

Теоријски модел соларног упадног угла за произвољно оријентисану фиксну, равну површину

АЛЕКСАНДАР М. НЕШОВИЋ, Универзитет у Крагујевцу,

Факултет инжењерских наука, Крагујевац UDC: 514.742.4:621.383.51

DOI: 10.5937/tehnika2203328N

Привидни положај Сунца у односу на било коју површину дефинисан је соларним упадним углом. Соларни упадни угао формирају вектор положаја Сунца и вектор нормале на посматрану површину. Просторни положај поменутих вектора одређен је тзв. соларним координатама, међу којима су: деклинација, географска ширина, часовни угао, географска дужина, угао висине Сунца, соларни азимутни угао, азимутни угао посматране површине, угао нагиба посматране површине у правцу север-југ и угао нагиба посматране површине у правцу исток-запад.

Применом векторске алгебре и аналитичке геометрије, уз коришћење соларних координата, у овом раду детаљно је разрађен теоријски модел одређивања соларног упадног угла за произвољно постављену фиксну, равну површину. Овај модел, настао комбинацијом, модификовањем и допуном већ постојећих модела, може послужити као добар алат у соларној техници, за одређивање термичких перформанси соларних уређаја: соларних пријемника, ФН панела и хибридних соларних система.

Кључне речи: соларни упадни угао, соларне координате, фиксна површина, равна површина, (класични) фиксни, равни соларни пријемник, соларна техника

1. СОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

Под соларним координатама подразумевају се соларни углови (сл. 1) који тачно дефинишу положај било које тачке на површини Земље у односу на положај Сунца [1-3].

Деклинација δ [°] (сл. 1а) представља угао између екваторске равни ЕР која садржи средиште Земље и дужи која спаја средиште Земље и средиште Сунца. Географска ширина φ [°] (сл. 1б) је угао између ЕР и дужи која спаја посматрану тачку на Земљи и њено средиште. Часовни угао ω [°] (сл. 1в) дефинише се као угао између локалне географске дужине и географске дужине у којој је Сунце у свом зениту.

Географска дужина λ [°] (сл. 1в) може се дефинисати као угаона удаљеност вертикалне равни која садржи средиште Земље и посматрану тачку од референтне вертикалне равни која садржи нул-

ти меридијан¹. Угао висине Сунца α [°] (сл. 1г) је угао који формирају Сунчеви зраци и њихова пројекција у хоризонтској² равни.

Соларни азимутни угао γ_s [°] (сл. 1д) одређен је осом у правцу север-југ која се налази у хоризонтској равни и пројекцијом Сунчевих зракова на исту раван. Азимутни угао γ [°] (сл. 1ђ) формирају пројекција нормале на посматрану површину у хоризонтској равни и оса у правцу север-југ у истој равни.

Када се посматрана површина која лежи у хоризонтској равни закрене око осе ротације у правцу исток-запад у истој равни, добија се угао нагиба у правцу север-југ β [°] (сл. 1е).

Површина која се закреће око осе ротације у правцу север-југ у хоризонтској равни са истом формира угао нагиба у правцу исток-запад ψ [°] (сл. 1ж).

Адреса аутора: Александар Нешовић, Универзитет у Крагујевцу, Факултет инжењерских наука, Крагујевац, Сестре Јањић 6

e-mail: aca.nesovic@gmail.com

Рад примљен: 20.04.2022.

Рад прихваћен: 16.05.2022.

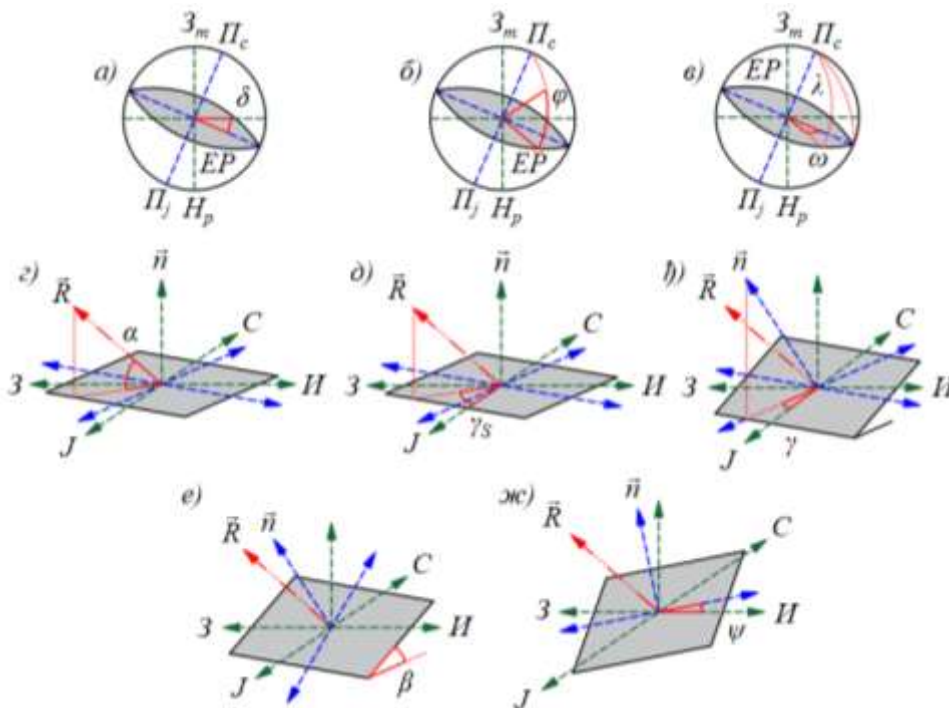
¹ За нулти меридијан договором је узет меридијан који пролази кроз место Гринич у близини Лондона.

² Хоризонтска раван (поглавље 2) је раван хоризонта. Она се налази у оку посматрача и у њој лежи посматрана површина. Може се поистоветити са хоризонталном равни.

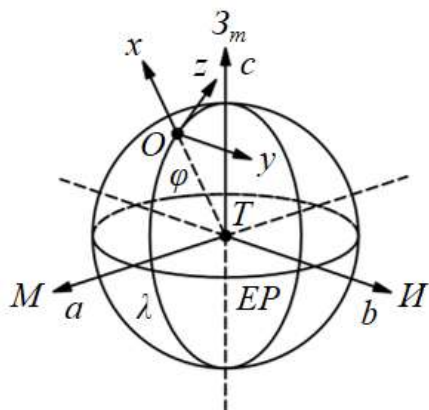
2. СФЕРНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ

У соларној физици примењују се два сферна координатна система³ (сл. 2) [4, 5]: екваторски (основни, базни) Таbc сферни координатни систем (тачка Т представља координатни почетак у средишту Земље, а оса показује смер⁴ λ, b оса смер истока (смер И), c оса је управна⁵ на раван коју граде

осе а и b) и хоризонтски Охуз сферни координатни систем (тачка О представља координатни почетак у средишту посматраног предмета на површини Земље, у оса има исти смер као b оса, z оса показује смер севера (смер С), -x оса пролази кроз координатни почетак екваторског Таbc сферног координатног система показује правац нормале на раван коју праве осе b и c).



Слика 1 – Соларне координате



Слика 2 – Екваторски Таbc и хоризонтски Охуз сферни координатни системи [3, 6, 7]

За приказивање произвољно постављеног вектора положаја Сунца \vec{R} (сл. 3) користе се оба сферна координатна система.

У хоризонтском Охуз сферном координатном систему⁶, правоугле координате \vec{R}_O могуће је одредити преко соларних углова⁷ α, θ и ε (јед. 1, сл. 4) [3, 6-8]:

$$\vec{R}_O = [\vec{R}_{O-x}, \vec{R}_{O-y}, \vec{R}_{O-z}]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\cos \alpha \sin \varepsilon \\ \cos \alpha \cos \varepsilon \end{bmatrix} \tag{1}$$

Са друге стране, правоугле координате \vec{R}_T могуће је описати и у екваторском Таbc сферном координатном систему, применом соларних углова δ и ω (јед. 2, сл. 5) [3, 6-8]:

$$\vec{R}_T = [\vec{R}_{T-a}, \vec{R}_{T-b}, \vec{R}_{T-z}]^T = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \omega \\ \cos \delta \sin \omega \\ \sin \delta \end{bmatrix} \tag{2}$$

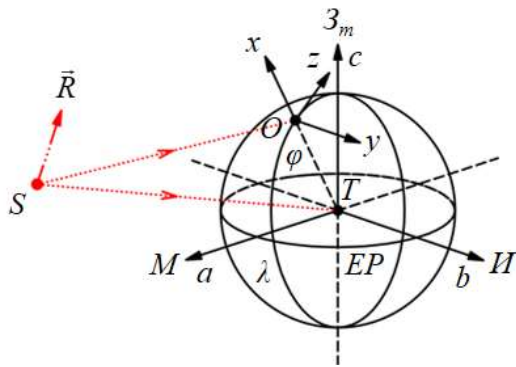
³ Сферни координатни систем користе се за описивање лоптастих, ротационих тела.

⁴ Оса а показује меридијански смер (смер М).

⁵ Оса с показује зенитни смер (смер З_Т).

⁶ Транслаторним премештањем вектора положаја Сунца у тачку О омогућена је примена хоризонтског Охуз сферног координатног система.

⁷ Углови α и θ су по правилу комплементарни.

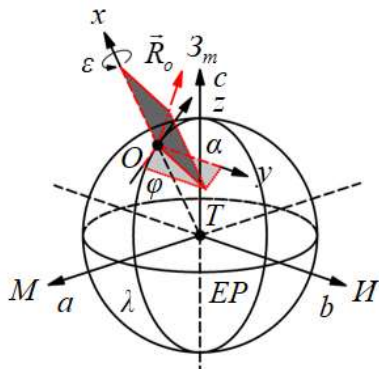


Слика 3 – Вектор положаја Сунца у простору [3, 6, 7]

$$\vec{n}_x = [1,0,0]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{n}_y = [0,1,0]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\vec{n}_z = [0,0,1]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$



Слика 4 – Разлагање вектора положаја Сунца у хоризонтском Oxyz сферном координатном систему [3, 6, 7]

Ротирањем \vec{n}_o , најпре око -x осе за угао γ (јед. 7, сл. 6), па око нове -y' осе за угао β (јед. 8, сл. 7) и на крају око нове -z'' осе за угао ψ (јед. 9, сл. 8), формирају се одговарајуће матрице, тј. $[\vec{\gamma}]$, $[\vec{\beta}]$ и $[\vec{\psi}]$ [3, 6-8]:

$$[\vec{\gamma}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[\vec{\beta}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$[\vec{\psi}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

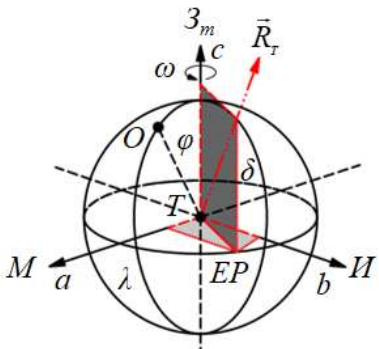
Даљим множењем матрица $[\vec{\gamma}]$ (јед. 7), $[\vec{\beta}]$ (јед. 8) и $[\vec{\psi}]$ (јед. 9), формира се матрица $[\vec{n}']$ (јед. 10) [3, 6-8]:

$$[\vec{n}'] = [\vec{\gamma}][\vec{\beta}][\vec{\psi}] \tag{10}$$

Множењем матрица $[\vec{n}']$ (јед. 10) са правоуглим координатама \vec{n}_o (јед. 3-6), долази се до правоуглих координата вектора нормале за произвољно постављену фиксну, равну површину (јед. 11-14) [3, 6-8]:

$$[\vec{n}] = [\vec{n}'_x, \vec{n}'_y, \vec{n}'_z]^T = \begin{bmatrix} \vec{n}'_x \\ \vec{n}'_y \\ \vec{n}'_z \end{bmatrix} = [\vec{n}'] \begin{bmatrix} \vec{n}_x \\ \vec{n}_y \\ \vec{n}_z \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\vec{n}'_x = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \beta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \beta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \end{bmatrix} \tag{12}$$



Слика 5 – Разлагање вектора положаја Сунца у екваторском Tabc сферном координатном систему [3, 6, 7]

За одређивање правоуглих координата (положаја) \vec{n} , користе се соларни углови γ, β и ψ у хоризонтском Oxyz сферном координатном систему.

Координате почетног јединичног вектора \vec{n}_o могу се дефинисати преко следећих једначина (јед. 3-6) [3, 6-8]:

$$\vec{n}_o = \begin{bmatrix} \vec{n}_x \\ \vec{n}_y \\ \vec{n}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{n}'_y = \begin{bmatrix} -\cos\beta \sin\psi \\ -\sin\gamma \sin\beta \sin\psi + \cos\gamma \cos\psi \\ \cos\gamma \sin\beta \sin\psi + \sin\gamma \cos\psi \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{n}'_z = \begin{bmatrix} \sin\beta \\ -\sin\gamma \cos\beta \\ \cos\gamma \cos\beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

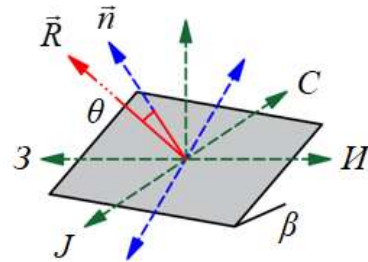
$$\vec{S}_x = \vec{R} \bullet \vec{n}'_x \quad (16)$$

$$\vec{S}_y = \vec{R} \bullet \vec{n}'_y \quad (17)$$

$$\vec{S}_z = \vec{R} \bullet \vec{n}'_z \quad (18)$$

3. СОЛАРНИ УПАДНИ УГАО

Према Lambert-овом закону¹⁰, соларни упадни угао формирају вектор положаја Сунца \vec{R} и вектор нормале \vec{n} на произвољно постављену фиксну, равну површину. Соларни упадни угао графички је приказан на (сл. 9).



Слика 9 – Соларни упадни угао

Соларни упадни угао $\cos\theta$ математички се може записати као (јед. 19) [3, 6-8]:

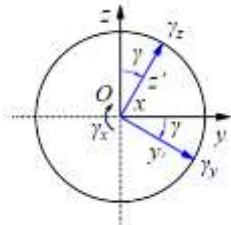
$$\cos\theta = f(\vec{R}, \vec{n}) = \vec{R} \bullet \vec{n} \quad (19)$$

Како тачка O у хоризонтском $Oxuz$ сферном координатном систему може заузимати било које φ (сл. 3-5) за исто λ (у односу на тачку T у екваторском $Tabc$ координатном систему), \vec{R} (јед. 21) се за жељену локацију на површини Земље добија производом матрице $[\vec{\varphi}]$ (јед. 20, сл. 10) са координатама \vec{R}_T [3, 6-8]:

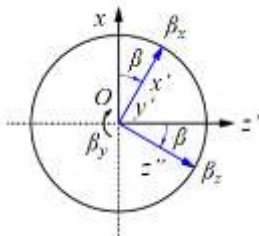
$$[\vec{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\vec{R} = [\vec{\varphi}] \begin{bmatrix} \vec{R}_{T-a} \\ \vec{R}_{T-b} \\ \vec{R}_{T-c} \end{bmatrix} \quad (21)$$

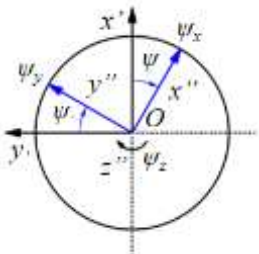
$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\delta \cos\omega + \sin\varphi \sin\delta \\ \cos\delta \sin\omega \\ -\sin\varphi \cos\delta \cos\omega + \cos\varphi \sin\delta \end{bmatrix}$$



Слика 6 – Ротирање јединичног вектора нормале око -x осе у хоризонтском $Oxyz$ сферном [6, 7]



Слика 7 – Ротирање јединичног вектора нормале око -y' осе у хоризонтском $Ox'y'z'$ сферном координатном систему [6, 7]



Слика 8 – Ротирање јединичног вектора нормале око -z'' осе у хоризонтском $Ox'y'z''$ сферном координатном систему [6, 7]

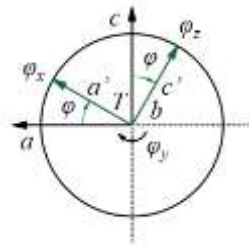
Скаларни производ⁸ $[\vec{n}] = [\vec{n}'_x, \vec{n}'_y, \vec{n}'_z]^T$ (јед. 11-14) и матрице⁹ $[\vec{R}]$ одређује јединични соларни вектор $[\vec{S}] = [\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z]^T$ (јед. 15-18):

$$[\vec{S}] = [\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z]^T = \vec{R} \bullet \begin{bmatrix} \vec{n}'_x \\ \vec{n}'_y \\ \vec{n}'_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

⁸ енгл. dot product.

⁹ Формирање матрице $[\vec{R}]$ приказано је у поглављу 3.

¹⁰Lambert-ов закон се примењује у случајевима када је удео директног соларног зрачења далеко већи од удела дифузног соларног зрачења у укупном соларном износу.



Слика 10 – Ротирање вектора положаја Сунца око -b осе у екваторском Таbc сферном координатном систему [6, 7]

Узимајући у обзир (јед. 1), може се закључити да је $\cos\theta$ одређен скаларним производом \vec{R} и \vec{n}'_x , односно (јед. 22) [3, 6-8]:

$$\vec{S}_x = \vec{R} \bullet \vec{n}'_x \tag{22}$$

За различите случајеве постављања фиксних, равних површина, вредност $\cos\theta$ може се одредити применом следећих једначина (јед. 23-30) представљених у наредној табели (таб. 1) [3, 6-8]:

Табела 1. Соларни упадни угао за различите случајеве постављања фиксне, равне површине

$\cos \theta = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \delta \cos \omega + \sin \varphi \sin \delta \\ \cos \delta \sin \omega \\ -\sin \varphi \cos \delta \cos \omega + \cos \varphi \sin \delta \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \beta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \beta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \end{bmatrix}$ $= \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \beta \cos \psi + \sin \varphi \sin \delta \cos \beta \cos \psi + \cos \delta \sin \omega \sin \gamma \sin \beta \cos \psi$ $+ \cos \delta \sin \omega \cos \gamma \sin \psi + \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \gamma \sin \beta \cos \psi - \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \sin \gamma \sin \psi$ $- \cos \varphi \sin \delta \cos \gamma \sin \beta \cos \psi + \cos \varphi \sin \delta \sin \gamma \sin \psi$			(23)
$\cos \theta_{\beta\gamma} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \beta + \sin \varphi \sin \delta \cos \beta + \cos \delta \sin \omega \sin \gamma \sin \beta$ $+ \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \gamma \sin \beta - \cos \varphi \sin \delta \cos \gamma \sin \beta$		$\psi = 0^\circ$	(24)
$\cos \theta_{\beta\psi} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \beta \cos \psi + \sin \varphi \sin \delta \cos \beta \cos \psi + \cos \delta \sin \omega \sin \psi$ $+ \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \sin \beta \cos \psi - \cos \varphi \sin \delta \sin \beta \cos \psi$		$\gamma = 0^\circ$	(25)
$\cos \theta_{\gamma\psi} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \psi + \sin \varphi \sin \delta \cos \psi + \cos \delta \sin \omega \cos \gamma \sin \psi$ $- \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \sin \gamma \sin \psi + \cos \varphi \sin \delta \sin \gamma \sin \psi$		$\beta = 0^\circ$	(26)
$\cos \theta_{\beta} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \beta + \sin \varphi \sin \delta \cos \beta + \sin \varphi \cos \delta \cos \omega \sin \beta$ $- \cos \varphi \sin \delta \sin \beta$		$\psi = 0^\circ$ $\gamma = 0^\circ$	(27)
$\cos \theta_{\gamma} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega + \sin \varphi \sin \delta$		$\psi = 0^\circ$ $\beta = 0^\circ$	(28)
$\cos \theta_{\psi} = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \cos \psi + \sin \varphi \sin \delta \cos \psi + \cos \delta \sin \omega \sin \psi$		$\gamma = 0^\circ$ $\beta = 0^\circ$	(29)
$\cos \theta_z = \cos \varphi \cos \delta \cos \omega + \sin \varphi \sin \delta$ – хоризонтална површина		$\psi = 0^\circ$ $\gamma = 0^\circ$ $\beta = 0^\circ$	(30)

4. ЗАКЉУЧАК

Прикупљање соларне инсолације у што већем износу (главни задатак свих типова соларних система) обезбеђује се на два начина: привидним праћењем Сунца током дана (покретни соларни системи) и одређивањем оптималног положаја за фиксне (непокретне) соларне системе.

У овом раду представљена је метода (првенствено) за одређивање оптималног положаја фиксних, равних соларних пријемника, која се може користити и за димензионисање покретних соларних система. Главни допринос овог рада огледа се у (корак по корак) извођењу крајњих образаца за

одређивање соларног упадног угла за било који случај положај постављања (класичног) фиксног, равног соларног пријемника.

5. ЗАХВАЛНИЦА

Овај рад представља резултате истраживања насталих у оквиру пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије број ТР 33015. Захваљујем се Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије на финансијској подршци током овог истраживања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лукић Н, Бабић М, *Соларна енергија* – Монографија, Машински факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац, 2008.
- [2] Despotović М, *Obnovljivi izvori energije*, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, 2011.
- [3] Rabl А, *Active solar collectors and their applications – First edition*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1985.
- [4] Казанова Г, *Векторная алгебра*, Мир, Москва, 1979.
- [5] Cvijanović М, *Matematičke metode u tehnici I – Sveska 4 – Vektorska algebra i analitička geometrija*, Fakultet tehničkih nauka Univeziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 1983.
- [6] Stine W. B, Harrigan R. W, *Solar energy fundamentals and design: With computer applications*, Wiley-Interscience, New York, 1985.
- [7] Chong K. K, Wong C. W, *Solar collectors and panels, Part 13: General formula for on-axis sun-tracking system*, Universiti Tunku Abdul Rahman, Kampar, 2010.
- [8] Widén J, Munkhammar J, *Solar radiation theory*, Department of Engineering Sciences University of Uppsala, Uppsala, 2019.

SUMMARY

THEORETICAL MODEL OF SOLAR INCIDENT ANGLE FOR AN OPTIONALLY ORIENTED FIXED FLAT SURFACE

The apparent position of the Sun in relation to any surface is defined by the solar incident angle. The solar incident angle forms the vector of the position of the Sun and the vector of normal to the observed surface. The spatial position of the aforementioned vectors is determined by solar coordinates, which include: declination, latitude, hour angle, longitude, solar elevation angle, solar azimuth angle, azimuth angle of the observed surface, angle of inclination of the observed surface in the north-south direction and angle of inclination of the observed surface in the east-west direction. This article describes in detail the theoretical model for determining the solar incident angle for an arbitrarily placed fixed, flat surface using vector algebra and analytical geometry, as well as solar coordinates. The study model, which was developed by combining, modifying, and supplementing existing models, can be used to determine the thermal performance of solar devices such as: solar collectors, PV panels, and hybrid solar systems.

Key Words: *solar incident angle, solar coordinates, fixed surface, flat surface, (classic) flat plate solar collector, solar technology*