

339

Rane železničke pruge su se sastojale samo od pravaca i kružnih krivina. Sa malom brzinom kretanja i velikim poluprečnikom kružnih krivina, direktan prelaz između pravih i kružnih deonica smatran je bezbednim u pogledu kretanja vozila.

Sa evolucijom železnice povećala se brzina kretanja vozila. Prelazi su postali neprijatni za putnike, a ponekad i opasni. Prelazne krivine su poboljšale prelazak sa pravog koloseka u krivinu. Kao rezultat toga, vožnja je postala sigurnija i udobnija, čak i kada se vozilo kretalo većom brzinom [2].

Kada se vozilo u pokretu približava krivini ono je izloženo dejstvu centrifugalne sile, koja teži da gurne vozilo ka spoljašnjosti krivine i dovede do preturanja vozila. Dejstvo centrifugalne sile se može neutralisati podizanjem spoljne šine u krivini, odnosno nadvišenjem.

Vrednost nadvišenja zavisi od brzine vozila i od poluprečnika krivine [3]. Ukoliko ne postoji prelazna krivina, usled centrifugalne sile na ulazu u kružnu krivinu, venac točka prve osovine vozila naleće na spoljašnju šinu i izaziva nagli trzaj vozila. Pored neudobne vožnje i mogućnosti oštećenja korisnog tereta, posledica je oštećenje glave šine i venaca točkova železničkih vozila. Ovi neželjeni efekti su utoliko veći, ukoliko je veća brzina vozila i manji poluprečnik kružne krivine [1].

Na železničkim prugama je prelazne krivine prvi primenio Wilhelm von Pressel, i to kubnu parabolu. On je uvideo njihov značaj još 1854. godine, ali nije dao praktične metode za obeležavanje. To pitanje je rešio tek francuski inženjer Nördling 1867. godine [4].

Za razliku od železnica, značaj upotrebe prelazne krivine u građenju putne infrastrukture je prepoznat i ispitivan dosta kasnije. Razlog za to bili su mala brzina kretanja i negativan stav stručnih krugova koji su tvrdili da na putevima prelazne krivine nisu potrebne pošto ne postoji utvrđen kolosek. Razvoj prelaznih krivina na putevima bio je dosta sličan njihovom razvoju na železnici [4].

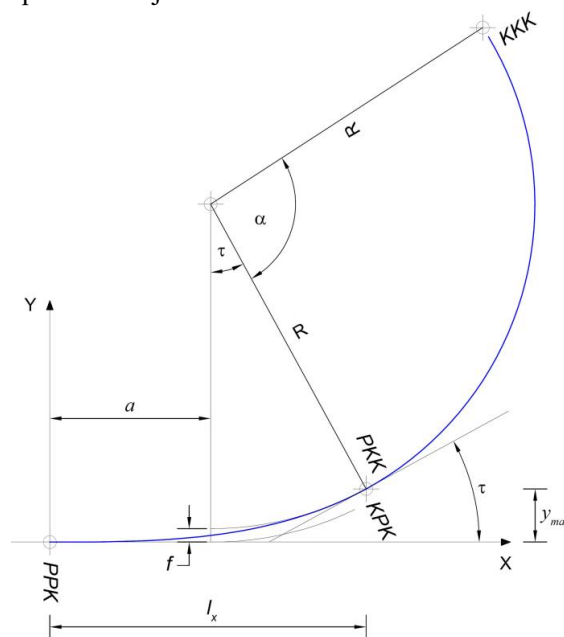
2. GEOMETRIJSKO KONSTRUISANJE PRELAZNE KRIVINE

Da bi neka kriva mogla da ispuni zadatke prelazne krivine, ona mora da ispunjava sledeće kriterijume:

- početak prelazne krivine mora da bude tangentan na pravac,
- kraj prelazne krivine mora da bude tangentan na kružnu krivinu,
- zakrivljenost na kraju prelazne krivine treba da bude jednaka zakrivljenosti kružne krivine,
- zakrivljenost na početku prelazne krivine treba da bude jednaka nuli,

- funkcija promene zakrivljenosti duž prelazne krivine treba da odgovara funkciji promene nadvišenja,
- dužina prelazne krivine treba da bude takva da se puno nadvišenje postigne na početku kružne krivine.

Na slici 2 su prikazani geometrijski elementi i način konstruisanja prelazne krivine u situacionom planu u opštem slučaju.



Slika 2 - Elementi i način konstruisanja prelazne krivine [5]

Geometrijski elementi za konstruisanje prelazne krivine su (slika 2):

- poluprečnik kružne krivine – R ,
- dužina prelazne krivine – L ,
- dužina projekcije prelazne krivine na tangenti pravac – l_x ,
- upravno rastojanje od tangentskog pravca do kraja prelazne krivine – y_{max} ,
- rastojanje od normale iz centra krivine na tangenti pravac do početka prelazne krivine – a ,
- odmak kružne krivine neophodan za konstruisanje prelazne krivine – f ,
- ugao između tangentskog pravca i tangente na početak kružne krivine – τ ,
- ugao kružne krivine – α .

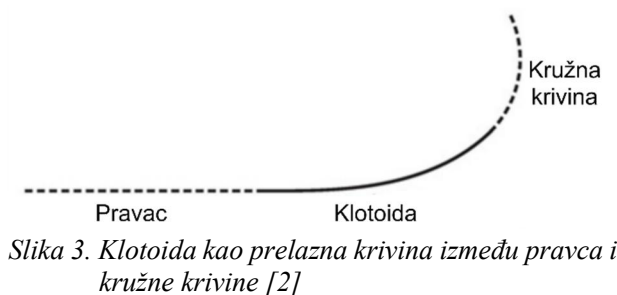
Elementi a i f računaju se korišćenjem izraza (1) i (2) i važe za sve oblike prelaznih krivina, dok izrazi za proračun elemenata l_x , y_{max} i τ zavise od usvojenog oblika prelazne krivine.

$$f = y_{max} - R \cdot (1 - \cos \tau) \quad (1)$$

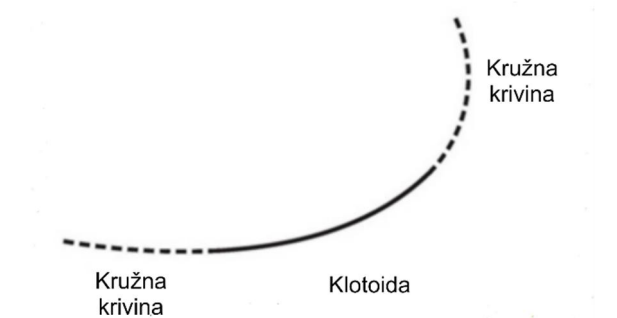
$$a = l_x - R \cdot \sin \tau \quad (2)$$

2. KLOTOIDA

Klotoida je najčešće korišćen oblik prelazne krivine u projektovanju puteva i železničkih pruga. Koristi se kao prelazni element između pravca i kružne krivine, kao i između dve uzastopne krivine različitih poluprečnika (slika 3 i slika 4).



Slika 3. Klotoida kao prelazna krivina između pravca i kružne krivine [2]



Slika 4 - Klotoida kao prelazna krivina između kružnih krivina različitih radijusa [2]

Zbog njene osobine linearne promene zakrivljenosti dugo je smatrana optimalnom u projektovanju železničkih pruga. Međutim, kasnije je došlo do istraživanja i upotrebe novih tipova prelaznih krivina sa krivolinijskom promenom zakrivljenosti [3].

Kod klotoida, zakrivljenost raste proporcionalno rastojanju posmatrane tačke od njenog početka [5] u skladu sa izrazom (3).

$$\frac{l}{r} = \frac{l}{R \cdot L} \quad (3)$$

Za koordinatni sistem prikazan na slici 2, izrazima (4) i (5) definisane su polarne koordinate proizvoljne tačke na klotoidi.

$$x = l - \frac{l^5}{40 \cdot R^2 \cdot L^2} + \frac{l^9}{3456 \cdot R^4 \cdot L^4} \quad (4)$$

$$y = \frac{l^3}{6 \cdot R \cdot L} - \frac{l^7}{336 \cdot R^3 \cdot L^3} + \frac{l^{11}}{42240 \cdot R^5 \cdot L^5} \quad (5)$$

Zamenom $l = L$ u izraze (4) i (5), dobijaju se izrazi (6) i (7), kojima su definisane polarne koordinate kraja klotoida.

$$l_x = L - \frac{L^3}{40 \cdot R^2} + \frac{L^5}{3456 \cdot R^4} \quad (6)$$

$$y_{max} = \frac{L^2}{6 \cdot R} - \frac{L^4}{336 \cdot R^3} + \frac{L^6}{42240 \cdot R^5} \quad (7)$$

4. KUBNA PARABOLA

Ako bi se u proračunu smatralo da je projekcija kubne parabole na tangentni pravac jednaka njenoj stvarnoj dužini, onda bi stvarna dužina kubne parabole bila veća od projektovane. Zato se u proračunu dužine projekcije koristi ista formula kao kod klotoida [5].

Međutim, sa povećanjem dužine kubne parabole, uz usvojenu aproksimaciju, dolazi do odstupanja na njenom kraju.

Za koordinatni sistem na slici 2, prosta kubna parabola je definisana izrazom (8).

$$y = \frac{x^3}{6 \cdot R \cdot l_x} \quad (8)$$

Polarne koordinate kraja kubne parabole definisane su izrazima (9) i (10).

$$l_x = L - \frac{L^3}{40 \cdot R^2} \quad (9)$$

$$y_{max} = \frac{l_x^2}{6 \cdot R} \quad (10)$$

Karakteristični ugao kubne parabole definisan je izrazom (11), a odmak kružne krivine za potrebu ubacivanja kubne parabole računa se na osnovu približnog izraza (12).

$$\tau = \arctg \left(\frac{l_x}{2 \cdot R} \right) \quad (11)$$

$$f = \frac{l_x^2}{24 \cdot R} \quad (12)$$

Ako je za dužinu proste kubne parabole ispunjen kriterijum (13):

$$L > \sqrt[4]{0.64 \cdot R^3} \quad (13)$$

tada dolazi do značajnog odstupanja između ordinate kraja proste kubne parabole i početka kružne krivine. U tom slučaju, preporučuje se primena popravljene kubne parabole (Heferove krive), u skladu sa izrazom (14).

$$y = \frac{x^3}{6 \cdot R \cdot l_x} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{l_x}{2 \cdot R} \right)^2} \right)^3 \quad (14)$$

Ordinata kraja popravljene kubne parabole je definisana izrazom (15), a karakteristični ugao izrazom (16).

$$y_{max} = \frac{l_x^2}{6 \cdot R} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{l_x}{2 \cdot R} \right)^2} \right)^3 \quad (15)$$

$$\tau = \arctg \left(\frac{3 \cdot y_{max}}{l_x} \right) \quad (16)$$

5. POREĐENJE KLOTOIDE I KUBNE PARABOLE

Klotoida ima osobinu linearne zakrivljenosti, dok kubnu parabolu karakteriše nelinearna zakrivljenost.

5.1. Numerički prikaz razlike između klotoide i kubne parabole

Za minimalne poluprečnike krivina za brzine 80 km/h, 100 km/h i 120 km/h izvršeni su proračuni kojima su utvrđena odstupanja između ordinata prilikom upotrebe klotoide i kubne parabole. Proračun je vršen za minimalni poluprečnik krivine, jer je u tom slučaju najveća dužina prelazne krivine, pa je samim tim i greška najveća. Zbog razlike u zakrivljenosti klotoide i kubne parabole, postojeće određene razlike prilikom upotrebe pomenute dve krive.

Na svakih 5 m duž prelazne krivine izračunate su vrednosti ordinate za klotoidu (y_{kl}) i kubnu parabolu (y_{kp}). Zbog iste dužine projekcije klotoide i kubne parabole na tangentni pravac, na svakih 5 m duž klotoide izvršen je proračun apscise x_{kl} i ordinate y_{kl} upotrebom formula (4) i (5). Da bi vrednosti bile uporedive, ordinate y_{kp} su sračunate za iste vrednosti apscise kao kod klotoide. Dakle, za vrednosti apscise kubne parabole važi $x_{kp} = x_{kl}$, a ordinate y_{kp} su sračunate korišćenjem formule (14), jer je za sve tri razmatrane brzine ispunjen kriterijum (13), odnosno korišćen je izraz za popravljenu kubnu parabolu.

Odstupanja ordinata Δy prikazana su preko razlike ordinata dve krive. Ova odstupanja se smanjuju sa povećanjem dužine prelazne krivine, odnosno sa povećanjem brzine i minimalnog poluprečnika kružne krivine. U tabelama 1-3 prikazane su sračunate vrednosti Δy .

Tabela 1. Numerički prikaz razlike ordinata klotoide i kubne parabole za $V_r = 80$ km/h ($R = 300$ m, $L = 100$ m)

l	y_{kl}	x_{kp}	y_{kp}	Δy
[m]				
5	0.00	5.00	0.00	0.00
10	0.01	10.00	0.01	0.00
15	0.02	15.00	0.02	0.00
20	0.04	20.00	0.05	0.00
25	0.09	25.00	0.09	0.00
30	0.15	30.00	0.16	-0.01

l	y_{kl}	x_{kp}	y_{kp}	Δy
[m]				
35	0.24	35.00	0.25	-0.01
40	0.36	40.00	0.37	-0.02
45	0.51	44.99	0.53	-0.02
50	0.69	49.99	0.73	-0.03
55	0.92	54.99	0.96	-0.04
60	1.20	59.98	1.25	-0.05
65	1.53	64.97	1.59	-0.07
70	1.90	69.95	1.99	-0.08
75	2.34	74.93	2.44	-0.10
80	2.84	79.91	2.96	-0.12
85	3.41	84.88	3.55	-0.14
90	4.04	89.84	4.21	-0.16
95	4.76	94.79	4.94	-0.19
100	5.54	99.72	5.76	-0.21

Tabela 2. Numerički prikaz razlike ordinata klotoide i kubne parabole za $V_r = 100$ km/h ($R = 475$ m, $L = 120$ m)

l	y_{kl}	x_{kp}	y_{kp}	Δy
[m]				
5	0.00	5.00	0.00	0.00
10	0.00	10.00	0.00	0.00
15	0.01	15.00	0.01	0.00
20	0.02	20.00	0.02	0.00
25	0.05	25.00	0.05	0.00
30	0.08	30.00	0.08	0.00
35	0.13	35.00	0.13	0.00
40	0.19	40.00	0.19	0.00
45	0.27	45.00	0.27	-0.01
50	0.37	50.00	0.37	-0.01
55	0.49	55.00	0.50	-0.01
60	0.63	59.99	0.65	-0.02
65	0.80	64.99	0.82	-0.02
70	1.00	69.99	1.03	-0.03
75	1.23	74.98	1.26	-0.03
80	1.50	79.97	1.53	-0.04
85	1.80	84.97	1.84	-0.04
90	2.13	89.95	2.18	-0.05
95	2.51	94.94	2.57	-0.06
100	2.92	99.92	2.99	-0.07
105	3.38	104.90	3.46	-0.08
110	3.89	109.88	3.98	-0.09
115	4.44	114.85	4.54	-0.10
120	5.05	119.81	5.16	-0.11

Tabela 3. Numerički prikaz razlike ordinata klotoide i kubne parabole za $V_r = 120 \text{ km/h}$ ($R = 680 \text{ m}$, $L = 145 \text{ m}$)

l	y _{kl}	x _{kp}	y _{kp}	Δy
[m]				
5	0.00	5.00	0.00	0.00
10	0.00	10.00	0.00	0.00
15	0.01	15.00	0.01	0.00
20	0.01	20.00	0.01	0.00
25	0.03	25.00	0.03	0.00
30	0.05	30.00	0.05	0.00
35	0.07	35.00	0.07	0.00
40	0.11	40.00	0.11	0.00
45	0.15	45.00	0.16	0.00
50	0.21	50.00	0.22	0.00
55	0.28	55.00	0.29	-0.01
60	0.37	60.00	0.37	-0.01
65	0.46	65.00	0.47	-0.01
70	0.58	70.00	0.59	-0.01
75	0.71	74.99	0.73	-0.01
80	0.87	79.99	0.88	-0.02
85	1.04	84.99	1.06	-0.02
90	1.23	89.98	1.25	-0.02
95	1.45	94.98	1.47	-0.03
100	1.69	99.97	1.72	-0.03
105	1.96	104.97	1.99	-0.03
110	2.25	109.96	2.29	-0.04
115	2.57	114.95	2.61	-0.04
120	2.92	119.94	2.97	-0.05
125	3.30	124.92	3.36	-0.06
130	3.71	129.90	3.77	-0.06
135	4.16	134.88	4.22	-0.07
140	4.63	139.86	4.71	-0.07
145	5.15	144.84	5.23	-0.08

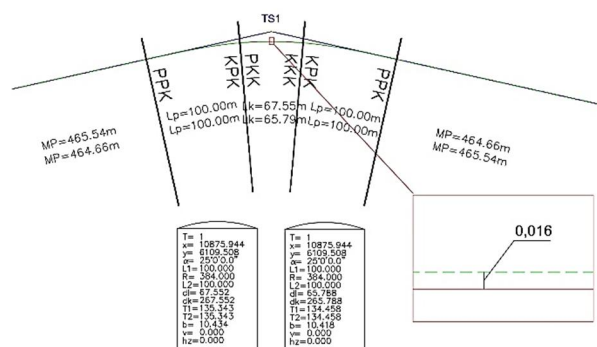
5.2. Grafički prikaz razlike između klotoide i kubne parabole

Korišćenjem programa *Ferrovía* kompanije *CGS Labs* [6], isprojektovano je 20 varijanti simetričnih krivina između dva tangentna pravca. Razmatrani su slučajevi skretnog ugla od 25°, 30°, 35° i 45°, između kojih su projektovane krivine minimalnog poluprečnika za brzine 80 km/h, 100 km/h, 120 km/h, 140 km/h i 160 km/h.

Na slici 4 je prikazan primer jedne isprojektovane simetrične krivine za računsku brzinu 80 km/h i skretni ugao 25°. Klotoida je prikazana punom linijom, a kubna parabola isprekidanom linijom.

Odstupanje klotoide u odnosu na kubnu parabolu izračunato je na osnovu razlike između vrednosti

bisektrisa dve krivine. U tabeli 4 je prikazana razlika dužina bisektrisa za sve prethodno pomenute skretne uglove i brzine.



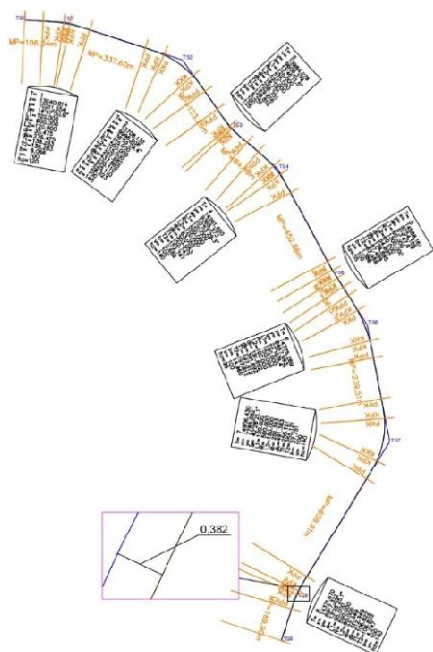
Slika 5 - Primer odstupanja klotoide u odnosu na kubnu parabolu za brzinu 80 km/h i skretni ugao 25°

Tabela 4. Odstupanje klotoide u odnosu na kubnu parabolu pri različitim skretnim uglovima i različitim računskim brzinama

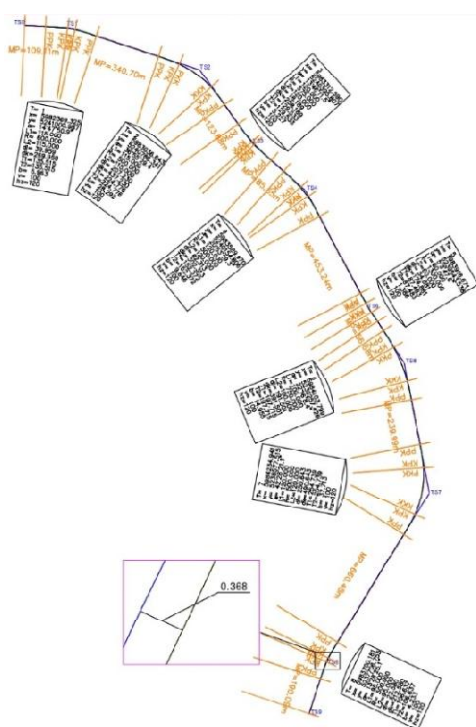
Skretni ugao [°]				Brzina [km/h]
25	30	35	40	
16 mm	16 mm	16 mm	16 mm	80
9 mm	9 mm	10 mm	9 mm	100
7 mm	6 mm	7 mm	6 mm	120
5 mm	4 mm	4 mm	4 mm	140
3 mm	4 mm	3 mm	4 mm	160

Razlika pri korišćenju pomenuta dva oblika prelazne krivine je, takođe, ispitivana na slučaju rekonstrukcije postojeće pruge, uz zadržavanje iste računске brzine od 100 km/h. Za analizu je korišćena deonica Kostajnica – Doboj na evropskom železničkom Koridoru Vc.

Za pomenutu deonicu pruge urađeno je rešenje rekonstrukcije upotrebom prelazne krivine oblika kubne parabole, a potom i rešenje rekonstrukcije upotrebom klotoide. Oba rešenja urađena su korišćenjem programa *Ferrovía*. Poluprečnici kružnih krivina i dužine prelaznih krivina su birani tako da uz najmanja odstupanja prate snimljenu geometriju pruge, uz poštovanje minimalnih propisanih vrednosti parametara. Analizom horizontalnih odnaka dobijeni su podaci o odstupanju novoprosjektovanih osa od postojeće ose. Tačke u kojima su mereni horizontalni odnaci birane su tako da su pravci podeljeni na pet segmenata, odnosno šest tačaka, kružni lukovi na osam segmenata, odnosno devet tačaka, a tačke na prelaznim krivinama su raspoređene na razmacima približno 1 m. Razlika između maksimalnih odstupanja ove dve krive od prvobitne ose je 14 mm. Na slikama 6 i 7 prikazana su mesta na kojima je izmereno najveće odstupanje između postojeće i rekonstruisanih osa koloseka.



Slika 6 - Odstupanja rešenja rekonstrukcije pruge sa kubnom parabolom u odnosu na postojeće stanje



Slika 7 - Odstupanja novoprojektovane pruge u odnosu na postojeću upotrebom klotoide

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu razmatrana je primena prelazne krivine oblika klotoide u projektima rekonstrukcije železničkih pruga, sa posebnim osvrtom na istorijski uslovljenu primenu kubne parabole. Polazeći od stava da u projektima rekonstrukcije železničke pruge treba

zadržati isti tip prelazne krivine (kubna parabola) radi očuvanja prostornog položaja ose koloseka, izvršena je numerička i praktična analiza razlike u primeni klotoide i kubne parabole, kao i uticaj izbora oblika prelazne krivine na odstupanje rekonstruisane u odnosu na postojeću geometriju trase.

Numeričkim poređenjem pokazano je da se odstupanja između klotoide i kubne parabole sa povećanjem brzine, a samim tim i sa povećanjem dužine prelazne krivine, smanjuju. Najveće odstupanje ove dve krive je zabeleženo pri najmanjoj razmatranoj brzini od 80 km/h i iznosi 210 mm (odstupanje na kraju prelazne krivine).

Pored toga, analiza odstupanja je izvršena na primerima simetričnih krivina sa graničnim elementima za različite računске brzine, koje su projektovane između dva tangentna pravca. Najveća odstupanja između krivih su, takođe, uočena pri najmanjoj razmatranoj brzini od 80 km/h i ona iznosi 16 mm nezavisno od primenjene vrednosti skretnog ugla. Sa povećanjem računске brzine, odstupanje se smanjuje.

Na kraju, analiza odstupanja je izvršena i za primer rekonstrukcije postojeće pruge, gde je jedno rešenje urađeno primenom prelazne krivine oblika klotoide, a drugo primenom kubne parabole. Oba rešenja poređena su sa osom postojećeg koloseka. Pokazano je da rešenje rekonstrukcije primenom klotoide ima manje maksimalno odstupanje od ose postojećeg koloseka. Razlika između maksimalnih odstupanja u ova dva primera iznosi do 14 mm.

Na osnovu sprovedene teorijske analize i prikazanih primera, zaključuje se da primena klotoide pri rekonstrukciji postojećih železničkih pruga dovodi do izvesnih odstupanja u prostornom položaju rekonstruisane ose koloseka u odnosu na postojeće stanje. Međutim, takva odstupanja neminovna su i u slučaju primene kubne parabole, koja u određenim scenarijima mogu biti veća nego u slučaju primene klotoide.

Dakle, ne postoji opravdan razlog da se u projektima rekonstrukcije ne koristi klotoida kao prelazna krivina. Sa druge strane, u projektima obnove uvek treba težiti da se zadrži postojeći oblik prelazne krivine.

LITERATURA

- [1] Z. Popović, *Osnove projektovanja železničkih pruga*, Beograd, 2004.
- [2] T. F. Brustad, R. Dalmo: *Railway Transition Curves: A Review of the State-of-Art and Future Research*, <https://www.mdpi.com/2412-3811/5/5/43>
- [3] A. Sapkota: *Types of Transition Curves*, <https://civinnovate.com/2024/10/10/transition-curves/>, 2024.

- [4] B. Žnideršić, *Priručnik za obeležavanje prelaznica oblika klotoide pravouglim koordinatama*, Beograd, 1966.
- [5] L. Lazarević, *Rampa za nadvišenje kao prostorni element trase železničke pruge*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, 2010.
- [6] N. Lošić, D. Savković, M. Ivić, M. Kosijer, I. Belošević: Planiranje i projektovanje železničke infrastrukture primenom CAD i BIM tehnologije. *Železnice*, 63 (1), pp. 16-26, 2018.

SUMMARY

CHANGE OF TRANSITION CURVE TYPE IN RECONSTRUCTION OF RAILWAY LINES

The importance of applying transition curves in railway design was recognized as early as the nineteenth century, with the development of railway transport. Railway lines in Serbia were originally designed using the cubic parabola as the transition curve. During the rehabilitation and reconstruction of certain railway lines, this type of transition curve has continued to be applied, based on the assumption that it preserves the spatial position of the existing track centreline. This paper examines, from a theoretical perspective, the application of a clothoid transition curve instead of a cubic parabola in the reconstruction of existing railway lines. Through practical examples of reconstruction solutions, the consequences of this approach are analysed in terms of deviations of the spatial position of the reconstructed relative to the existing track.

Key Words: railway, reconstruction, transition curve, clothoid, cubic parabola