

Analiza stabilnosti brane „Lipovica“ primenom Pelcerove metode

VLADAN B. BOŠKOVIĆ, Energoprojekt Hidroinženjering a.d,
Biro za geologiju, hidrologiju, geofiziku,
geodeziju, GIS i saobraćajnice, Beograd

MILUTIN M. PEJOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,
Građevinski fakultet, Beograd

BRANKO Đ. MILOVANOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,
Građevinski fakultet, Beograd

Stručni rad

UDC 528.48:624.131.5
627.824

DOI: 10.5937/tehnika2304411B

Tematika rada se odnosi na primenu Pelcer-ovog postupka deformacione analize za potrebe određivanja deformacija tačaka kontrolne mreže brane Lipovica. Svrha geodetskog osmatranja inženjerskih objekata kao što su visoke brane, na sažet način, data je u posebnom poglavlju. Iz tog razloga, u radu je opisana osnovna teorija Pelcer-ove metode određivanja deformacija, algoritam kao i način primene. Pored samog načina određivanja pomeranja, u radu je opisana i teorija vezana za minimalnu vrednost veličine pomeranja koja se „sigurno“ može odrediti primenom geodetskih metoda.

Ključne reči: Pelcer, deformacija, veličina pomeranja, brana

1. UVOD

Prema zvaničnim podacima, širom sveta postoji preko 58.000 visokih (velikih) brana koje su registrovane od strane međunarodnog komiteta za visoke brane ICOLD-a (International Commission on Large Dams – ICOLD) [1]. Deformacije i oštećena visokih brana, mogu imati katastrofalne posledice za područje nizvodno, uključujući gubitak živog sveta, oštećenja imovine i ekološku štetu. Same deformacije nastaju kao rezultat promena fizičkih parametara koji utiču na objekat. Neki od najvažnijih fizičkih parametara, koji utiču na stanje brane, su temperatura i uslovi opterećenja. U inženjerskim projektima oni se mere konstruktivno ili u procesu planiranja a efekti njihovih promena se unapred određuju proračunom ili eksperimentom. Bilo da se radi o inženjerskoj ili naučnoj oblasti primene, potvrda svih predviđenih ili hipotetičkih deformacija vrši se na osnovu deformacija koje su određene geodetskim metodama. Na ovome se zasniva fundamentalni značaj geodetskih metoda jer one ne beleže promene uticajnih promenljivih i uz nji-

hovu pomoć deformacije indirektno, već direktno mere same deformacije. Merenjima pomoću trajno stabilizovanih mernih uređaja na inženjerskim objektima, moguće je kontinuirano prećenje deformacija primenom geodetskih terestričkih metoda. Terestričke metode podrazumevaju određivanje apsolutnih vrednosti deformacija inženjerskih objekata korišćenjem lokalne geodetske mreže [2].

Osnovna ideja utvrđivanja deformacija geodetskim terestričkim metodama, „rođena“ je u prvim decenijama prošlog veka za potrebe izgradnje i osmatranja prvih brana. Već tada su lokalne geodetske mreže pokazale osnovnu strukturu koja se i danas koristi: podelu mreže na referentne tačke i tačke objekta [3]. Suština ovakvog pristupa ogleda se u određivanju apsolutnih pomeranja tačaka objekta na osnovu referentnih tačaka. Kako vrednosti „istinitih“ deformacija u realnim geodetskim mrežama nisu poznate, najobjektivnije ocene deformacija se dobijaju primenom više različitih modela deformacione analize.

Na kraju ovog rada su sumirani rezultati deformacija kontrolnih tačaka određenih primenom Pelcer-ove i Karlsruhe metode, pri čemu je Pelcer-ova metoda detaljno opisana u radu. Osetljivost geodetske mreže je od posebnog interesa u pogledu geodetskih kontrolnih mreža. Minimalnu vrednost deformacije, koja se može odrediti geodetskim metodama, moguće je proračunati još u fazi izrade projekta geodetske kontrolne mreže. U radu je poseban osvrt dat na opis osnovne teorije

Adresa autora: Vladan Bošković, Energoprojekt Hidroinženjering, Biro za geologiju, hidrologiju, geofiziku, geodeziju, GIS i saobraćajnice, Beograd, Bulevar Mihajla Pupina 12

e-mail: vladanboskovic97@gmail.com

Rad primljen: 30.03.2023.

Rad prihvaćen: 13.04.2023.

vezane na osetljivost geodetske mreže kao i njene logičke veze sa Pelcer-ovom metodom određivanja deformacija tačaka kontrolne mreže.

2. VELIČINA POMERANJA KOJA SE ZA USVOJENU VEROVATNOĆU MOŽE ODREDITI GEODETSKIM METODAMA

Analiza kvaliteta geodetskih mreža za praćenje pomeranja i deformacija, pored analize tačnosti i pozdanosti, obuhvata i analizu osetljivosti. U okviru analize osetljivosti geodetske mreže, razmatra se vrsta i veličina pomeranja koja se može odrediti primenom geodetskih metoda deformacione analize. Opažanja koja se realizuju u geodetskim mrežama mogu biti opterećena različitim izvorima grešaka. Primenom metoda za identifikaciju grubih grešaka, opažanja opterećena grubim greškama se detektuju i eliminišu. Međutim, nekada se dešava da se ne izvrši korektna identifikacija grubih grešaka što kasnije utiče na objektivnost postupka deformacione analize [4]. Upravo, da bi se napravila jasna razlika između vrednosti stohastičkih varijacija od deformacija, prirodno je koristiti princip najmanje veličine pomeranja (deformacije) koja se za dati nivo značajnosti α i moć testa $1 - \beta$, primenom metoda deformacione analize, „sigurno“ može odrediti [5] [6].

Od 1971. godine, od pojave Pelcer-ove disertacije kojom je uvedena metoda sa mnogo većom moći otkrivanja pomeranja tačaka ispitivanih objekata, nastaje nova epoha u testiranju podudarnosti (kongruenciji) geometrije inženjerskih objekata. Ova metoda zasnovana je na hipotezi o podudarnosti tačaka mreže i neznatno je modifikovana i pripremljena za neke primere primene u publikacijama Pelcer-a [7] i Ni-majer-a [8].

Sa geometrijske tačke gledišta, pitanje da li je došlo do deformacija između epoha merenja može se shvatiti kao pitanje podudarnosti oblika figure. Sa statističke tačke gledišta, mreže merene u dve epohe su podudarne ukoliko važi nulta hipoteza H_0

$$H_0: E(\mathbf{d}) = 0 \quad (1)$$

sa test statistikom

$$T|H_0 = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}}{h \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h,f} \quad (2)$$

gde je $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{X}}_1 - \hat{\mathbf{X}}_0$ vektor pomeranja, $\hat{\mathbf{X}}_0$ i $\hat{\mathbf{X}}_1$ vektori izravnatih koordinata iz nulte i kontrolne epohe merenja, $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}_0} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}_1}$ kofaktorska matrica, $f = f_1 + f_2$ objedinjeni broj stepeni slobode iz dve epohe merenja i $h = r(\mathbf{Q}_d)$ rang matrice kofaktora \mathbf{Q}_d . Test statistika (Izraz 2), u literaturi je poznata kao globalni test kongruencije i u slučaju nulte hipoteze sledi Fišer-ovu centralnu raspodelu sa parametrima h i f . Osim Fišer-ove raspodele, pomenuta test statistika sledi i hi-

kvadrat raspodelu sa $f = \infty$ stepeni slobode [5]. Usporedna analiza i osnovne karakteristike navedenih raspodela, za potrebe formiranja globalne test statistike, mogu se naći u literaturi [9] [10]. Sa statističke tačke gledišta, mreže merene dva puta nisu kongruentne ukoliko se primenjuje alternativna hipoteza H_a

$$H_a: E(\mathbf{d}) \neq 0 \quad (3)$$

U tom slučaju, test statistika sledi Fišer-ovu necentralnu raspodelu

$$T|H_a = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}}{h \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h,f,\lambda} \quad (4)$$

sa parametrom necentralnosti λ

$$\lambda = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}}{\hat{\sigma}_0^2} \quad (5)$$

Parametar necentralnosti λ (Izraz 5) se upoređuje sa graničnom vrednošću λ_0 koja je u funkciji od nivoa značajnosti α , moći testa $1 - \beta$, broja stepeni slobode imenioca h i broja stepeni slobode brojioca f . Opšte je poznato da je najnesigurniji položaj određivanja tačaka kontrolne mreže u smeru velike poluose elipsi grešaka, pa je samim tim u istom smeru i vrednost deformacija najnesigurnija. Na osnovu toga, izraz (5) se može predstaviti u sledećoj formi

$$\lambda = \frac{dp [\sin \theta \cos \theta] \mathbf{Q}_d^+ dp \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}{\hat{\sigma}_0^2} \quad (6)$$

odakle sledi

$$dp = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_0^2 \lambda}{[\sin \theta \cos \theta] \mathbf{Q}_d^+ \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}}} \quad (7)$$

$$dh = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_0^2 \lambda}{\mathbf{Q}_d^+}} \quad (8)$$

pri čemu je dp veličina pomeranja u horizontalnoj ravni koja se „sigurno“ može odrediti između dve epohe u smeru velike poluose elipsi grešaka, dh veličina pomeranja u vertikalnoj ravni koja se „sigurno“ može odrediti, θ ugao koji velika poluosa elipsi zaklapa sa pozitivnim smerom X-ose, \mathbf{Q}_d^+ blok pseudoinverzne kofaktorske matrice \mathbf{Q}_d dimenzija 2×2 koji se odnosi na određenu tačku 2D mreže, odnosno dimenzija 1×1 za repere 1D mreže. Komponente minimalne veličine pomeranja dp , razloženim po koordinatnim osama Y i X, mogu se odrediti na osnovu izraza (9) i (10)

$$dp_Y = dp \sin \theta \quad (9)$$

$$dp_X = dp \cos \theta \quad (10)$$

Granične vrednosti parametra necentralnosti Fišer-ove raspodele λ_0 , za nivo značajnosti α , moć test $1 - \beta$ i brojeve stepeni slobode h i f , su dugi niz godina očitavane sa dobro poznatog Bardin-og nomograma

[12]. Ove vrednosti se takođe mogu naći u radovima [10], [4], [9]. U tabeli 1, date su granične vrednosti parametra necentralnosti za određene vrednosti stepeni slobode, pri čemu su vrednosti od interesa za geodetske 2D i 1D mreže posebno naznačene podvučenom linijom.

Tabela 1. Granične vrednosti parametra necentralnosti λ_0 za $\alpha = 0.05$, $1-\beta = 0.80$, $1 \leq h \leq 30$ i $2 \leq f \leq \infty$

f	h=1	h=2	h=3	h=5	h=10	h=20	h=30
2	32.0	62.3	92.7	153.4	305.3	608.9	912.4
5	12.4	18.7	24.5	35.7	62.9	116.8	170.5
10	9.7	13.2	16.2	21.7	34.5	59.1	83.4
20	8.7	11.2	13.3	16.8	24.4	38.4	51.9
30	8.4	10.7	12.4	15.4	21.5	32.3	42.5
50	8.2	10.2	11.8	14.3	19.3	27.7	35.2
100	8.0	9.9	11.3	13.6	17.8	24.3	29.9
∞	<u>7.9</u>	<u>9.6</u>	10.9	12.8	16.2	21.0	24.6

Izrada projekta geodetskog osmatranja zasnovana je na prihvatanju alternativne hipoteze (Izraz 3) i određivanju minimalne vrednosti pomeranja dp za zadati dizajn geodetske mreže. U tom slučaju, kofaktorska matrica pomeranja je oblika $\mathbf{Q}_d = 2\mathbf{Q}_x$ i na osnovu nje se može izvršiti komplementa prethodna ocena osetljivosti geodetske kontrolne mreže [13].

Tabela 2. Primeri zahtevanih veličina pomeranja

Brana	Tip brane	Lokacija	dp [mm]	dh [mm]
Rudnik	nasuta	Srbija	10	5
Pambukovica	nasuta	Srbija	8	4
Seklafa	betonska	Alžir	4	2
Šargi	betonska	Alžir	4	2
Liverovići	betonska	Crna Gora	4	2
Grahovo	betonska	Crna Gora	4	2
Vrtac	betonska	Crna Gora	4	2
Krupac	betonska	Crna Gora	4	2
Slano	betonska	Crna Gora	4	2

U praksi, minimalnu veličinu pomeranja dp obično definiše inženjer građevinske struke u skladu sa tipom, veličinom i konstruktivnim karakteristikama brane. U tabeli (2) dati su primeri iz prakse koje je autor dobijao kao zahtevane veličine pomeranja u raznim projektnim zadacima. Dakle, projektom geodetskog osmatranja potrebno je odrediti optimalno rešenje za dizajn, datum i plan opažanja u mreži koji će obezbediti „sigurno“ otkrivanje zadate veličine pomeranja.

3. ODREĐIVANJE POMERANJA PRIMENOM PELCEROVE METODE

Pelcer-ov postupak deformacione analize (u literaturi poznat i kao Hanoverski postupak), razvijen je od strane Pelcera, a praktičnoj primeni je prilagođen u radovima Nimajer-a [8] i Dupraz-a, Nimajer-a i Pelcera [14]. Analiza deformacija primenom Pelcerove metode može se naći i u sledećim radovima [15], [16] [17], [18].

Sušтина Pelcer-ovog postupka zasnovana je na doslednoj primeni analize varijanse matematičke statistike i ne zahteva pretpostavke stabilnosti osnovnih tačaka, što je obično podložno statističkim hipotezama [14]. Osnovna karakteristika ovog postupka je testiranje globalne podudarnosti koristeći izračunato srednje neuklapanje dva puta premerene mreže i ispitivanje da li su prisutna signifikantna pomeranja između dve epohe [15], [19].

Ukoliko je indikativno prisustvo značajnih promena položaja tačaka, moraju se sprovesti dalji testovi da bi se izvršila lokalizacija tačke/tačaka koje su zaista promenile svoj položaj između epoha. Algoritam Pelcerove metode bi se sažeto mogao opisati kroz sledeće celine:

- Nezavisno izravnjanje nulte i kontrolne epohe;
- Analiza homogene tačnosti epoha;
- Globalni test podudarnosti cele mreže;
- Globalni test podudarnosti osnovnih tačaka;
- Globalni test podudarnosti tačaka na objektu;
- Određivanje definitivnih pomeranja tačaka.

3.1. Nezavisno izravnjanje nulte i kontrolne epohe

Pre nego što se primeni Pelcer-ov postupak deformacione analize, vrši se izravnjanje mreže za obe epohe $i = (0,1)$ u cilju određivanja ocenjenih vrednosti koordinata tačaka $\hat{\mathbf{X}}_i$ kao i postignute tačnosti iz izravnjanja $\hat{\sigma}_{0i}$. Izravnjanja epoha se realizuju po dobro poznatoj metodi najmanjih kvadrata sa minimalnim tragom matrice kofaktora koordinata $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i}$, odnosno

$$\hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{v}}_i = \min \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_i = \min \quad (12)$$

$$\text{trag} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = \min \quad (13)$$

pri čemu je $\hat{\mathbf{v}}$ vektor ocenjenih vrednosti popravaka, \mathbf{P} matrica težina, $\hat{\mathbf{x}}$ vektor ocenjenih vrednosti priraštaja koordinata iz nulte i kontrolne epohe.

U razvojnim verzijama ove metode, u okviru izravnjanja pojedinih epoha uvedeno je statističko testiranje hipoteza o grubim greškama svakog opažanja (Data snooping) [16], [17]. Različite metode detektovanja grubih grešaka u opažanjima, kao i njihova praktična primena, mogu se naći u sledećoj literaturi [20].

3.2. Analiza homogene tačnosti epohe

Pitanje homogenosti po tačnosti ocena koordinata tačaka mreže u dve epohe, ekvivalentno je pitanju jednakosti njihovih varijansi $\hat{\sigma}_{0i}^2$. Da bi se njihova jednakost utvrdila sa odgovarajućom verovatnoćom, postavljaju se nulta i alternativna hipoteza

$$H_0: E(\hat{\sigma}_{01}) = E(\hat{\sigma}_{02}) = \hat{\sigma}_0 \quad (14)$$

$$H_a: E(\hat{\sigma}_{01}) \neq E(\hat{\sigma}_{02}) \neq \hat{\sigma}_0 \quad (15)$$

sa test veličinom

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} \sim F_{1-\alpha, f_1, f_2} \quad (16)$$

za $\hat{\sigma}_{01}^2 > \hat{\sigma}_{02}^2$

odnosno

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{02}^2}{\hat{\sigma}_{01}^2} \sim F_{1-\alpha, f_2, f_1} \quad \text{za } \hat{\sigma}_{02}^2 > \hat{\sigma}_{01}^2 \quad (17)$$

Ukoliko važi $T \leq F_{1-\alpha, f_1, f_2}$ prihvata se nulta hipoteza, odnosno izvodi se zaključak da su varijanse nulte i kontrolne epohe homogene. U tom slučaju, definitivna vrednost varijanse se računa na osnovu sledećeg izraza

$$\hat{\sigma}_0^2 | H_0 = \frac{f_1 \hat{\sigma}_{01}^2 + f_2 \hat{\sigma}_{02}^2}{f_1 + f_2} \quad (18)$$

gde su $\hat{\sigma}_{01}^2$ i $\hat{\sigma}_{02}^2$ ocenjene varijanse nulte i kontrolne epohe, a f_1 i f_2 brojevi stepeni slobode nulte i kontrolne epohe respektivno. U slučaju da epohe nisu homogene tačnosti, test statistika sledi Fišer-ovu necentralnu raspodelu a za definitivnu vrednost ocenjene varijanse, potrebno je usvojiti varijansu iz epohe koja je manje (lošije) tačnosti

$$\hat{\sigma}_0^2 | H_a = \hat{\sigma}_{01}^2 \quad \text{za } \hat{\sigma}_{01}^2 > \hat{\sigma}_{02}^2 \quad (19)$$

odnosno

$$\hat{\sigma}_0^2 | H_a = \hat{\sigma}_{02}^2 \quad \text{za } \hat{\sigma}_{02}^2 > \hat{\sigma}_{01}^2 \quad (20)$$

Prethodni način usvajanja definitivne varijanse predstavlja iznuđen način, koji se primenjuje u slučajevima kada nije utvrđen razlog nehomogenosti epohe. U svim ostalim slučajevima potrebno je koristiti izraz (18).

3.3. Globalni test podudarnosti cele mreže

Pored definitivne vrednosti srednje varijanse za dve epohe merenja (Izraz 18), druga veličina koja služi za formiranje test statistike za ispitivanje podudarnosti mreže u dve epohe, naziva se „srednje neuklapanje“ ili „rascep“ θ i računa se kao

$$\theta^2 = \frac{d^T Q_d^+ d}{h} \quad (21)$$

pri čemu je $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{X}}_1 - \hat{\mathbf{X}}_0$ vektor pomeranja, $\hat{\mathbf{X}}_0$ i $\hat{\mathbf{X}}_1$ vektori izravnatih koordinata nulte i kontrolne epohe merenja, $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}_0} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}_1}$ kofaktorska matrica, \mathbf{Q}_d^+

\mathbf{P}_d pseudoinverzija matrice \mathbf{Q}_d i $h = r(\mathbf{Q}_d)$ rang kofaktorske matrice \mathbf{Q}_d .

Test veličina za ispitivanje podudarnosti cele mreže

$$T = \frac{\theta^2}{\hat{\sigma}_0^2} \quad (22)$$

u opštem slučaju sledi Fišer-ovu necentralnu raspodelu sa parametrima h, f i λ (objašnjenim u poglavlju 2) i koristi se kao test statistika za ispitivanje podudarnosti (kongruencije) mreže opažane u dve epohe, odnosno za testiranje hipoteza

$$H_0: E(\mathbf{d}) = 0 \quad (23)$$

$$H_a: E(\mathbf{d}) \neq 0 \quad (24)$$

Ukoliko važi sledeća nejednakost

$$T \leq F_{1-\alpha, h, f} \quad (25)$$

nema osnova za odbacivanje nulte hipoteze, odnosno sa verovatnoćom $1 - \alpha$ se može smatrati da su mreže podudarne između dve epohe. U suprotnom, nulta hipoteza se ne prihvata. Odbacivanjem nulte hipoteze izvodi se zaključak da mreže nisu podudarne između dve epohe pri čemu se njihovo odstupanje ne može objasniti slučajnim greškama, već se donosi zaključak da se radi o signifikantnim pomeranjima tačaka mreže [14], [19].

3.4. Globalni test podudarnosti osnovnih tačaka

Ukoliko se na osnovu globalnog testa kongruencije, može zaključiti da negde u mreži postoje značajne deformacije, potrebno je izvršiti njihovu lokalizaciju. Lokalizacija nestabilnih tačaka se vrši metodom komponentata maksimalnog jaza (rascepa), pošto je iskaz testa u ovoj proceduri u saglasnosti sa rezultatima globalnog testa [14].

Osnovna ideja ovog postupka sastoji se u tome da se srednje neuklapanje θ^2 (izraz 21) razloži na dva nezavisna sabirka. U tu svrhu, vektor deformacija \mathbf{d} se prvo deli na dva podvektora \mathbf{d}_S i \mathbf{d}_O

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_S \\ \mathbf{d}_O \end{bmatrix} \quad (26)$$

pri čemu \mathbf{d}_S predstavlja vektor deformacija koji se odnosi na osnovne tačke mreže, dok je \mathbf{d}_O vektor deformacija koji odgovara tačkama objekta. Saglasno ovoj podeli, vrši se i podela inverzne matrice kofaktora \mathbf{Q}_d^+ , odnosno matrice težina \mathbf{P}_d

$$\mathbf{Q}_d^+ = \mathbf{P}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{SS} & \mathbf{P}_{SO} \\ \mathbf{P}_{OS} & \mathbf{P}_{OO} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Zameno izraza (26) i (27) u deo izraza (21) koji se odnosi na kvadratnu formu (brojilac), dobija se sledeći izraz

$$d^T Q_d^+ d = d_S^T P_{SS} d_S + 2d_S^T P_{SO} d_O \quad (28)$$

$$+ \mathbf{d}_0^T \mathbf{P}_{00} \mathbf{d}_0$$

Podela izraza (28) na dva sabirka, moguća je jedino ukoliko se uvedu sledeće transformacije

$$\bar{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{d}_0 + \mathbf{P}_{00}^{-1} \mathbf{P}_{0s} \mathbf{d}_s \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ss} = \mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{s0} \mathbf{P}_{00}^{-1} \mathbf{P}_{0s} \quad (30)$$

pa se sada se izraz (28) može predstaviti kao

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s + \bar{\mathbf{d}}_0^T \mathbf{P}_{00} \bar{\mathbf{d}}_0 \quad (31)$$

Na ovaj način, izvršena je podela ukupnog neuklapanja mreže na deo neuklapanja koji se odnosi na tačke osnovne mreže i deo neuklapanja koji se odnosi na tačke objekta.

Koristeći izraz (31) računa se srednji rascep θ_s^2 koji odgovara tačkama osnovne mreže

$$\theta_s^2 = \frac{\mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s}{h_s} \quad (32)$$

pri čemu je $h_s = r(\bar{\mathbf{P}}_{ss})$ rang matrice $\bar{\mathbf{P}}_{ss}$. Test veličina za ispitivanje podudarnosti dela mreže koji odgovara osnovnim tačkama, formira se na osnovu izraza

$$T = \frac{\theta_s^2}{\bar{\sigma}_0^2} \quad (33)$$

i upoređuje se sa graničnom vrednošću $F_{1-\alpha, h_s, f}$. Ukoliko važi sledeća nejednakost

$$T \leq F_{1-\alpha, h_s, f} \quad (34)$$

sa verovatnoćom $1 - \alpha$ se može tvrditi da nema značajnih razlika u položajima tačaka osnovne mreže. U suprotnom, može se tvrditi da postoji barem jedna tačka osnovne mreže koja je signifikantno pomerenjena.

3.4.1. Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka

Ukoliko globalni test podudarnosti osnovnih tačaka ukaže na postojanje osnovnih tačaka koje su značajno promenile svoj položaj između dve posmatrane epohe, potrebno je izvršiti njihovu identifikaciju a zatim i eliminaciju iz skupa stabilnih tačaka. Za ove potrebe vrši se podela vektora \mathbf{d}_s na dva subvektora

$$\mathbf{d}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \quad (35)$$

pri čemu subvektor \mathbf{d}_B sadrži samo dve komponente koordinata osnovne tačke koja se smatra *a priori* nestabilnom, dok subvektor \mathbf{d}_F sadrži komponente koordinata preostalih osnovnih tačaka. Saglasno ovoj podeli, vrši se podela i odgovarajuće matrice težina $\bar{\mathbf{P}}_{ss}$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FB} \\ \mathbf{P}_{BF} & \mathbf{P}_{BB} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Uvođenjem transformacija

$$\bar{\mathbf{d}}_B = \mathbf{d}_B + \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF} \mathbf{d}_F \quad (37)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{FF} = \mathbf{P}_{FF} - \mathbf{P}_{FB} \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF} \quad (38)$$

prvi sabirak kvadratne forme iz izraza (31) postaje

$$\mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s = \mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F + \bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B \quad (39)$$

Sada se za svaku tačku osnovne mreže, za koju se pretpostavlja da je nestabilna, može proračunati doprinos nepodudarnosti θ_j^2

$$\theta_j^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B}{h_B}$$

$$\text{za } (j=1, 2, \dots, k_s) \quad (40)$$

gde je $h_B = r(\mathbf{P}_{BB})$ rang matrice \mathbf{P}_{BB} i jednak je $h_B = 2$, za 2D mreže, odnosno $h_B = 1$ za 1D mreže. Broj k_s predstavlja broj osnovnih tačaka u mreži. Kako nestabilna tačka osnovne mreže unapred nije poznata, onda u prvoj iteraciji komponente koordinata prve osnovne tačke postaju komponente subvektora \mathbf{d}_B a komponente preostalih $k_s - 1$ osnovnih tačaka postaju komponente subvektora \mathbf{d}_F . Broj ovakvih iteracija jednak je broju osnovnih tačaka k_s . U k_s -toj iteraciji, komponente k_s -te osnovne tačke postaju komponente vektora \mathbf{d}_B , a komponente preostalih $k_s - 1$ osnovnih tačaka, postaju komponente subvektora \mathbf{d}_F . Nakon izvršenih k_s iteracija, uočava se maksimalna vrednost

$$\theta_{max}^2 = \max(\theta_j^2), \text{ za } (j=1, 2, \dots, k_s) \quad (41)$$

U iteraciji, za koju je dobijena maksimalna vrednost doprinosa nepodudarnosti, uočava se osnovna tačka mreže koja se proglašava nestabilnom tačkom. Ova tačka se zatim prebacuje u skup tačaka na objektu. U istoj iteraciji vrši se testiranje da li među preostalim $k_s - 1$ osnovnih tačaka postoji još nestabilnih tačaka. U tom cilju se određuje srednja nepodudarnost preostalih $k_s - 1$ tačaka

$$\theta_{REST}^2 = \frac{\mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F}{h_F} \quad (42)$$

pri čemu je $h_F = r(\bar{\mathbf{P}}_{FF})$ rang matrice $\bar{\mathbf{P}}_{FF}$. Zatim se formira test veličina

$$T = \frac{\theta_{REST}^2}{\bar{\sigma}_0^2} \quad (43)$$

i upoređuje sa graničnom vrednošću $F_{1-\alpha, h_F, f}$. Ukoliko važi sledeća nejednakost

$$T \leq F_{1-\alpha, h_F, f} \quad (44)$$

sa verovatnoćom $1 - \alpha$ se može tvrditi da je preostalim $k_s - 1$ osnovnih tačaka stabilno i može se preći na anлізу stabilnosti tačaka na objektu. U suprotnom, potrebno je ponoviti postupak lokalizacije nestabilnih osnovnih tačaka, primenjujući izraze od (26) do (44).

Detektovane nestabilne osnovne tačke se u svakoj narednoj iteraciji tretiraju kao tačke objekta, a

postupak određivanja nestabilnih osnovnih tačaka se završava ispunjenjem uslova (izraz 44) nakon čega se analiziraju tačke na objektu.

3.5. Globalni test podudarnosti tačaka na objektu

U cilju ispitivanja globalne podudarnosti tačaka na objektu, vektor deformacija \mathbf{d} se takođe deli na dva podvektora \mathbf{d}_S i \mathbf{d}_O

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_S \\ \mathbf{d}_O \end{bmatrix} \quad (45)$$

pri čemu \mathbf{d}_S predstavlja vektor deformacija koji se odnosi na osnovne tačke mreže koje su u prethodnom koraku proglašene stabilnim tačkama, dok je \mathbf{d}_O vektor deformacija koji odgovara tačkama objekta i nestabilnim osnovnim tačkama. U skladu sa ovom podelom, vrši se i podela matrice težina \mathbf{P}_d na

$$\mathbf{Q}_d^+ = \mathbf{P}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{SS} & \mathbf{P}_{SO} \\ \mathbf{P}_{OS} & \mathbf{P}_{OO} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Kvadratna forma iz izraza (21) postaje

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d} = \mathbf{d}_S^T \mathbf{P}_{SS} \mathbf{d}_S + 2\mathbf{d}_S^T \mathbf{P}_{SO} \mathbf{d}_O + \mathbf{d}_O^T \mathbf{P}_{OO} \mathbf{d}_O \quad (47)$$

pri čemu se uvođenjem sledećih transformacija

$$\bar{\mathbf{d}}_O = \mathbf{d}_O + \mathbf{P}_{OO}^{-1} \mathbf{P}_{OS} \mathbf{d}_S \quad (48)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{SS} = \mathbf{P}_{SS} - \mathbf{P}_{SO} \mathbf{P}_{OO}^{-1} \mathbf{P}_{OS} \quad (49)$$

može predstaviti pomoću dva sabirka

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d} = \mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S + \bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O \quad (50)$$

Na ovaj način, izvršena je podela ukupnog neuklapanja na deo koji se odnosi na stabilne tačke osnovne mreže i deo koji se odnosi na tačke objekta i nestabilne osnovne tačke. Koristeći izraz (50) računa se srednje neuklapanje koje odgovara tačkama objekta i nestabilnim osnovnim tačkama

$$\theta_0^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O}{h_0} \quad (51)$$

pri čemu je $h_0 = r(\mathbf{P}_{OO})$ rang matrice \mathbf{P}_{OO} .

Test veličina za ispitivanje podudarnosti dela mreže koji se odnosi na tačke objekta i nestabilne osnovne tačke, formira se kao

$$T = \frac{\theta_0^2}{\bar{\theta}_0^2} \quad (52)$$

i upoređuje se sa graničnom vrednošću $F_{1-\alpha, h_0, f}$. Ukoliko važi sledeća nejednakost

$$T < F_{1-\alpha, h_0, f} \quad (53)$$

Sa verovatnoćom $1 - \alpha$ se može tvrditi da su tačke na objektu statistički stabilne. U suprotnom, postoji osnov za izvođenje zaključka o nestabilnosti jedne ili više tačaka koje figurišu u vektoru $\bar{\mathbf{d}}_O$. Ove tačke je

potrebno identifikovati, a za njihovu lokalizaciju u literaturi se mogu susresti dva načina [14]. Prvi način je identičan postupku lokalizacije nestabilnih osnovnih tačaka, sa tim što se u ovom slučaju postupak primenjuje na kvadratnu formu $\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O$. Drugi način predstavlja aproksimativni postupak lokalizacije zasnovan na razmatranju odnosa „signal-šum“.

3.5.1. Lokalizacija nestabilnih tačaka na objektu

Postupak lokalizacije nestabilnih tačaka na objektu identičan je postupku lokalizacije nestabilnih osnovnih tačaka. U tu svrhu, vrši se podela vektora $\bar{\mathbf{d}}_O$ na

$$\bar{\mathbf{d}}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \quad (54)$$

kao i podela matrice težina \mathbf{P}_{OO} na

$$\mathbf{P}_{OO} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FB} \\ \mathbf{P}_{BF} & \mathbf{P}_{BB} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Dalji postupak identifikacije nestabilnih tačaka objekta, realizuje se iterativnim putem, na identičan način kao i postupak identifikacije nestabilnih osnovnih tačaka, tako što se izrazi za transformaciju (37) i (38) primenjuju na vektor $\bar{\mathbf{d}}_O$ i matricu \mathbf{P}_{OO} . Za razliku od lokalizacije nestabilnih osnovnih tačaka, broj iteracija u postupku lokalizacije nestabilnih tačaka na objektu k_0 jednak je broju tačaka objekta i nestabilnih osnovnih tačaka, odnosno broju tačaka koje figurišu u vektoru $\bar{\mathbf{d}}_O$. U svakoj iteraciji određuje se neuklapanje θ_j^2 (Izraz 40).

Tačka iz vektora $\bar{\mathbf{d}}_O$, za koju se dobije maksimalna vrednost

$$\theta_{max}^2 = \max(\theta_j^2), \quad \text{za } (j=1, 2, \dots, k_0) \quad (56)$$

smatra se nestabilnom tačkom i vrši se njena eliminacija iz dalje analize. U istoj iteraciji se računa srednji rascep preostalih tačaka θ_{REST}^2 i formira test veličina koja se upoređuje sa graničnom vrednošću. Ukoliko je test veličina manja od granične vrednosti

$$T < F_{1-\alpha, h_F, f} \quad (57)$$

može se tvrditi da su preostale tačke u vektoru $\bar{\mathbf{d}}_O$ stabilne, dok u suprotnom, postupak lokalizacije treba nastaviti uz iterativno eliminisanje nestabilnih tačaka sve dok uslov (57) ne bude ispunjen.

3.5.2. Lokalizacija nestabilnih tačaka na objektu – približni postupak

Ukoliko su pomeranja tačaka na objektu većih vrednosti (pet i više puta) od njihovih korespondentnih standardnih odstupanja, onda je za potrebe lokalizacije nestabilnih tačaka objekta moguće koristiti metode aproksimacije kao što je razmatranje odnosa „signal-šum“ transformisanih koordinatnih razlika tačaka obj-

ekta [14], [18]. Za svaku komponentu vektora \bar{d}_{0j} računa se njegovo standardno odstupanje $\sigma_{\bar{d}_{0j}}$ i formira se količnik

$$t = \frac{\bar{d}_{0j}}{\sigma_{\bar{d}_{0j}}}, \quad \sigma_{\bar{d}_{0j}} = \sigma_0^2 \sqrt{P_{00j}^{-1}} \quad (58)$$

Ukoliko je $t > 5$, za razmatranu komponentu vektora pomeraanja, tačka objekta na koju se ta komponenta odnosi, smatra se statistički nestabilnom tačkom [14].

3.6. Određivanje definitivnih pomeraanja tačaka

U cilju određivanja definitivnih vrednosti pomeraanja tačaka geodetske mreže, potrebno je vektor deformacija optimalnog datuma \mathbf{d} transformisati u vektor deformacija čiji datum definišu prethodno utvrđene stabilne osnovne tačke mreže \mathbf{d}_t . Analogno transform-

aciji vektora deformacija, vrši se i transformacija kofaktorske matrice optimalnog datuma \mathbf{Q}_d u \mathbf{Q}_{dt}

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{Sd} \quad (59)$$

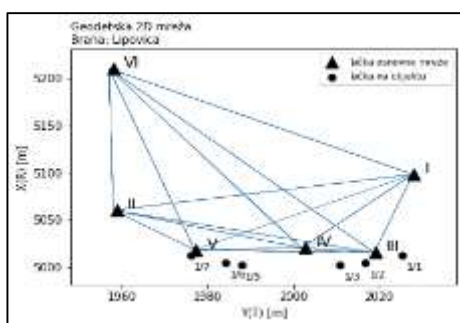
$$\mathbf{Q}_{dt} = \mathbf{SQ}_d\mathbf{S}^T \quad (60)$$

pri čemu je \mathbf{S} matrica Helmert-ove transformacije sličnosti.

4. PRAKTIČNI PRIMER

Kao praktični primer primene Pelcer-ovog postupka, izabrana je geodetska 2D mreža brane „Lipovica“ koja služi kao osnova za određivanje horizontalnih pomeraanja tačaka na brani.

Ista mreža je korišćena i za potrebe analize stabilnosti tačaka primenom Karlsruhe metode, pri čemu su dobijeni rezultati zajedno sa svim neophodnim ulaznim podacima dostupni u radu [21].



a) Kontrolna 2D mreža brane



b) Nizvodno lice brane

Slika 1 - Grafički prikaz deformacionog modela brane Lipovica

Tabela 3. Prethodna analiza osetljivosti i simulirana pomeraanja tačaka geodetske mreže brane Lipovica

Tačka	Osetljivost geodetske mreže				Simulirana pomeraanja			
	dp_y [mm]	dp_x [mm]	dp_{yx} [mm]	θ [°.]	d_y [mm]	d_x [mm]	d_{yx} [mm]	Opis
IV	0.4	-0.4	0.5	137.35	0.0	0.0	0.0	Osnovna tačka
III	0.7	0.2	0.8	74.15	0.0	0.0	0.0	Osnovna tačka
VI	0.5	-1.7	1.7	163.06	-24.0	10.0	26.0	Osnovna tačka
I	0.2	2.0	2.1	5.57	0.0	0.0	0.0	Osnovna tačka
II	0.9	-1.4	1.7	145.58	-18.0	14.0	22.8	Osnovna tačka
V	0.8	-0.4	0.9	118.06	0.0	0.0	0.0	Osnovna tačka
1/1	2.2	-0.9	2.4	111.00	0.0	0.0	0.0	Tačka objekta
1/2	0.6	-0.5	0.8	131.94	9.0	-9.0	12.7	Tačka objekta
1/3	0.3	-0.7	0.8	153.88	0.0	0.0	0.0	Tačka objekta
1/5	0.6	0.4	0.7	54.54	0.0	0.0	0.0	Tačka objekta
1/6	0.7	0.2	0.7	70.63	-4.0	-7.0	8.1	Tačka objekta
1/7	0.9	0.1	0.9	83.36	0.0	0.0	0.0	Tačka objekta

Kako bi se opisala dosledna veza između projekta i realizacije geodetskih radova za potrebe osmatranja inženjerskih objekata, u prethodnoj tabeli su dati podaci koji se odnose na osetljivost geodetske mreže koji se određuju u fazi izrade projekta (poglavlje 2).

U istoj tabeli, dati su i podaci simuliranih pomeraanja koje je potrebno detektovati primenom Pelcer-ove metode (poglavlje 3). Svi proračuni u radu izvršeni su korišćenjem posebnog softvera (vlastito rešenje u Python-u).

4.1. Izravnanje nulte i kontrolne epohe

Izravnanje nulte i kontrolne epohe izvršeno je po modelu posrednog izravnjanja primenom metode najmanjih kvadrata pri čemu su ocene nepoznatih parametara određene uz uslov minimalizacije traga kofaktorske matrice nepoznatih parametara na svim tačkama mreže.

Iz izravnjanja nulte epohe određeno je *a posteriori* standardno odstupanje $\hat{\sigma}_{01} = 0.6520$ sa $f_1 = 20$ stepeni slobode, dok je iz izravnjanja kontrolne epohe određeno *a posteriori* standardno odstupanje $\hat{\sigma}_{02} = 0.9441$ sa $f_2 = 20$ stepeni slobode. Ulazni podaci, kao i rezultati izravnjanja, dostupni su u radu [21].

4.2. Analiza homogenosti epoha

Analiza homogenosti epoha izvršena primenom Fišer-ovog testa (Izraz 18) pri čemu je sračunata vrednost test statistike $T = 2.096$ koja je manja od vrednosti kvantila Fišer-ove raspodele $F_{1-\alpha, f_1, f_2} = 2.124$ na osnovu čega je zaključeno da su epohe homogene tačnosti.

U skladu sa izvedenim zaključkom, sračunata je vrednost objedinjenog *a posteriori* standardnog odstupanja nulte i kontrolne epohe $\hat{\sigma}_0 = 0.8113$ sa $f = f_1 + f_2 = 40$ stepeni slobode (Izraz 18).

4.3. Globalni test podudarnosti cele mreže

Za potrebe formiranja globalnog testa podudarnosti tačaka kontrolne mreže između dve epohe, sračunata je vrednost kvadratne forme $\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d} = 26060.01$ sa $h = r(\mathbf{Q}_d) = 20$.

Na osnovu ovih vrednosti određeno je srednje neuklapanje cele mreže $\theta^2 = 1303.00$ (izraz 21) a zatim i test statistika $T = 1979.620$ koja je veća od kvantila

Tabela 4. Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka-sumarno

Iteracija	Tačka	θ_j^2	h_j	θ_{REST}^2	h_{REST}	T	$F_{1-\alpha, h_{REST}, 40}$	$\bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B$	$\mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F$	$\mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S$
1	II	2259.18	2	157.86	6	239.833	2.336	4518.37	947.16	5465.52
2	VI	470.92	2	1.33	4	2.022	2.606	941.83	5.32	947.16

4.4. Globalni test podudarnosti tačaka na objektu

Kako su u postupku identifikacije nestabilnih osnovnih tačaka mreže, za tačke II i VI potvrđena signifikantna pomeranja, izvršena je podela vektora deformacija \mathbf{d} na podvektore \mathbf{d}_S i \mathbf{d}_O pri čemu se podvektor \mathbf{d}_S odnosi na prethodno utvrđene stabilne osnovne tačke mreže, dok se podvektor \mathbf{d}_O odnosi na nestabilne osno-vne tačke kao i tačke objekta. Saglasno ovoj podeli, izvršena je i podela ukupne kvadratne forme $\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d} = 26060.01$ na kvadratnu formu stabilnih osnovnih tačaka $\mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S = 5.32$ i kvadratnu formu tačaka na objektu $\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O = 26054.69$. Dalje je sračunata vrednost srednjeg rasepa tačaka objekta $\theta_0^2 =$

Fišer-ove raspodele $F_{1-0.05, 20, 40} = 1.839$ na osnovu čega je zaključeno da mreže nisu podudarne.

4.4. Globalni test podudarnosti osnovnih tačaka

U cilju određivanja podudarnosti osnovnih tačaka mreže, izvršena je podela vektora deformacija \mathbf{d} na deo koji odgovara osnovnim tačkama \mathbf{d}_S i deo koji se odnosi na tačke objekta \mathbf{d}_O . Saglasno ovoj podeli, izvršena je podela matrice težina \mathbf{P}_d kao i ukupne kvadratne forme $\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}$ na podformu koja odgovara osnovnim tačkama $\mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S = 5465.52$ i podformu koja odgovara tačkama objekta $\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O = 20594.49$. Na osnovu vrednosti kvadratne forme osnovnih tačaka $\mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S$ sračunato je srednje neuklapanje osnovnih tačaka $\theta_S^2 = 683.19$ sa $h_S = r(\bar{\mathbf{P}}_{SS}) = 8$ a zatim i test statistika $T = 1037.956$ koja je veća od odgovarajućeg kvantila $F_{1-0.05, 8, 40} = 2.180$ na osnovu čega je zaključeno da među osnovnim tačkama postoji barem jedna statistički nestabilna tačka.

4.4.1. Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka

Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka izvršena je kroz ukupno 2 iteracije pri čemu je u svakoj iteraciji realizovano onoliko poditeracija koliki je i bio broj osnovnih tačaka u datoj iteraciji. U svakoj poditeraciji vršena je podela vektora deformacija osnovnih tačaka \mathbf{d}_S na podvektor testirane tačke \mathbf{d}_B i podvektor preostalih tačaka \mathbf{d}_F . U skladu sa ovom podelom, u svakoj pod-iteraciji, vršena je i podela kvadratne forme $\mathbf{d}_S^T \bar{\mathbf{P}}_{SS} \mathbf{d}_S$ na podforme $\bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B$ i $\mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F$ koje su služile za određivanje srednjeg rasepa testirane tačke θ_j^2 i srednjeg rasepa preostalih tačaka θ_{REST}^2 (poglavljje 3.4.1). Sumarni prikaz lokalizacije nestabilnih osnovnih tačaka II i VI, dat je u narednoj tabeli.

2171.22 za $h_O = r(\mathbf{P}_{OO}) = 12$ a zatim i vrednost test statistike $T = 3298.693$ koja je veća od kvantila Fišer-ove raspodele $F_{1-0.05, 12, 40} = 2.003$ čijim upoređivanjem je izveden zaključak da tačke objekta nisu podudarne između dve epohe. Dalje je, u cilju identifikacije nestabilnih tačaka objekta, izvršena njihova lokalizacija primenom postupaka koji su opisani u poglavljima (3.5.1 i 3.5.2).

4.5.1. Lokalizacija nestabilnih tačaka na objektu

Lokalizacija nestabilnih tačaka objekta izvršena je po istoj analogiji kao i lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka. Ukupan broj izvršenih iteracija iznosio je 4 pri čemu je u svakoj iteraciji izvršeno onoliko

poditeracija koliki je bio i broj tačaka objekta u datoj iteraciji. Prilikom svake poditeracije, vršena je podela vektora deformacija $\bar{\mathbf{d}}_O$ na podvektor tačke objekta koja se ispituje \mathbf{d}_B i podvektor preostalih tačaka objekta \mathbf{d}_F . Saglasno ovoj podeli, vršena je i podela kvadratne forme tačaka objekta $\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O$ na podforme $\bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B$ i $\bar{\mathbf{d}}_F^T \mathbf{P}_{FF} \bar{\mathbf{d}}_F$ na osnovu kojih su sračunata

Tabela 5. Lokalizacija nestabilnih tačaka objekta-sumarno

Iteracija	Tačka	θ_j^2	h_j	θ_{REST}^2	h_{REST}	T	$F_{1-\alpha, h_{REST}, 40}$	$\bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B$	$\bar{\mathbf{d}}_F^T \mathbf{P}_{FF} \bar{\mathbf{d}}_F$	$\bar{\mathbf{d}}_O^T \mathbf{P}_{OO} \bar{\mathbf{d}}_O$	ty	tx
1	1/2	7611.77	2	1083.11	10	1645.551	2.077	15223.55	10831.14	26054.69	130.72	60.04
2	II	2587.48	2	709.04	8	873.956	2.180	5174.97	5672.32	10847.29	83.21	43.35
3	1/6	2233.80	2	221.29	6	272.765	2.336	4467.61	1327.76	5795.37	39.73	55.73
4	VI	666.09	2	0.50	4	0.622	2.606	1332.18	2.02	1334.19	32.53	5.46

4.6. Određivanje definitivnih pomeranja tačaka

Definitivne vrednosti deformacija tačaka kontrolne mreže, sračunate su primenom S-transformacije korišćenjem izraza (59) i (60). Vektor deformacija optimalnog datuma \mathbf{d} transformisan je u vektor deformacija \mathbf{d}_t čiji datum definišu prethodno utvrđene

Tabela 6. Definitivne vrednosti pomeranja tačaka kontrolne mreže brane Lipovica

Tačka	Simulirano				Korišćena metoda													
					Pelcer							Karlsruhe						
	d_y [mm]	d_x [mm]	d_{yx} [mm]	Stabil na	d_y [mm]	d_x [mm]	d_{yx} [mm]	σ_{d_y} [mm]	σ_{d_x} [mm]	$\sigma_{d_{yx}}$ [mm]	Stabil na	d_y [mm]	d_x [mm]	d_{yx} [mm]	σ_{d_y} [mm]	σ_{d_x} [mm]	$\sigma_{d_{yx}}$ [mm]	Stabil na
IV	0.0	0.0	0.0	Da	0.2	0.0	0.2	0.1	0.1	0.1	Da	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	Da
III	0.0	0.0	0.0	Da	0.1	-0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	Da	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	Da
VI	-24.0	10.0	26.0	Ne	-22.3	7.0	23.4	0.8	1.5	1.7	Ne	-23.1	7.9	24.5	0.7	1.5	1.6	Ne
I	0.0	0.0	0.0	Da	-0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.1	Da	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	Da
II	-18.0	14.0	22.8	Ne	-17.6	14.0	22.5	0.2	0.3	0.4	Ne	-17.7	13.7	22.4	0.2	0.3	0.4	Ne
V	0.0	0.0	0.0	Da	-0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.2	Da	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	Da
1/1	0.0	0.0	0.0	Da	-0.1	-0.1	0.1	0.6	0.3	0.7	Da	0.2	-0.1	0.2	0.7	0.4	0.8	Da
1/2	9.0	-9.0	12.7	Ne	9.0	-9.1	12.9	0.2	0.2	0.3	Ne	9.0	-9.1	12.8	0.1	0.2	0.2	Ne
1/3	0.0	0.0	0.0	Da	0.0	-0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	Da	-0.1	-0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	Da
1/5	0.0	0.0	0.0	Da	-0.1	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	Da	-0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	Da
1/6	-4.0	-7.0	8.1	Ne	-4.2	-7.1	8.2	0.2	0.2	0.2	Ne	-4.2	-7.0	8.2	0.1	0.1	0.2	Ne
1/7	0.0	0.0	0.0	Da	-0.2	0.0	0.2	0.2	0.2	0.3	Da	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	Da

5. ZAKLJUČAK

Pelcer-ovom metodom deformacione analize potvrđena je stabilnost nepomeranih tačaka, dok su sve simulacijom pomerene tačke identifikovane kao statistički nestabilne. Sumarni prikaz pomeranja tačaka kontrolne mreže, određenih primenom Pelcer-ove i Karlsruhe metode, prikazan je u tabeli (6).

srednja neuklapanja testira-nih tačaka θ_j^2 i preostalih tačaka θ_{REST}^2 .

Postupak lokalizacije nestabilnih tačaka objekta izvršen je i primenom aproksimativnog metoda (poglavlje 3.5.2) pri čemu je konstatovano da obe metode daju saglasne rezultate za nestabilne tačke objekta 1/2, II, 1/6 i VI.

stabilne osnovne tačke mreže, odnosno u našem slučaju tačke I, III, IV i V.

Analogno transformaciji vektora deformacija, izvršena je i transformacija odgovarajuće kofaktorske matrice.

Na osnovu prikazane tabele, može se zaključiti da su obe metode dale saglasne rezultate u pogledu određivanja stabilnih i nestabilnih tačaka kao i u pogledu određivanja vrednosti deformacija, čije su međusobne razlike praktično beznačajne.

Upoređivanjem podataka prethodne ocene tačnosti (tabela 3) sa podacima identifikovanih pomeranja (tabela 6), može se zaključiti da su identifikovana

pomeranja nestabilnih osnovnih tačaka (22.5 mm za tačku II i 23.4 mm za tačku VI) za oko deset puta veća od minimalnih vrednosti deformacija koje se mogu odrediti na ovim tačkama (1.7 mm za obe tačke), što predstavlja indikator o nestabilnosti navedenih tačaka. Ova pretpostavka je i potvrđena primenom dve različite metode deformacione analize (tabela 6). Sa druge strane, za stabilne osnovne tačke mreže su identifikovana pomeranja čije su vrednosti bliske vrednostima prethodne ocene tačnosti (tabela 3), što ukazuje da su njihova identifikovana pomeranja (koja su bliska nuli) rezultat grešaka pri merenju a ne rezultat stvarne promene položaja ovih tačaka. Drugim rečima, vrednosti deformacija stabilnih osnovnih tačaka su u granicama tačnosti njihovog određivanja, dok za nestabilne osnovne tačke to nije slučaj.

LITERATURA

- [1] International Commission on Large Dams, *World Register od Dams*, [Online]. Available: https://www.icoldcigb.org/GB/world_register/database_presentat ion.asp, 2022.
- [2] Welsh W, *Entwicklung der Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe geodätischer Netze*, München, 1979.
- [3] Božić B, Milovanović B, Tucikešić S, Vasiljević S, Ocena pomeranja inženjerskih struktura u programskom paketu PANDA, *Tehnika*, pp. 295-301, 2022.
- [4] Batilović M, *Robusna ocena deformacija u slobodnim geodetskim mrežama primenom evolutivnih optimizacionih algoritama*, Novi Sad, 2020.
- [5] Milovanović B, *Projektovanje kontrolnih mreža hidrotehničkih objekata za potrebe praćenja*, Beograd, 2016.
- [6] Sušić Z, Batilović M, Ninkov T, Bulatović V, Aleksić I, Nikolić G, Geometric deformation analysis in free geodetic networks: Case study for Fruška Gora in Serbia, *Acta Geodyn. Geomater*, vol. 14, no. 3, pp. 341–355, Novi Sad, 2017.
- [7] Pelzer H, *Nachweis von Staumauerdeformationen unter Anwendung statistischer Methoden*, 57. Deutscher Geodätag, Braunschweig 1972.
- [8] Niemeier W, *Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen*, VII. Int. Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976.
- [9] Aydin C, *Geodetic deformation analysis*, Short Lecture Notes for Graduate Students, Istanbul, 2014.
- [10] Aydin C, *Power of Global Test in Deformation Analysis*, Istanbul, 2012.
- [11] Kuang S. L, *Optimization and design of deformation monitoring schemes*, University of New Brunswick, 1991.
- [12] Baarda W, A testing procedure for use in geodetic networks, Netherlands Geodetic Commission, *Publ Geodesy*, 2/5, Delft, Netherland, 1968.
- [13] Begović A, Gospavić Z, *Inženjerska geodzija I*, Beograd: Građevinski fakultet u Beogradu, 2016.
- [14] Dupraz H, Niemeier W, Pelzer H, *Analyse von Deformationsmessungen durch Klaffungszerlegung angewandt auf die Netze "montsalvens" und "hu-aytapallana"*, Hannover, 1979.
- [15] Ašanin S, *Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za određivanje pomeranja i deformacija objekta i tla*, Beograd, 1986.
- [16] Mihailović K, Aleksić I, *Deformaciona analiza geodetskih mreža*, Građevinski fakultet u Beogradu, Beograd, 1991.
- [17] Mihailović K, Aleksić I, *Koncepti mreža u geodetskom premeru*, Građevinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2008.
- [18] Ambrožič T, *Deformacijska analiza po postupku Hannover*, Odelek za geodeziju, Ljubljana, 2001.
- [19] Ašanin S, Pandžić S, Gospavić Z, Milovanović B, *Zbirka odabranih zadataka iz inženjerske geodezije*, Beograd, 2007.
- [20] Božić B, *Račun izravnjanja - napredni nivo*, verzija Septembar, 2012, Građevinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2012.
- [21] Bošković V, Pejović M, Božić B, Gospavić, Z, Analiza stabilnosti brane Lipovica primenom Karlsrue metode, *Tehnika*, Beograd, 2023.

SUMMARY**ANALYSIS OF THE STABILITY OF THE LIPOVICA DAM USING THE PELZER METHOD**

The topic of the paper refers to the application of Pelzer's deformation analysis procedure for the purpose of determining the deformations of the control network points of the Lipovica dam. The purpose of geodetic surveying of engineering structures such as high dams, in a concise manner, is given in a separate chapter. For this reason, the paper describes the basic theory of Pelzer's method of determining deformations, the algorithm and the method of application. In addition to the actual method of determining the displacement, the paper also describes the theory related to the minimum value of the magnitude of the displacement, which can be "certainly" determined using geodetic methods.

Key Words: *Pelzer, deformation, displacement magnitude, dam*