Određivanje brzina i ubrzanja u mrtvom položaju zglavkastog četvorougla metodom zaustavljanja

MILOŠ D. LJUBOMIROVIĆ, ELMOS, Jagodina
DRAGAN V. LJUBOMIROVIĆ, Prva tehnička škola, Jagodina

Stručni rad
UDC: 514.758
DOI: 10.5937/tehnika2103326L

Rad proučava ravni zglavkasti četvorougao u mrtvom, kinematski neodređenom položaju. Mehanizam bi mogao iz tog položaja da nastavi kretanje, kontinualno, ili pak, da gonjena poluga zastane i krene unazad. Ali, ako ovu drugu mogućnost eliminišemo, položaj mehanizma više nije neodređen i logično bi bilo da nekom kinematskom metodom možemo odrediti nepoznate brzine i ubrzanja. Autori ovog rada su, primenivši metodu zaustavljanja, došli do analitičkih izraza za određivanje nepoznatih brzina i ubrzanja u mrtvom položaju zglavkastog četvorougla.

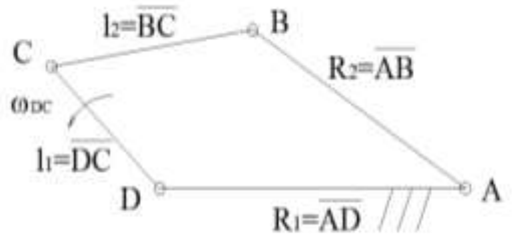
Ključne reči: *zglavkasti četvorougao, mrtav položaj, kinematska neodređenost, metoda zaustavljanja*

1. UVOD

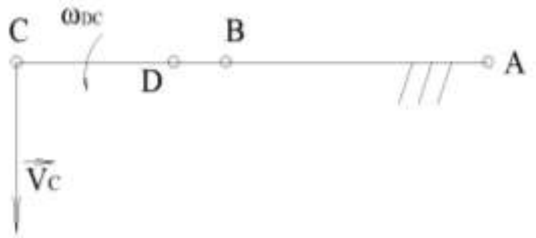
Ako dužine poluga zglavkastog ravnog četvorougla (slika 1) ispunjavaju uslov

$$R_1 + l_1 = R_2 + l_2 \tag{1}$$

onda taj mehanizam može doći u tzv. mrtvi položaj, kada se pravci poluga poklapaju (slika 2).



Slika 1 - Zglavkasti četvorougao



Slika 2 - Mrtvi položaj zglavkastog četvorougla

Adresa autora: Miloš Ljubomirović, ELMOS, Jagodina, Despota Stefana bb
e-mail: milos_ljubomirovic@gmail.com
Rad primljen: 20.11.2020.
Rad prihvaćen: 10.05.2021.

To je položaj u kome mehanizam ima dva stepena slobode kretanja, jer poluga *AB* može da promeni smer i krene unazad. U praksi, poluga bi usled inercije trebala da nastavi kretanje u započetom smeru, ali zbog preopterećenja mehanizma, vibracija, netačnosti pri izradi… možda i ne bude tako.

Problem se rešava dodatnim teretom radi povećanja inercije, ili dogradnjom mehanizma, ali to nije tema ovog rada.

Mi posmatramo mehanizam koji nastavlja kretanje u započetom smeru, i želimo da odredimo brzinu i ubrzanje u tački *B*, na osnovu poznate konstantne pogonske ugaone brzine $\vec{\omega}_{DC}$, odnosno brzine tačke *C*, $\vec{Vc} = \vec{\omega}_{DC} \times \vec{l}_1$.

Pogledajmo moguće pokušaje određivanja brzine i razloge neuspeha:

Prva, najopštija, grafička metoda plana brzina ne daje rezultat zato što su brzine $\vec{V_C}, \vec{V_B}$ i $\vec{V_B^C}$ međusobno paralelne, pa su u planu brzina na istoj pravoj.

Druga metoda je nalaženje trenutnog pola brzina, P_v, u preseku polnih pravaca. Međutim, u mrtvom položaju polni pravci se poklapaju pa ne uočavamo presečnu tačku.

Treća mogućnost direktno nadovezana na drugu, bila bi da za proizvoljni položaj četvorougla odredimo jednačinu rulete, nepokretne ili pokretne, ali time smo jedan težak zadatak učinili još težim.

Četvrti pokušaj je primena teoreme Robertsona [1], i uvođenje u razmatranje još jednog četvorugaonog mehanizma. Ali, pokazalo se da originalni i pomoćni mehanizam u istom trenutku ulaze u mrtvi položaj, pa nikakvu dobit od ovog proširenja nemamo.

Peti pokušaj, najjednostavniji od mogućih analitičkih varijacija, jeste postavljanje jednačina preko koordinata [2]. Ovde je razlog neuspeha dobro poznat iz elementarne teorije sistema jednačina: imamo dve nepoznate veličine, ω_{AB} i ω_{BC}, a samo jednu skalarnu jednačinu. Druga se izgubila zato što se projekcije na *y*-osu svode na nulu.

Matematički posmatrano, potrebna nam je dopunska jednačina, što možemo videti u [3] ili [4]. U radu [3] određene su nepoznate ugaone brzine, a u [4] trenutni pol brzina, i tako, indirektno, dolazimo do same brzine $\overrightarrow{V_B}$.

Principijelno, reč je o istom postupku zasnovanom na opštepoznatom Ojlerovom obrascu koji uspostavlja vezu između ubrzanja dve tačke tela koje izvodi ravno kretanje.

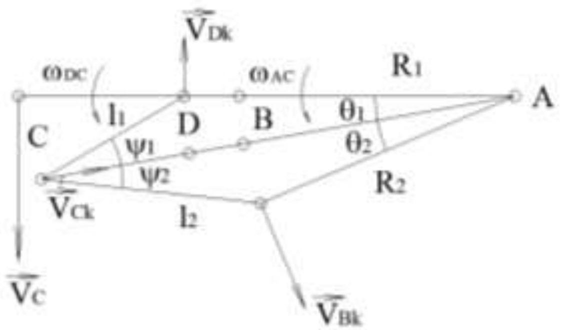
Međutim, ono što nas više interesuje sada jeste činjenica da ovim putem nismo u stanju odrediti nepoznato tangencijalno ubrzanje, $\vec{a}_{BT}^{A}$.

Zato, upoznajmo metodu zaustavljanja, koja to omogućuje, a nazvana je tako po analogiji sa Willisovom metodom zaustavljanja kod planetarnih prenosnika.

2. ODREĐIVANJE BRZINA

Zamislimo (slika 3) da su u mrtvom položaju sve poluge u krutoj vezi i okreću se oko tačke *A* ugaonom brzinom

$$\omega_{AC} = \frac{V_C}{R_1 + l_1} = \frac{\omega_{DC} \cdot l_1}{R_1 + l_1} \tag{2}$$



Slika 3 - Metoda zaustavljanja

Neka su, koji tren kasnije, poluge opet zglobno vezane, pa ćemo mehanizam zaustaviti i polugu R_1 vratiti u početni položaj ugaonom brzinom ω_{AC}. Poluga R_1 povlači polugu l_1, pa se tačka *C* pomera duž pravca $\overline{CA}$ kao klip na klipnom mehanizmu.

Brzinu tačke *C* možemo odrediti po poznatom obrascu [1]

$$V_{Ck} = V_{Dk} \frac{\sin(\theta_1 + \psi_1)}{\cos(\psi_1)} \tag{3}$$

gde je

$$V_{Dk} = \omega_{R1} \cdot R_1 = \omega_{AC} \cdot R_1 \tag{4}$$

Slično, preko poluga R_2-l_2 imamo

$$V_{Ck} = V_{Bk} \frac{\sin(\theta_2 + \psi_2)}{\cos(\psi_2)} \tag{5}$$

Brzinu V_{Bk} određujemo po izrazu

$$V_{Bk} = \omega_{R2} \cdot R_2 = k \cdot \omega_{R1} \cdot R_2 = k \cdot \omega_{AC} \cdot R_2 \tag{6}$$

gde je *k* koeficijent proporcionalnosti koji tek treba odrediti.

Sada iz (3), (4), (5) i (6) dolazimo do izraza

$$k = \frac{\omega_{R2}}{\omega_{R1}} = \frac{R_1}{R_2} \frac{\sin(\theta_1 + \psi_1)}{\sin(\theta_2 + \psi_2)} \frac{\cos(\psi_2)}{\cos(\psi_1)} \tag{7}$$

U početnom položaju (a to je za nas mrtvi položaj), kada $t \to 0$, imaćemo:

$$\theta_1 \to 0, \theta_2 \to 0, \psi_1 = \arcsin(\frac{R_1}{l_1} \sin\theta_1) \to 0,$$

$$\psi_2 = \arcsin(\frac{R_2}{l_2} \sin\theta_2) \to 0$$

pa se u izrazu (7) javlja neodređeni količnik

$$k = \frac{R_1}{R_2} "\frac{0}{0}"$$

Sledi traženje limesa na osnovu Lopitalovog pravila:

$$k = \lim_{t \to 0} \frac{R_1}{R_2} \frac{\cos(\theta_1 + \psi_1)}{\cos(\theta_2 + \psi_2)} \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1}{\dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{R_1}{R_2} \frac{\cos(\theta_1 + \psi_1)}{\cos(\theta_2 + \psi_2)} \frac{\omega_{R1} + \frac{R_1}{l_1} \frac{\cos\theta_1}{\cos\psi_1} \omega_{R1}}{k \cdot \omega_{R1} + \frac{R_2}{l_2} \frac{\cos\theta_2}{\cos\psi_2} (k \cdot \omega_{R1})} \tag{8}$$

Znači,

$$k = \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \frac{l_2}{l_1}} \tag{9}$$

Stvarna brzina u tački *B* sada glasi:

$$V_B = \omega_{R1} \cdot R_2 (1 + k) \tag{10}$$

ili, posle zamene

$$V_B = V_C \frac{R_2}{R_1 + l_1}\left(1 + \sqrt{\frac{R_1 \cdot l_2}{R_2 \cdot l_1}}\right) \tag{11}$$

Položaj trenutnog pola brzina (gledano od *B* ka *A*), određuje se po izrazu

$$\overline{BP}_V = \frac{l_2 \cdot R_2 \left(1 + \sqrt{\frac{R_1 \cdot l_2}{R_2 \cdot l_1}}\right)}{l_2 - R_2 \cdot \sqrt{\frac{R_1 \cdot l_2}{R_2 \cdot l_1}}} \tag{12}$$

Obrazac (11) mogli smo izvesti i postavljanjem relacije za normalna ubrzanja,

$$a_{CN}^{D} - a_{BN}^{C} = a_{BN}^{A} \tag{13}$$

Odavde, zamenom i sređivanjem dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot V_B^2 - \frac{2 \cdot V_C}{l_2} V_B + \left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}\right) \cdot V_C^2 = 0 \tag{14}$$

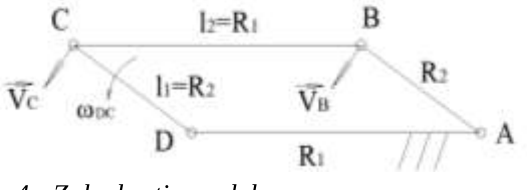
čije je jedno rešenje (11), a drugo takođe ima fizikalno tumačenje i odgovara situaciji kada tačka *B* ulazi u mrtvi položaj sa suprotne strane (što ćemo videti u poglavlju 6, slika 8).

Ovaj postupak je jednostavniji, ali kao što smo rekli u uvodu, metoda zaustavljanja omogućuje određivanje i nepoznatog tangencijalnog ubrzanja.

Pre nego što i to pogledamo, proverićemo dobijene formule na dva specijalna geometrijska oblika zglavkastog četvorougla.

3. PARALELOGRAM

Kod mehanizma u obliku paralelograma (slika 4) poznato je da poluga l_2 izvodi kružno translatorno kretanje, i $\vec{V}_B = \vec{V}_C$.

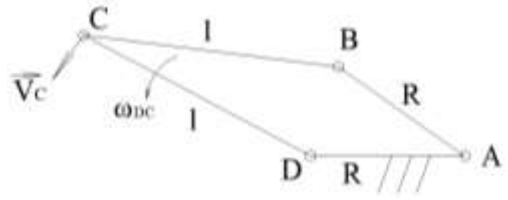


Slika 4 - Zglavkasti paralelogram

A iz (9) imamo da je $k = \frac{R_1}{R_2}$, pa iz (11) sledi takođe $V_B = V_C$.

4. DELTOID

Na slici 5 vidimo zglavkasti četvorougaoni mehanizam u obliku deltoida.



Slika 5 - Zglavkasti deltoid

S obzirom na olakšavajuću, simetričnu, geometriju, izvedene su jednačine ruleta [5], [6] i određen trenutni pol brzina u mrtvom položaju:

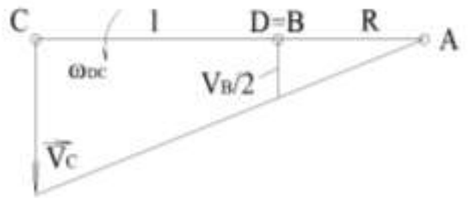
$$\overline{BP}_V = \frac{2 \cdot l \cdot R}{l - R} \tag{15}$$

a time i brzina u tački *B*

$$V_B = V_C \frac{2 \cdot R}{R + l} \tag{16}$$

A po obrascu (9) imamo da je $k = 1$, što smo mogli utvrditi još iz izraza (7), bez Lopitalovog postupka, uzevši u obzir da važi $\theta_1 + \psi_1 = \theta_2 + \psi_2$. Dalje, iz (11) sledi izraz (16).

Brzinu V_B mogli smo veoma lako odrediti i grafičkom konstrukcijom prikazanom na slici 6:



Slika 6 - Grafičko određivanje brzine

5. ODREĐIVANJE UBRZANJA

Znajući brzinu u tački *B*, odredićemo normalno ubrzanje te tačke

$$a_{BN}^{A} = \frac{V_B^2}{R_2} \tag{17}$$

Tangencijalno ubrzanje u tački *B* jednako je nuli, a to zaključujemo ovako:

Prolaskom kroz mrtvi položaj mehanizam, a sa njim i putanja trenutnog pola brzina, preslikavaju se kao u ogledalu. To znači da će tangenta na rulete u mrtvom položaja biti upravna na osu, a shodno tome normala $P_v tn$ koordinatnog sistema poklapa se sa osom mrtvog položaja.

S obzirom da je u *C*, usled konstantne ugaone brzine ω_{DC}, $a_{CT}^{D} = 0$, sledi da je ta tačka na prelaznom Bresovom krugu, koji se, znamo [7], ako ima beskonačno veliki poluprečnik poklapa sa normalom *n*. A kako se i tačka *B* nalazi na toj normali, tj. prelaznom krugu, to i njeno tangencijalno ubrzanje mora biti jednako nuli.

Dakle,

$$a_{BT}^{A}=0 \tag{18}$$

Sledi da je u mrtvom položaju $\varepsilon_{BC}=0$, pa položaj trenutnog pola ubrzanja, P_a, na *n* osi određujemo po obrascu

$$\overline{BP_a}=\frac{a_{BN}^{A}}{\omega_{BC}^{2}} \tag{19}$$

Sve do sada smatrali smo da je pogonska ugaona brzina konstantna.

Ako nije, tangencijalno ubrzanje u tački *B* možemo odrediti diferenciranjem, pod uslovom da znamo njenu brzinu u proizvoljnom položaju, a ona glasi:

$$V_B=V_C[\frac{\cos\psi_1\cdot R_2}{R_1\cdot\cos\theta_1+l_1\cdot\cos\psi_1}\cdot \cdot(1+\frac{R_1}{R_2}\frac{\sin(\theta_1+\psi_1)}{\sin(\theta_2+\psi_2)}\frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_1})] \tag{20}$$

Sledi izraz za tangencijalno ubrzanje u proizvoljnom položaju:

$$a_{BT}^{A}=\frac{dV_B}{dt}=a_{CT}^{D}[\frac{\cos\psi_1\cdot R_2}{R_1\cdot\cos\theta_1+l_1\cdot\cos\psi_1}\cdot \cdot(1+\frac{R_1}{R_2}\frac{\sin(\theta_1+\psi_1)}{\sin(\theta_2+\psi_2)}\frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_1})]+V_C\cdot[...]' \tag{21}$$

U mrtvom položaju ovo je neodređeni izraz, i nakon dva Lopitalova postupka ispostavlja se da je $\lim_{t\to 0}[...]'=0$, pa (21) ima oblik:

$$a_{BT}^{A}=a_{CT}^{D}\frac{R_2}{R_1+l_1}(1+\sqrt{\frac{R_1\cdot l_2}{R_2\cdot l_1}}) \tag{22}$$

Proverićemo (22) na primeru zglavkastog deltoida (slika 7):

Slika 7 - Zglavkasti deltoid i trenutni pol brzina

Položaj trenutnog pola brzina određuje se [6] po obrascu

$$\overline{BP_V}=\frac{2\cdot l\cdot R(l-R\cdot\cos\varphi_1)}{l^2-R^2} \tag{23}$$

pa imamo

$$V_B=\overline{BP_V}\cdot\frac{l\cdot\omega_{DC}}{l+\sqrt{(\overline{BP_V}-R)^2+R^2-2\cdot(\overline{BP_V}-R)\cdot R\cdot\cos\varphi}} \tag{24}$$

Posle diferenciranja, uzevši u obzir da u mrtvom položaju važe (15) i $\overline{BP_V}'=0$,

sledi

$$a_{BT}^{A}=a_{CT}^{D}\frac{2\cdot R}{R+l} \tag{25}$$

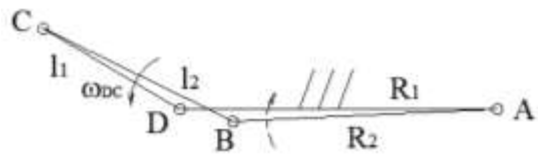
Isti izraz dobijamo iz (22).

6. VARIJACIJE MEHANIZMA

Sada, kada smo upoznali novu metodu, pogledajmo još neke varijante zglobnog četvorougaonika pri ulasku u mrtvi položaj.

Na slici 8 vidimo ukršteni položaj 1, a veza između brzina glasi:

$$V_B=V_C\frac{R_2}{R_1+l_1}(1-\sqrt{\frac{R_1\cdot l_2}{R_2\cdot l_1}}) \tag{26}$$



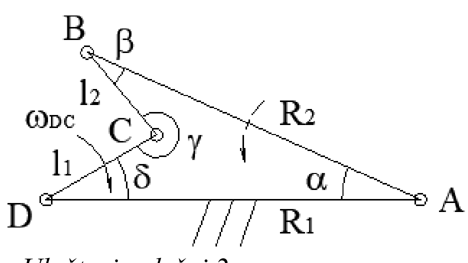
Slika 8 - Ukršteni položaj 1

Slika 9 prikazuje ukršteni položaj 2, koji može ući u mrtvi položaj ako je ostvaren uslov

$$R_1-l_1=R_2-l_2 \tag{27}$$

pa imamo

$$V_B=V_C\frac{R_2}{R_1-l_1}(1+\sqrt{\frac{R_1\cdot l_2}{R_2\cdot l_1}}) \tag{28}$$



Slika 9 - Ukršteni položaj 2

Da ne bi došlo do greške u označavanju poluga treba se držati sledećeg redosleda i pravila:

Najpre dovedemo mehanizam blizu mrtvog položaja i obeležimo postolje mehanizma sa R_1, a spojnu polugu sa l_2.

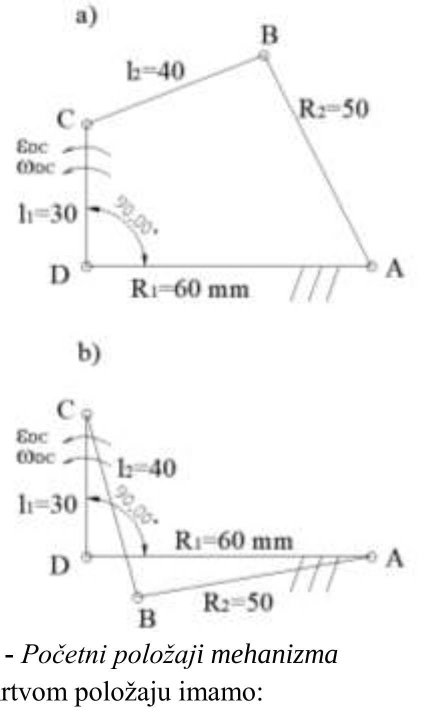
Sa R_2 označićemo bočnu polugu koja u četvorouglu ima oštar ugao u odnosu na postolje.

Primetimo da u ukrštenom položaju 2 (slika 9) obe bočne poluge imaju oštre uglove, α i δ, ali poluga $\overline{DC}$ je vraćena unazad i sa pripadajućom polugom $\overline{CB}$ gradi tup ugao (γ), pa po tome znamo da $\overline{DC}$ nije R_2, već l_1.

Podrazumeva se da iz (26) i (28) slede i tagencijalna ubrzanja.

7. PRIMER

Za mehanizam dat na slici 10 odrediti brzine i ubrzanja tačaka *C* i *B* u mrtvom položaju. Početna ugaona brzina $\omega_{DC} = 0$, a ugaono ubrzanje $\varepsilon_{DC} = 0{,}1\, s^{-2} = const$.



Slika 10 - Početni položaji mehanizma

U mrtvom položaju imamo:

$$\omega_{DC} = \sqrt{\varepsilon_{DC} \cdot \pi} = 0{,}56\, s^{-1},\ k = 1{,}26,$$

$$V_C = 16{,}81\, mm/s,\ a_{CN}^{D} = 9{,}42\, mm/s^2,$$

$$a_{CT}^{D} = 3\, mm/s^2$$

a)

$$V_B = 21{,}16\, mm/s,\ \omega_{BC} = -0{,}11\, s^{-1},$$

$$\overline{BP_v} = -194{,}87\, mm,\ a_{BN}^{A} = 8{,}95\, mm/s^2,$$

$a_{BT}^{A} = 3{,}77\, mm/s^2$ i ima smer brzine $\overrightarrow{V_B}$,tj. $\overrightarrow{V_C}$

b)

$V_B = -2{,}47\, mm/s$ i ima smer suprotan od $\overrightarrow{V_C}$,

$$\omega_{BC} = 0{,}48\, s^{-1},\ \overline{BP_v} = -5{,}13\, mm,$$

$$a_{BN}^{A} = 0{,}12\, mm/s^2,$$

$a_{BT}^{A} = -0{,}44\, mm/s^2$ i ima smer kao i $\overrightarrow{V_B}$.

8. ZAKLJUČAK

Opšte je poznato da se trajno kinematski neodređeni mehanizmi kreću proizvoljno, pa je besmisleno pokušavati da teorijski odredimo brzine i ubrzanja.

Ali, zglavkasti četvorougao je u mrtvom položaju samo trenutno kinematski neodređen, pa itekako ima logike pokušaj određivanja brzina i ubrzanja za izabranu varijantu kretanja.

Ovaj rad to pokazuje i možda otvara prostor za kinematsku analizu složenijih mehanizama u mrtvom položaju.

LITERATURA

[1] Rašković D, *Osnovi teorije mehanizama*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1964.

[2] Кирсанов М. Н., *Уравнения кинематики плоского механизма в координатной форме*, Теория механизмов и машин. №2(18). [Citirano 1.9.2020] Dostupno na: http://tmm.spbstu.ru/18/kirsanov_-18.pdf, 2011.

[3] Доронин Ф.А., *Свободные колебания шарнирного четырёхзвенника около особого положения покоя*. // Теория механизмов и машин. №1. С. 16-23. [Citirano 20.10.2020] Dostupno na: http://tmm.-spbstu.ru/19/2_doronin_19.pdf, 2012.

[4] Доронин Ф. А., *Нетрадиционные случаи определения положения мгновенного центра скоростей* // Бюллетень результатов научных исследований: электронный научный журнал. №2(1) – С.41-50 [Электронный ресурс]. [Citirano 18.10.2020] Dostupno na: https://cyberleninka.ru/article/n/netraditsionnye-sluchai-opredeleniya-polozheniya-mgnovennogo-tsentra-skorostey/viewer, 2012.

[5] Rašković D, *Mehanika II, Kinematika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1966.

[6] Bat M. I, Džanelidze G. J, Kelzon A. S, *Rešeni zadaci iz teorijske mehanike: sa izvodima iz teorije. Deo 1, Statika i kinematika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

[7] Arnovljević I, *Osnove teoriske mehanike III*, Naučna knjiga, Beograd, 1947.

SUMMARY

DETERMINATION OF VELOCITY AND ACCELERATION IN THE DEAD POSITION OF FOUR-BAR MECHANISM BY THE STOPPING METHOD

The paper studies a plane four-bar mechanism in a dead, kinematically indeterminate position. From that position, the mechanism could continue to move, continuously, or the driven lever would stop and move backwards. But, if we eliminate this second possibility, the position of the mechanism is no longer indeterminate and it would be logical that we can determine unknown speeds and accelerations by some kinematic method. The authors of this paper, applying the stopping method, came up with analytical expressions for determining unknown velocities and accelerations in the dead position of an four-bar mechanism.

Key words: *four-bar mechanism, dead position, kinematic indeterminate, stopping method*

TEHNIKA

Časopis "TEHNIKA" je naš vodeći naučno-stručni časopis iz oblasti tehničkih nauka i struka koji, u izdanju Saveza inženjera i tehničara, Srbije kontinuirano izlazi 76 godina. U časopisu se objavljuju radovi svrstani po oblastima: "Novi materijali", "Naše građevinarstvo", "Rudarstvo, geologija i metalurgija", "Mašinstvo", "Elektro-tehnika", "Saobraćaj", "Menadžment" i "Kvalitet-IMS, standardizacija i metrologija"; stalne rubrike: pregledi knjiga i časopisa, prikazi naučnih i stručnih skupova u zemlji i inostranstvu, informacije o tehničkim novostima kao i propagandne poruke domaćih i inostranih organizacija.

Svi objavljeni radovi obavezno prolaze kroz stručnu recenziju čime je obezbeđen visok naučni i stručni nivo. Objavljeni radovi se referišu u uglednim svetskim referalnim časopisima: Geotechnical Abstracts, Metals Abstracts, Chemical Abstracts, Electrical and Electronics Abstracts, Science Abstracts, Ergonomics Abstracts i referalnim žurnalima VINITI-a.

Takođe se obrađuju za inostrane baze podataka: SAIDC-el (ISKRA, SL), SAIDC-gr (CTK, SL), INSPEC (IEEE, UK), METADEX (M. I., UK), CASEARCH (CA, USA).

Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije svrstalo je časopis Tehnika u prvu kategoriju časopisa ove vrste.

Časopis izlazi dvomesečno na oko 180 strana, formata A4 i distribuira se u zemlji i inostranstvu (u oko 30 zemalja) putem pretplate i razmene.

Redakcija

SAVEZ INŽENJERA I TEHNIČARA SRBIJE

Kneza Miloša 7a/I, 11000 BEOGRAD

Telefon: (011) 32-35-891, Faks: (011) 32-30-067

www.sits.rs

e-mail: tehnika@sits.rs i office@sits.rs

ISSN 0013-5836

TEHNIKA

ELEKTROTEHNIKA

Electrical Engineering – Constructions
électrotechniques – Elektrotechnik – Електротехника

GODINA 70 – 2021. **BROJ 3**

REDAKCIJA I ADMINISTRACIJA: Savez inženjera i tehničara Srbije, 11000 Beograd, Kneza Miloša 7a/I, Telefon (011) 32 35 891, Fax (011) 32 30 067