, pa nas interesuje ova druga komponenta $\omega_2^2 \cdot \overrightarrow{MM_S}$, koja je paralelna sa osom x, tako da imamo u skalarnom obliku

$$\omega_2^2 \cdot x_M \cdot k_a = x_M + b_x' \quad (14)$$

gde je k_a razmera koju smo koristili pri prikazu vektora $\vec{a}_{B\omega}$.



Slika 6 - Elipsa ubrzanja (e_a')

Odavde sledi nepoznata koordinata

$$b_x' = x_M(\omega_2^2 \cdot k_a - 1) = x_M \cdot k \tag{15}$$

gde je k nova konstanta.

Dakle, ako koordinata x_M prati elipsu, onda i koordinata $b_x^{'}$ opisuje elipsu.

Poluosu $a^{'}$ elipse $e_a^{'}$ dobili smo spuštanjem normala iz vrhova $\vec{a}_{C\omega}^{"}$ i $\vec{a}_{B\omega}^{"}$ na y osu, a da bismo odredili poluosu $b^{'}$ postavićemo izraz (15) za tačku G:

$$b^{'} = r \cdot \omega_2^2 \cdot k_a - r \tag{16}$$

Ako koeficijent razmere k_a odredimo baš preko tačke G imaćemo

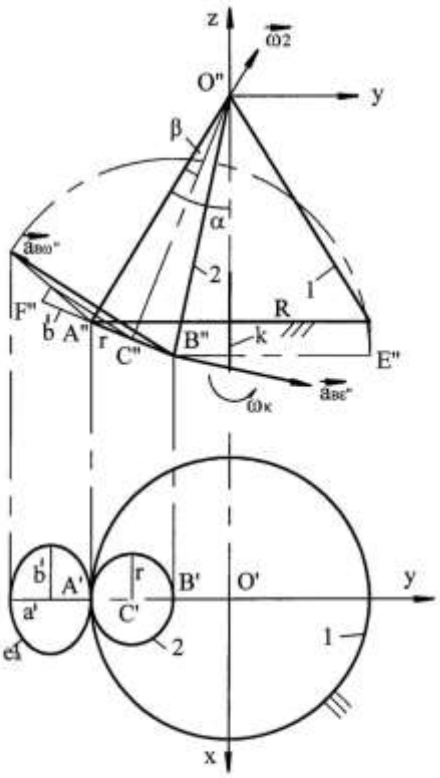
$$k_a = \frac{\overline{C^{"}D^{"}}}{r \cdot \cos\beta \cdot \omega_2^2} \tag{17}$$

pa zamenom u (16) sledi

$$b^{'} = \frac{\overline{C^{"}D^{"}}}{\cos\beta} - r \tag{18}$$

Znači, poluosa $b^{'}$ jednaka je duži $\overline{A^{"}F^{"}}$.

Na isti način određujemo elipsu ubrzanja ($e_a^{'}$) u slučaju da se konus 2 kotrlja unutar konusa 1, slika 7.



Slika 7 - Konus unutar konusa

4. SPECIJALNI SLUČAJEVI PRECESIONOG KRETANJA

Sada ćemo videti kako se gornja grafoanalitička metoda sa elipsama primenjuje kod nekih specijalnih geometrijskih oblika regularnog precesionog kretanja.

Slika 8 prikazuje nam kotrljanje diska $(\beta = 90^{\circ})$ po konusu i donosi malu nedoumicu – kako odrediti $\overline{C^{"}D^{"}}$, odnosno poluosu $b^{'}$?

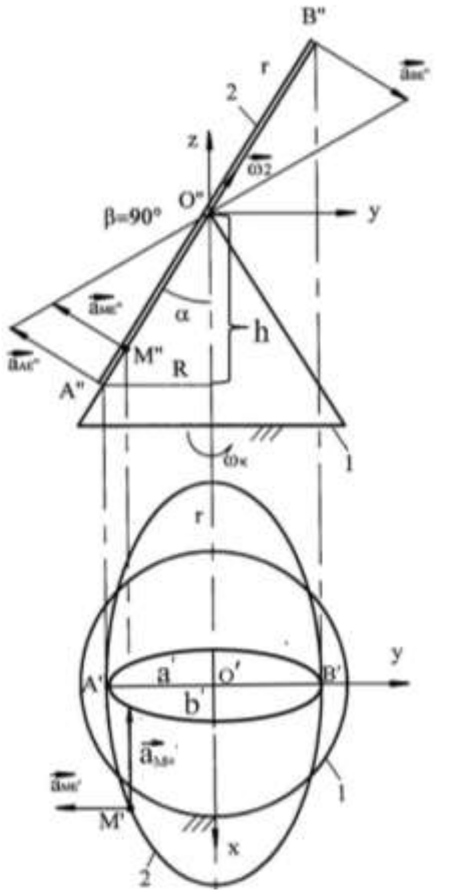
Analitički izraz za $\overline{C^{"}D^{"}}$, videti sl. 6, ima oblik

$$\overline{C^{"}D^{"}} = R(1 + \frac{\sin\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}) \tag{19}$$

pa ovaj neodređeni količnik, $\frac{\overline{C^{"}D^{"}}}{\cos\beta} = \frac{0}{0}$, možemo srediti primenom Lopitalovog pravila:

$$\lim_{\beta\to\pi/2} \frac{R(1 + \frac{\sin\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha})}{\cos\beta} =$$

$$= \lim_{\beta\to\pi/2} \frac{\left[R(1 + \frac{\sin\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha})\right]^{'}}{[\cos\beta]^{'}} = \frac{R}{\tan\alpha} \tag{20}$$



Slika 8 - Kotrljanje diska po konusu

S obzirom da pri $\beta = 90^\circ$ važi $r = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, tražena poluosa biće:

$$b^{'} = \frac{R}{\sin\alpha}(\cos\alpha - 1) \qquad (21)$$

ili, prema trouglu sa slike 8,

$$b^{'} = h - \overline{O^{''}A^{''}} \qquad (22)$$

Kao što vidimo, nastaće negativni predznak, pa vrh vektora $\vec{a}_{M\omega}$ leži na sebi bližem luku elipse.

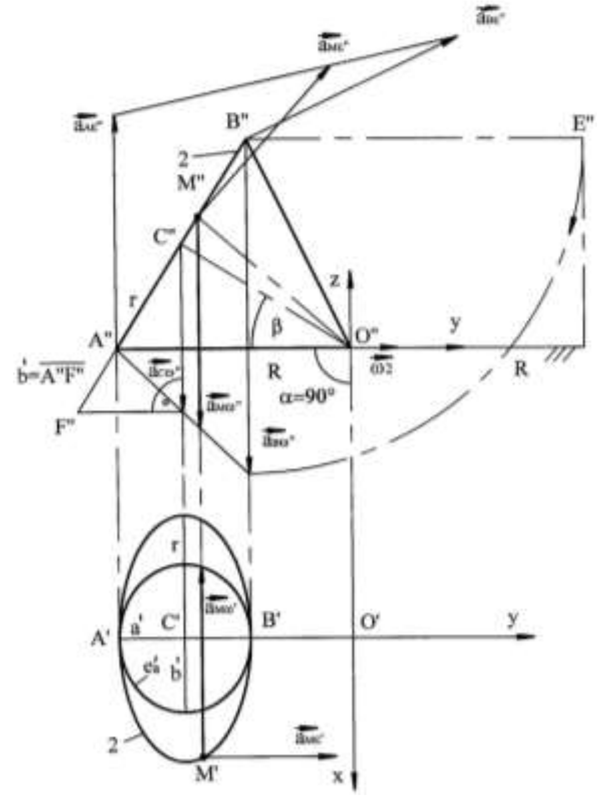
Postavlja se pitanje kada je, pri kom uglu β, došlo do ove promene predznaka?

Odgovor sledi na osnovu činjenice da je tada $b^{'} = 0$, pa imamo izraz:

$$\frac{(1 + \dfrac{\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha})}{\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{\sin a} = 0 \qquad (23)$$

Logično je da će se to dogoditi ako važi relacija $\alpha + 2\beta = 180^\circ$, i zamena u (23) pokazuje ispravnost ove pretpostavke.

Sada posmatramo sl. 9, koja prikazuje kotrljanje konusa po disku.



Slika 9 - otrljanje konusa po disku

Može se dokazati da pri $\alpha = 90^\circ$ važi relacija

$$b^{'} = R(\cos\beta - \sin\beta) \qquad (24)$$

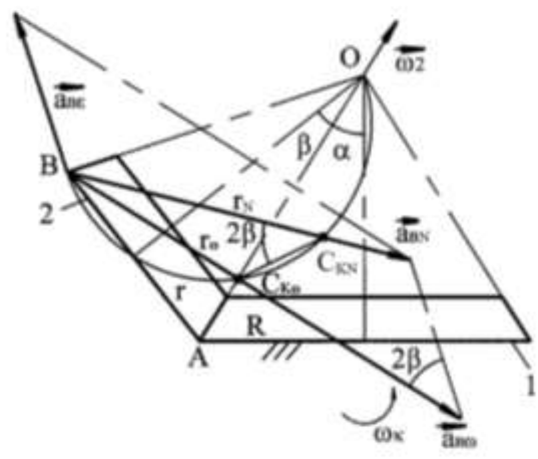
ili, prema trouglu sa slike 9,

$$b^{'} = \overline{O^{''}C^{''}} - \overline{A^{''}C^{''}} \qquad (25)$$

Promena predznaka takođe nastupa kada je zadovoljen gore pomenuti uslov, $\alpha + 2\beta = 180^\circ$.

5. CENTAR KRIVINE

U slučaju da se posmatrana tačka nalazi na ravni simetrije, poput tačke B, centar krivine možemo vrlo jednostavno odrediti grafičkim putem, sl. 10:



Slika 10 - Određivanje centra krivine

Najpre, po pravilu paralelograma odredimo normalno ubrzanje $\vec{a}_{BN}$, a potom nad duži $\overline{OB}$ opišemo polukružnicu. Presek ove polukružnice sa pravcem vektora $\vec{a}_{BN}$ odrediće centar krivine, C_{KN}.

Dokaz:

Na osnovu analitičkih izraza za poluprečnik krivine $\dfrac{V_B^2}{a_{B\omega}} = r_\omega$ i $\dfrac{V_B^2}{a_{BN}} = r_N$ sledi proporcija $\dfrac{a_{B\omega}}{r_N} = \dfrac{a_{BN}}{r_\omega}$, pa zaključujemo da je trougao $BC_{KN}C_{K\omega}$ sličan trouglu koga formiraju vektori $\vec{a}_{B\omega}$ i $\vec{a}_{BN}$. Znači, ugao $BC_{KN}C_{K\omega} = 2\beta$. A pošto je to ugao nad tetivom ($\overline{BC_{K\omega}}$) kružnice, tačka C_{KN} mora biti na kružnici, poput tačke O.

6. ZAKLJUČAK

Grafoanalitički postupak određivanja ubrzanja, prikazan ovim radom, zahteva primenu elipsi. U neko davno vreme njenom ručnom konstrukcijom nismo mogli da postignemo zadovoljavajuću tačnost, ali danas, početkom XXI veka, veliki broj crtačkih i modelarskih programa to može da ostvari.

A kada je reč o određivanju centra krivine, primetno je da izloženi postupak važi samo za tačke na ravni simetrije. Bilo bi od interesa pronaći, ako je moguće, grafičku konstrukciju koja nema to ograničenje.

LITERATURA

[1] Rašković D, *Osnovi teorije mehanizama*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1964.

[2] Rašković D, Zbirka zadataka iz mehanike, II, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1967.

[3] Kojić M, Mićunović M, *Kinematika*, Mašinski fakultet, Kragujevac, 1975.

[4] Rašković D, *Mehanika II, Kinematika*, Naučna knjiga, Beograd, 1948.

[5] Doleček V, *Kinematika*, Mašinski fakultet, Sarajevo, 2005.

SUMMARY

GRAPHOANALYTICAL DETERMINATION OF ACCELERATION DURING REGULAR PRECESSION

In this paper, which deals with spherical motion, the additional acceleration from Rivals' theorem is first explained, and then, for regular precession, a graphoanalytic procedure for determining acceleration using ellipses is given.

In addition, it is shown how to graphically determine the center of a curve if the observed point is on a plane of symmetry.

Key words: *Regular precession, graphoanalytical determination of acceleration, center of curvature*