# Primena linearnog programiranja na standardni problem maksimuma u transportu

*BOGDAN M. MARKOVIĆ*, ATSSB, Odsek za saobraćaj, mašinstvo i inženjerstvo zaštite, Beograd
*MILAN B. MARKOVIĆ*, ATSSB, Odsek za saobraćaj, mašinstvo i inženjerstvo zaštite, Beograd
*DRAGANA D. VELIMIROVIĆ*, ATSSB, Odsek za saobraćaj, mašinstvo i inženjerstvo zaštite, Beograd

*Stručni rad*
*UDC: 656:[005.311.12:519.852*
*DOI: 10.5937/tehnika2106781M*

*Radom se daje analiza transportnog plana primenom geometrijske interpretacije linearnog programiranja, dualnog pristupa i simpleks metode na optimiranje transportnog plana. Cilj je da se optimira transportni plan sa aspekta izbora tipa transportnog zadatka, tipa i obima angažovanja sredstava transporta a u cilju maksimizacije funkcije cilja koja reprezentuje zaradu. Pristup analizi ilustruje se karakterističnim zadatkom koji se u radu rešava na opisani način. Doprinos se ogleda u primeni dualnog pristupa na primal iskazan linearnom interpretacijom i nalaženje potpunog rešenja izuzimajući primenu transportnog problema. Osnovna razlika između ovog i do sada analiziranih zadataka je u tome što nametnuta ograničenja predstavljaju sistem nejednačina koji se uvođenjem fiktivnih promenljivih transformiše na sistem jednačina na koje se aplicira standardni problem maksimuma. Benefit ovog pristupa je jednostavniji ali i sveobuhvatniji prilaz analizi transportnog plana kada je prisutan veći broj ograničenja ali u okviru relativno manjih transportnih sistema kod kojih ne stoji kao opravdana potreba korišćenja gotovih softverskih paketa. Naglasak u radu je na maksimizaciji zarade uz ispunjenje nametnutih ograničenja. Analizom su dobijeni istovetni rezultati na sva tri načina.*

**Key words:** *linearno programiranje, standardni problem maksimuma, transport*

## 1. UVOD

Osnovni cilj linearnog programiranja u saobraćaju i transportu, [1] i [2] je ustanovljenje ekstremne vrednosti funkcije cilja koja predstavlja visinu troškova transporta, kada se iznalazi njen minimum kao i iznos zarade kada se iznalazi maksimum iste. Transportni plan sadrži skup više tipova transportnih sredstava kojima se može realizovati više opcija transportnih zadataka uz neophodnost zadovoljenja uslova – nametnutih ograničenja.

Izbor jedne ili više opcija transportnog zadatka kao optimalnih realizuje sa sa aspekta maksimalne zarade u vidu funkcije cilja. Linearno programiranje se aplicira na optimiranje transportnog plana putem:

- geometrijske interpretacije linearnog programiranja [2],
- simpleks metode i
- dualnog pristupa [1] i [3].

Osim toga, na sistem ograničenja, uslova, koji je koncipiran kao sistem nejednačina aplciraće se standardni problem maksimuma kako bi se preveo na sistem jednačina. Metoda se svodi na definisanje zadatka koji se sastoji u postavljanju funkcije cilja koja predstavlja efikasnost transportnog procesa ili visinu troškova, [4] i [5]. U zavisnosti od toga da li je sistem nejednakosti homogen ili ne sa aspekta znaka prisutna je primena standardnog problema maksimuma ili minimuma, dok se, u drugom slučaju, radi o mešovitom problemu. U radu se primenjuje samo standardni problem maksimuma.

## 2. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA LINEARNOG PROGRAMIRANJA I SIMPLEKS METODA

Simpleks metodu za analitičko rešavanje problema linearnog programiranja, u okviru operacionog

Adresa autora: Bogdan Marković, ATSSB, Odsek za saobraćaj, mašinstvo i inženjerstvo zaštite, Beograd, Katarine Ambrozić 3

e-mail: bmarkovic@tehniku.edu.rs

Rad primljen: 19.05.2021.

Rad prihvaćen: 09.11.2021.

istraživanja, razvio je Dancig, 1947 ÷ 1948 godine, [6], [7] i [8]. Zasniva se na dovođenju u oblast definisanosti i sukcesivnom poboljšanju prvoformiranog transportnog plana. Simpleks metoda omogućava primenu računarske podrške i formiranje algoritma radi dobijanja optimalnog plana i odgovarajućeg sredstva za korišćenje u okviru nekog saobraćajnog podsistema. Kod geometrijske interpretacije, za konačan, relativno mali broj uslova (nametnutih ograničenja, snimljenih stanja ili radnih zadataka koje je u nekom vremenu ili uz neki ograničeni iznos troškova potrebno realizovati) koje je potrebno zadovoljiti dobija se, u prvom prolazu, kako optimalan i fizički dopustivi plan, tako i optimalni tip sredstva za eksploataciju u okviru nekog podsistema. Ali, ako je broj uslova veći, geometrijsku interpretaciju nije pogodno primeniti i pribegava se korišćenju simpleks metode. U radu, plan reprezentuje transportni proces koji je potrebno optimirati izborom odgovarajućeg tipa transportnog/prevoznog sredstva: $x_i$ za eksploataciju. Kriterijum je minimum ili maksimum vrednosti funkcija cilja: *Fc*, u zavisnosti od toga da li se radi o troškovima ili efikasnosti procesa. Geometrijskom interpretacijom ustanovljavaju se:

- n - dimenzioni vektor: $x = x(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$
- $x_i \geq 0$ - promenljive,
- i =1, 2 ... n, - oznaka promenljivih,
- -n – ukupan broj promenljivih;
- D - domen – prostor ograničen poliedarskom izlomljenom linijom.

Domen se formira preko nametnutih uslova, ograničenja, iskazanih sistemom od *m* nejednačina:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i - b_i \geq 0 \Leftrightarrow [A]\cdot\{x\} \geq \{b\},\ j = 1..m \quad (1)$$

pri čemu su:

$$- [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ : & \ldots & : \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{- matrica sistema,} \quad (2)$$

koeficijenata uz *x*,

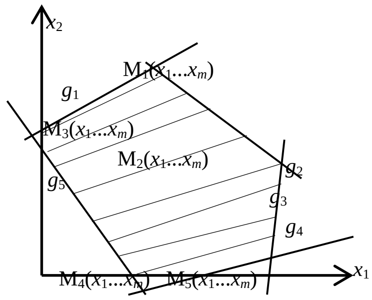
- $j$ = 1,2 ... $m$ – oznaka uslova: $g_j$, sl. 1,

- $m < n$ – ukupan broj uslova,

-$\{x\}$- vektor kolona nepoznatih veličina koje reprezentuju troškove, obim korišćenja ili broj angažovanih sredstava za rad, ovde za eksploataciju, tipa: *i*,

-$\{b\}$-vektor kolona ukupnog opterećenja po uslovu: *j* koje se odnosi na maksimalno dozvoljeno vreme realizacije zadatka, minimalne troškove po zadatku ili na neophodno minimalno postignutu dobit.

Temena poligonalne linije: $M_1 \div M_5$, sl. 1, predstavljaju tačke preseka pravih koje reprezentuju ograničenja $g_j$ iskazana linearnim zavisnostima od dve bazisne promenljive: $x_1$ i $x_2$, sl. 1.




*Slika 1 - Domen: D, pri čemu se: g odnosi na linearne funkcije kojima su definisani uslovi – nametnuta ogranicenja*

Funkcija cilja sledi u vidu:

$$F_c = F_c(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i, \ (3)$$

pri čemu je: $c_i$ – učešće $i$ - te promenljive u funkciji cilja.

Ona dostiže ekstremnu vrednost u jednom ili više temena polinoma, pri čemu, minimalnu vrednost ima u temenu u kome „ulazi“ u domen, slika 1 a maksimum u onom u kome „napušta“ domen. Pogodnost geometrijske interpretacije je u mogućnosti neposrednog nalaženja optimalnog stanja.

U slučaju optimiranja iznalaženjem minimuma funkcije cilja optimalno sredstvo se nalazi kao ono koje nedostaje u temenu sa koordinatama koje odgovaraju maksimumu funkcije cilja i obrnuto. Takođe, i funkcija cilja se izražava na isti način. Problem nastaje u slučajevima kada je broj uslova toliki da iznalaženje tačaka preseka pravih postaje poteškoća i tada se pribegava primeni simpleks metode.

Simples metoda zasniva se na iznalaženju optimalnog među svim dopustivim planovima i to metodom eliminacije nepovoljnih promenljivih, [2], [4] i [5]. Na taj način, iterativno, dolazi se do optimalnog plana i promenljive koju treba zadržati u eksploataciji. To nije smetnja imajući u vidu mogućnost primene računarske podrške i velikog broja uslova koje je potrebno zadovoljiti. Na taj način javlja se kontinualno smanjenje domena, [9] i [10]. Definiše se rang sistema (2) u vidu:

$$r = m = n - k,$$

pri čemu je $k = n - m$, broj slobodnih, nezavisno promenljivih veličina $\bar{x}_s, s = 1, \ldots, k$, koje su, po proizvoljnoj pretpostavci prve iteracije, jednake nuli i odnose se na tip sredstava koji se izuzimaju iz eksploatacije. Preostalih $m$ promenljivih predstavljaju zavisno promenljive i one se, kao i funkcija cilja, (3), izražavaju u funkciji od prethodnih:

$$x_l = x_l\left(\bar{x}_1,...\bar{x}_k\right), l = 1,...,m,$$
$$F_c = F_c\left(\bar{x}_1, \bar{x}_{2,}...\bar{x}_k\right). \quad (4)$$

Uvođenjem nezavisno promenljivih omogućava se variranje, optimiranje i prevođenje sistema nejednačina u sistem jednačina. Ovo se realizuje sukcesivnim isključivanjem tipa sredstva koje odgovara onoj promenljivoj čijim se uvećanjem učešća uzrokuje neodgovarajuća promena funkcije cilja. Prethodna slobodno promenljiva koja je odgovarala tipu sredstva sa nultim učešćem postaje zavisno promenljiva sa nenultim učešćem zamenjujući prethodnu zavisno promenljivu koja je imala nenulto učešće i postaje ona sa nultim. Ova konverzija promenljivih realizuje se u skladu sa kriterijumom, [5] i [10].

Nakon svake iteracije proverava se da li isključivanjem, odnosno, dodeljivanjem nulte vrednosti zavisno promenljivima funkcija cilja teži optimalnom stanju, odgovarajućem ekstremumu. Na taj način se formira novi dopustivi plan, jedan od mogućih, koji dalje vodi dalje ka konačnom, odnosno, optimalnom. Sledi rešenje kojim se ustanovljava optimalni tip transportnog sredstva, otimalni obim angažovanja istog, optimalni transportni plan koji rezultuje maksimalnom efikasnošću te i minimalnim troškovima, i sl. Pri tome se ispunjavaju uslovi, ograničenja,: $g_j$, $j$=1, ..., $n$, sl. 1.

## 3. STANDARDNI PROBLEM MAKSIMUMA

Rešavanje sistema nejednačina: (1) realizuje se prevođenjem istog na sistem jednačina kako bi se mogle primeniti navedene metode linearnog programiranja. Realizacija postupka će se ilustrovati kroz klasičan primer, [2] i [6], iz oblasti saobraćaja i logistike.

Ustanovljava se optimalna trasa za realizaciju transportnog zadatka koja odgovara maksimumu funkcije cilja, (3).

Ova funkcija se odnosi na dobit od eksploatacije *p* tipova sredstava transporta raspoređenih na nekoliko, *m*, trasa u toku vremenske jedinice a iskazanih u vidu funkcije cilja:

$z_{max}$[nov.jed.]=

$$=c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + ... + c_px_p. \quad (5)$$

Izraz (2) ekvivalentan je matričnoj prezentaciji u vidu:

$$z_{\max} = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i = \left[c_1, c_2, ..., c_p\right] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

U izrazima: (5) i (6), veličine predstavljaju:

- $c_i$[nov.jed./sredstvu] - dnevnu zaradu od eksploatacije sredstva tipa *i*, *i*=1, 2, ..., *p*,
- $x_i$ [sredstvo] - broj sredstava tipa *i*,
- *p* – ukupan broj raznih tipova ili proizvođača sredstava prevoza ili transporta.

Primenom ovakvog pristupa kod operacionih istraživanja izvode se zaključci o optimalnom vidu prevoza, analogno primeni višeparametarske korelacione analize, [11], [12] i [13]. Ovo bi u primeni bili paralelni pristupi na osnovu kojih su i doneta osnovna načela rentabilnosti poslovanja u saobraćaju na osnovu kojih sledi maksimalna efikasnost:

- minimizirati odnos broja pratilaca u odnosu na ukupnu masu/količinu robe koja se prevozi,
- minimizirati vreme koje jedinica transporta provede u procesu,
- minimizirati troškove realizacije prevoza, goriva i sl.

Ovi stavovi se predstavljaju, u skladu sa (1), putem ograničenja, uslova, koji moraju biti ispunjeni sa stanovišta troškova eksploatacije, u vidu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{Bmatrix} \le \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [A] \cdot \{x\} \le \{b\}. \quad (7)$$

U izrazu (7), veličine predstavljaju:

- $a_{ij}$[nov. jed.] - troškove eksploatacije sredstava prevoza tipa *i* na trasi: *j*,
- *j*=1, 2, ..., *m*, *m* - ukupan broj trasa na kojima se realizuje prevoz,
- $b_j$[nov.jed.] - ukupne troškove saobraćaja svih sredstava prevoza na *j* – toj trasi u toku dana.

Primenom linearnog programiranja kao i multiparametarske regresione analize, [14], [15], konstatuje se korelacija između ukupnog vremena transporta i parametara: vremena prevoza, vremena ranžiranja i vremena pretovara kada se radi o železničkom vidu prevoza a u cilju utvrđivanja dominantnog među navedenima.

Važno je navesti uslov koji sledi iz fizičke izvodljivosti zadatka a to je uslov nenegativnosti:

$$x_i \ge 0, \; i=1, 2, ..., p. \quad (8)$$

Kako bi se sistem nejednačina sveo na sistem jednačina proširiće se sistem (7) dodatnim, fiktivnim tipovima sredstava prevoza kako bi se dobio željeni oblik u opisu kako sledi, [5]:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + \quad + x_{n+2} = b_2, \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mp}x_p + \quad + x_{p+m} = b_m. \end{aligned} \quad (9)$$

Matrični zapis funkcije cilja formira se u vidu:

$$z_{\max} = \sum_{1}^{p+m} c_i x_i = \left[c_1, c_2, ..., c_p, c_{p+1}, ..., c_{p+m}\right] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \\ x_{p+1} \\ ... \\ x_{p+m} \end{Bmatrix}, \; c_{p+1}, c_{p+2}, ..., c_{p+m} = 0 \quad , \tag{10}$$

$x_i \geq 0$, $i=1, 2, ..., p, p+1, ..., n+m,$ pri čemu matrični zapis sistema jednačina: (9) sledi u vidu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mp} & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \\ x_{p+1} \\ ... \\ x_{p+m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [A] \cdot \{x\} = \{b\}. \tag{11}$$

## 4. PRIMENA DUALNOG PRISTUPA NA TRANSPORTNI PLAN ANALIZIRAN GEOMETRIJSKOM INTERPRETACIJOM KAO PRIMALOM

Transportni plan se, u velikom broju slučajeva, analizira formiranjem transportnog problema baziranog na primalnom pristupu koji se iskazuje u slučaju manjeg broja ograničenja, geometrijskom aproksimacijom linearnog programiranja, [16]. U slučaju, većeg broja ograničenja transportni problem se bazira na simpleks metodom opisani primal, [17]. Analiza, predmet rada, daje se kroz zadatak opisan u nastavku.

Troškovi eksploatacije sredstava tipa 1 pri realizaciji transportnog zadatka opcijom 1 iznose: 2 nov. jed. po sredstvu dok su, na istom tom poslu, troškovi eksploatacije sredstva tipa: 2: 3 nov. jed. Nameću se uslovi da ukupni troškovi realizacije opcije 1 transportnog zadatka sredstvima tipa 1 i 2 ne smeju biti veći od 21 nov. jed. Za realizaciju opcije 2 transportnog zadatka ukupni troškovi ne smeju biti veći od 60 nov. jed. a realizacija posla izvodi se sredstvima tipa 1 koja uzrokuju troškove eksploatacije 5 nov. jed. i sredstvima tipa 2 koja uzrokuju eksploatacione troškove 10 nov. jed. po sredstvu. Treća opcija transportnog zadatka koji treba realizovati mora biti izvedena uz ukupne troškove niže od 5 nov. jed. i to samo sredstvima tipa: 2 koja uzrokuju troškove 1 nov. jed. po sredstvu. Ustanovljava se optimalni trasportni plan geometrijskom interpretacijom i dualnim pristupom:

- koliko iznosi najveća moguća zarada,
- koju opciju transportnog zadatka treba odabrati i
- koliko je racionalno angažovati sredstava tipa 1 i 2 pa da zarada bude najveća, ako je zarada po sredstvu tipa 1 jedna nov. jed a zarada po sredstvu tipa 2 dve nov. jed.

Provera dobijenog rešenja izvršiće se primenom simpleks metode, pogl. 5.

Tabelarno, zadatak se može predstaviti putem tabele 1.

*Tabela 1. Transportni plan Zadatka*

| | tr.sred:1.[n.j.] | tr. sred:2.[n.j.] | limit troš.[n.j.] |
|---|---|---|---|
| Opcija 1 | 2 | 3 | 21 |
| Opcija 2 | 5 | 10 | 60 |
| Opcija 3 | 0 | 1 | 5 |
| Zarada | 1 | 2 | |

Primenom geometrijske interpretacije linearnog programiranja dobija se sistem nejednačina, (1) i funkcija cilja, (4) i (5), za primal.

Primal sistema definiše se na način kako sledi:

- nametnuti uslovi koji proističu iz postavke zadatka:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 21,$$
$$5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 60, \tag{12}$$
$$x_2 \leq 5;$$

- funkcija cilja čiji se maksimum traži sledi u vidu:

$$z = x_1 + 2 \cdot x_2. \tag{13}$$

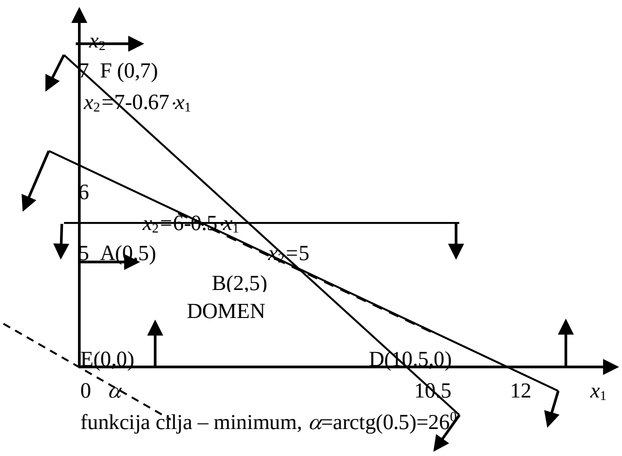
Koeficijent pravca prave funkcije cilja: $F_c$ ustanovljava se za uslov: $F_c=0$ putem:

$$0 = x_1 + 2 \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \cdot x_1, \text{ sl. 2.}$$

Funkcija cilja, (13), ostvaruje maksimum u tački: C(6, 3), sl. 2, veličine:

$$z_{max} = x_1 + 2 \cdot x_2 = 6 + 2 \cdot 3 = 12 \text{ nov. jed,}$$

što se smatra rešenjem primala transportnog plana.




*Slika 2 - Rešenje primala*

Dual sistema nalazi se ako se, za matricu sistema, umesto: [A] primala uvede transponovana matrica: $[A]^T$. Odnosno, kada se umesto sistema (12) sa $p=2$ nepoznate i $m=3$ uslova i koeficijentima: $a_{11}=2$, $a_{12}=3$, u nejednačini: 1, $a_{21}= 5$, $a_{22}=10$, u nejednačini: 2 i $a_{31}=0$, $a_{32}=1$, u nejednačini: 3 primala, uvede sistem sa $p_1=3$ $y$ promenljive i $m_1=2$ nametnuta uslova, sistema duala. Sistem duala se predstavlja u vidu:

- nametnutih uslova koji proističu iz (12):

$$2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1 \Rightarrow y_2 \geq 0.2 - 0.4 \cdot y_1,$$

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \geq 2 \Rightarrow$$

$$y_3 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0.2 - 0.4 \cdot y_1;$$

pri tome su članovi $b_1$ kolone sistema duala koeficijenti uz promenljive maksimuma funkcije cilja primala: $z$, (13): $z_{prim\ 1}= 1$, $z_{prim\ 2}= 2$, isprekidana linija, sl. 2;

- funkcije cilja duala koja se ustanovljava formiranjem transponovane vektor kolone: $b$ primala: (12) u vidu:

$$\{b\}^T = \begin{bmatrix} 21 & 60 & 5 \end{bmatrix},$$

te sledi:

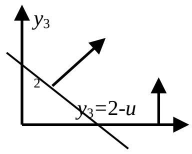
$$z_{min} = 21 \cdot y_1 + 60 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3. \qquad (14)$$

Na taj način se pojednostavljuje rešavanje zadatka s obzirom da se, umesto tri nejednačine (primal), rešavaju dve (dual), [12].

Potrebno je napomenuti da se promenljive: $y_i$, kod duala odnose na opcije realizacije transportnog zadatka, uslove, odnosno, ograničenja kod primala, T.1.

Domen za dualnu prezentaciju formira se putem, slici 3:

$$2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1 \text{ i } 3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \geq 2. \qquad (15)$$




*Slika 3 - Zavisnost promenljive $y_3$ duala od pomoćne promenljive: u, prema (16)*

Uvodi se smena:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 = u \qquad (16)$$

odakle sledi:

$$\Rightarrow y_3 \geq 2 - u \wedge y_3 \geq 0, \text{ sl. 3.}$$

Konstatuje se da je nejednačina:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \geq 2,$$

definisana za svako: $u \in (-\infty, \infty)$. Odnosno, nejednačina je zadovoljena pri:

$$u = 3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 \geq 2 \text{ i za } u = 3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 < 2.$$

Prema tome, nejednačina (16) definisana je za svako $u$: $u \in (-\infty, \infty)$. Ali važi i uslov:

$$y_3 \geq 0,$$

što je ispunjeno ako je:

$$u \leq 2, \text{ sl. 3.} \qquad (17)$$

Na osnovu toga, traži se presek ova dva skupa:

$$u \in (-\infty, \infty) \cap u \leq 2.$$

Za oblast definisanosti nejednačina: (15) i (16) slede dva uslova:

I $u > 2 \Rightarrow$ presek:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 \geq 2 \wedge 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1, \qquad (18)$$

sledi neprazan skup, presek dva skupa te i oblast definisanosti:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 \geq 2 \text{ uz } 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1, \qquad (19)$$

boldovana linija strelica, sl. 4;

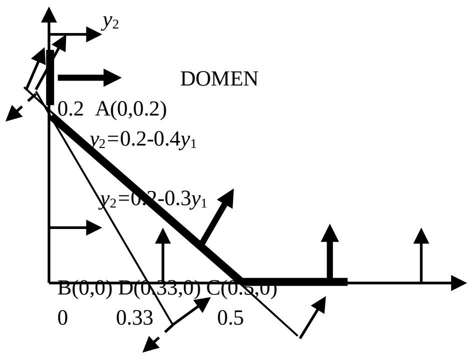
II $u \leq 2 \Rightarrow$ presek:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 \leq 2 \wedge 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1, \qquad (20)$$

sledi dodir dva skupa:

$$3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 \leq 2 \wedge 2 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \geq 1,$$

odnosno presek: $u > 2 \cap u \leq 2 \Rightarrow y_3 \geq 0$, sl. 3, koji čini samo tačka A(0,0.2), sl. 4.




*Slika 4 - Rešenje duala, (15)*

Na osnovu navedenih uslova rešenje zadatka predstavlja presek oblasti definisanosti nejednačina: (18) i (20). Konstatuje se da egzistiraju samo nejednakosti:

$$y_2 \geq 0.2\text{-}0.3 \cdot y_1,\ i$$

$$y_2 \geq 0.2\text{-}0.4 \cdot y_1,\ sl.\ 4.$$

Domen je, prema tome, poluprostor:

$$\infty - A - C\ (0.5, 0, 0.5) - \infty,\ sl.\ 4.$$

Pri tome $y_3$ se nalazi zamenom: $y_1$=0.5 i $y_2$=0 u uslov: I, (18) u vidu:

$$3 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0 + 1 \cdot y_3 \geq 2 \Rightarrow$$

$$y_3 \geq 0.5 \wedge y_3 \geq 0 \Rightarrow y_3 \geq 0.5.$$

Sledi da će funkcija cilja imati najmanju vrednost za najmanje moguće $y_3$ koje, u ovom slučaju, takođe, iznosi: $y_3$=0.5. Prema tome funkcija cilja će biti:

$$z_1 = 21 \cdot 0.5 + 60 \cdot 0 + 5 \cdot 0.5 = 13\ nov.jed.$$

Ustanovljava se da će minimum funkcije cilja duala biti za:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0.2,\ y_3 = 0$$

i iznosiće: 12 nov. jed, pri čemu su uslovi nametnuti primalom za transportne zadatke ispunjeni u slučaju neizvršavanja transportnog zadatka; za opcije: 1 i 3. Odavde sledi da će najveća dobit da se ostvari realizacijom drugog transportnog zadatka a uz zadovoljenje nametnutih ograničenja.

## 5. PROVERA REŠENJA DOBIJENOG PRIMALOM PRIMENOM SIMPLEKS METODE

Izvršiće se provera primalom dobijenog rešenja primenom simpleks metode na transportni plan opisan standardnim problemom maksimuma. Ustanovljava se da li je maksimum funkcije cilja zaista 12 nov.jed, a za sistem nametnutih uslova u vidu (12). Iz sistema nejednačina:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 21,\ 5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 60,\ x_2 \leq 5,$$

a na osnovu standardnog problema maksimuma, sledi sistem jednačina u vidu:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 21,\ 5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 1 \cdot x_4 = 60,$$

$$x_2 + 1 \cdot x_5 = 5, \qquad (21)$$

kao i funkcija cilja:

$$z_{max} = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5. \qquad (22)$$

Konstatuje se veći broj promenljivih od broja uslova, naime:

$$n = 5 > m = 3,$$

što je i uslov za primenu linearnog programiranja te i simpleks metode. Kako je broj jednačina, nametnutih uslova: $m$= 3 i broj nepoznatih $n$=5, sledi broj slobodno, nezavisno, promenljivih:

$$k = n - m = 5 - 3 = 2.$$

Usvajaju se, proizvoljno, za slobodno, promenljive: $x_4$ i $x_5$, pri čemu su: $x_1$, $x_2$ i $x_3$ zavisno promenljive za sistem (21) u vidu:

$$\begin{aligned} &5 \cdot x_1 = 60 - x_4 - 10 \cdot (5 - x_5) \Rightarrow x_1 = 2 - 0.2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 \\ &x_2 = 5 - x_5, \\ &x_3 = 21 - 2 \cdot x_1 - 3 \cdot (5 - x_5) \Rightarrow x_3 = 2 + 0.4 \cdot x_4 - x_5 \end{aligned} \qquad (23)$$

Zamenom dobijenih vrednosti za slobodno promenljive, (23) u (13) sledi funkcija cilja:

$$z = x_1 + 2 \cdot x_2 = 2 - 0,2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 + 2 \cdot (5 - x_3)$$

$$z = 12 - 0.2 \cdot x_4 \qquad (24)$$

Nalazi se da je funkcija optimalna, odnosno, postiže maksimum za:

$$\begin{aligned} &x_4 = x_5 = 0, \\ &x_1 = 2 - 0.2 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 /_{x_4=0, x_5=0} = 2, \\ &x_2 = 5 - x_5 /_{x_5=0} = 5, \\ &x_3 = 2 + 0.4 \cdot x_4 - x_5 /_{x_4=0, x_5=0} = 2, \end{aligned} \qquad (25)$$

i iznosi:

$$z_{\max} = 12 - 0.2 x_4 = 12\ nov.jed. \qquad (26)$$

Ovo je maksimum funkcije cilja iz razloga što bi, u slučaju da $x_4$ ne bude slobodno promenljiva, te da nije nakon iteriranja jednaka nuli, njeno rešenje bi bilo veće od nule, i uticalo bi da funkcija bude manja od 12 nov. jed, (26).

Naime, kada je $x_4$=0 funkcija je najveća. Ovo sledi i iz tablice: T. 2, prema pogl. 3, [5] i [12], za sistem jednačina (25), odakle se nalazi da su koeficijenti uz slobodno promenljive funkcije cilja $\gamma_1$ i $\gamma_2$:

$$\gamma_1 > 0 \text{ i } \gamma_2 = 0,$$

što i odgovara cilju zadatka.

Na osnovu T. 2. sledi funkcija cilja u vidu:

$$z = 12 - 2 \cdot x_4 \Rightarrow /_{x_4=0}\, z_{\max} = 12.$$

Ovo odgovara rezultatu dobijenom za maksimum funkcije cilja primala i za minimum funkcije cilja duala. Pri tome, veličine slobodno promenljivih iznose:

$$x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2.$$

*Tabela 2. Tablica simpleks metode zadatka primenjene na primal*

| | $\beta/\gamma$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 0.2 | -2 |
| $x_2$ | 5 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 2 | -0.4 | 1 |
| $z$ | 12 | 2 | 0 |

Imajući u vidu da je promenljiva: $x_3$ fiktivna, sledi:

$$x_1 = 2, x_2 = 5, z_{\max} = 12.$$

Dobijene vrednosti su u skladu sa dijagramom, slika 2.

## 6. ZAKLJUČAK

Konstatuje se da se primenom geometrijske interpretacije na standardni metod maksimuma dobio istovetan rezultat maksimizacijom primala, minimizacijom duala i primenom simpleks metode na standardni problem maksimuma apliciran na primal. Dualnim pristupom dobijen je plan transporta koji predstavlja pojednostavljenje primala prezentovanog geometrijskom interpretacijom linearnog programiranja utoliko što se formirao novi plan sa manjim brojem uslova, ograničenja.

Ovaj model je prikladno primenjivati kada je geometrijskom interpretacijom nepogodno predstaviti veliki broj ograničenja, s obzirom na poteškoće u nalaženju tačaka preseka, temena poligona, sl. 2. Sa druge strane, dualnim pristupom se daje i konkretan odgovor na zadatak u radu koji je predstavljao ilustraciju modela u smislu konstatacije da je druga opcija transportnog zadatka optimalna za realizaciju posla. Predstavljeni model daje korelaciju između primala, duala, standardnog problema maksimuma i simpleks metode. Time se postiže fleksibilnost puta za nalaženje pristupa rešavanju širokog dijapazona zadataka optimizacije kako u transportu tako i proizvodnoj delatnosti.

Cilj ovog rada je, osim postavljanja korelacije između navedenih pristupa linearnom programiranju i to da se ukaže na praktičnost primene geometrijske interpretacije na dualni model što je, često, jednostavnije nego primeniti ga na primal.

## LITERATURA


[1] Gill P. E, Murray W, Ponceleón D. B. & Saunders M. A. *Primal—dual methods for linear programming*, Springer, *1995.*

[2] Fiacco A. V. and Mc Cormick G. P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques,* Wiley, New York, 1968.

[3] Monteiro R. D. C. and Adler I. Interior path following primal—dual algorithms. Part I: Linear programming, *Mathematical Programming***,** 1989.

[4] Holdsworth, B., Woods R.C. *Digital Logic Design Book*, Elsevier Ltd, 2003.

[5] Hillier F. S, Lieberman G. J. *Introduction to operations research*, New York: McGrawHill Education, 2015.

[6] Magano M. A Linear Programming Model for Integrated Baked Production and Distribution Planning with Raw Material and Routing Consideration**,** *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, Bogota, Colombia, October 25 - 26, 2017.

[7] Gill P, et al. Primal - Dual Methods for Linear Programming, *Mathematical Programming*, Vol. 70, p. 251–277, 1995.

[8] Vukadinović S. *Transportni zadatak linearnog programiranja*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[9] Sarode M. Application of a Dual Simplex Method to Transportation Problem to minimize the cost, *International Journal of Innovations in Engineering and Science*, Vol. 2, No.7, 2017.

[10] Marković B. *Metode optimizacije u organizaciji transporta i rukovanja materijalom*, Tehnikum Taurunum, VIŠSS, Beograd – Zemun, 2019.

[11] McKinnon A. C, Woodburn A. Logistical restructuring and road freight traffic growth, *Transportation*, Vol. 23, pp. 141–161, Springer, 1996.

[12] Wagner T. Regional traffic impacts of logistics - related land use, *Transport Policy*, Vol. 17, Issue 4, 2010.

[13] Radosavljević D. et al. Ocena ukupne efektivnosti transportnog procesa, *Tehnika*, vol. 72, br. 5, str. 717-724, 2017.

[14] Akgun A. A comparison of landslide susceptibility maps produced by logistic regression, multi-criteria decision, and likelihood ratio methods: a case study at İzmir, Turkey, *Landslides*, Vol. 9, pp. 93–106, Springer, 2012.

[15] Engblom J, Solakivi T, Töyli J, Ojala L. Multiple-method analysis of logistics costs, *International Journal of Production Economics*, Vol. 137, Issue 1, 2012.

[16] Manisha.V. Application of a Dual Simplex method to Transportation Problem to minimize the cost, *International Journal of Innovations in Engineering and Science*, Vol. 2, No.7, 2017.

[17] Sarode M., Application of a Dual Simplex Method to Transportation Problem to minimize the cost, *International Journal of Innovations in Engineering and Science*, Vol. 2, No.7, 2017.

## SUMMARY

APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING TO THE STANDARD MAXIMUM PROBLEM IN THE FIELD OF TRANSPORTATION

*The paper presents the analysis of the transport plan by applying the geometric interpretation of linear programming, dual approach and simplex method to the optimization of the transport plan. The goal is to optimize the transport plan from the aspect of choosing the type of transport task, type and scope of engagement of transport means, in order to maximize the functions of the goal that represents the earnings. The approach to analysis is illustrated by a characteristic task that is solved in the paper in the described way. The main difference between this and the tasks analyzed so far is that the imposed restrictions represent a system of inequalities which, by introducing fictitious variables, is transformed into a system of equations to which the standard maximum problem is applied. The benefit of this approach is a simpler but also more comprehensive approach to the analysis of the transport plan. It is especially suitable for relatively small transport systems when there are a number of limitations and where it is not convenient to buy and use software packages. The emphasis in the paper is on maximizing earnings while meeting the imposed limits. The analysis yielded identical results in all three ways.*

**Key Words:** *Linear programming, Standard maximum problem, Transport*