Mr Stjepan Crnić,
kapetan, dipl. inž.
Željko Čikvar,
kapetan, dipl. inž.

Primjena dinamičkog programiranja u optimizaciji pouzdanosti tehničkih materijalnih sredstava (sistema)

Uvod

Prihvatajući u najširem smislu definiciju da sistemi predstavljaju skupove elemenata, relacija između njih i njihovih karakteristika, povezanih u cjelinu na takav način da mogu obavljati koristan rad, možemo zaključiti da i svako tehničko materijalno sredstvo (TMS) predstavlja određeni sistem.

Najvažnija karakteristika svakog sistema je njegova pouzdanost. U literaturi se može naići na više definicija pouzdanosti. Kada je u pitanju TMS kao sistem, najčešće se koristi definicija koja određuje pouzdanost sistema vjerovatnoćom da će sistem izvršavati svoju funkciju na zadovoljavajući način u datom vremenskom periodu, uz uslov da se koristi pod određenim radnim okolnostima. Pouzdanost sistema može se odrediti eksperimentalno ili izračunati na osnovu pouzdanosti njegovih sastavnih dijelova putem različitih matematičkih modela.

Jasno je da se pri projektiranju i proizvodnji svakog TMS nastoji ostvariti što veća pouzdanost. Na nju najviše utječu pouzdanosti sastavnih dijelova, pa se ugradnjom sastavnih dijelova velike pouzdanosti postiže i velika pouzdanost samog TMS. Međutim, to znatno poskupljuje TMS, pa se u praksi uvijek mora naći određeni kompromis. Stoga se i razvila metoda rezerviranja

kao jedno od jeftinijih rješenja koje omogućava povećanje pouzdanosti. Ona se sastoji u tome da se sastavnom dijelu ili podsistemu TMS dodaje jedan ili više rezervnih dijelova ili podсистема koji su potpuno identični sastavnom dijelu ili podsistemu i nalaze se uz TMS, a u rad se uključuju po otkazu osnovnog dijela ili podсистема i preuzimaju njegovu funkciju.

Osnovni problem kod ove metode jeste kako odrediti asortiman i količinu rezervnih dijelova, uz ograničena novčana sredstva, da bi se postigla maksimalna pouzdanost TMS. Ovaj problem se najčešće rješava pomoću neke od metoda operacionih istraživanja. Jedna od efikasnijih metoda za rješavanje navedenog problema jeste metoda dinamičkog programiranja.

Opis i definicija problema

U ovom radu se promatra TMS kao sistem koji se sastoji od određenog broja neopravljivih sastavnih dijelova u serijskoj vezi čiji su otkazi međusobno nezavisni, sa određenim asortimanom i količinom rezervnih dijelova u »hladnoj rezervi« (sl. 1).

Pretpostavka ovakvog modela je da otkaz jednog sastavnog dijela ne dovodi do otkaza jednog ili više drugih, te da je zamjena otkazalog sastavnog dijela

trenutna. Prema tome, zanemaruju se sva logistička vremena koja se javljaju pri zamjeni otkazalog sastavnog dijela. U realnim uvjetima ovakav model može zadovoljavati ako su rezervni dijelovi uz TMS, a defektacija otkaza i zamjena otkazalog sastavnog dijela jednostavna i kratkotrajna ili ako nas zanima samo vjerovatnoća da ćemo u slučaju otkaza imati odgovarajući rezervni dio.

Po teoriji rezerviranja [1], »hladna rezerva« podrazumijeva da rezervni dijelovi ne funkcioniraju u sistemu već se uključuju u rad jedan za drugim, kada prethodno uključeni sastavni dio otkaze. Pretpostavlja se da je uključivanje rezervnog dijela trenutno, te da on ne može otkazati u isključenom stanju.

Sistemi kod kojih je primijenjeno rezerviranje sastoje se od određenog broja rezervnih grupa. Svaka rezervna grupa se sastoji od osnovnog elementa (sastavni dio) i elemenata rezerve (rezervni dijelovi). Sastavni dio je direktno uključen u rad sistema, dok se rezervni dijelovi uključuju po njegovom otkazu.

Sl. 1 Model TMS sa serijskom vezom sastavnih dijelova i rezervnim dijelovima u »hladnoj rezervi«

Rezervna grupa, kod »hladne rezerve«, sastoji se od jednog sastavnog i n rezervnih dijelova. Kada sastavni dio odradi neko slučajno vrijeme T_1 on otkazuje, a na njegovo mjesto dolazi prvi

rezervni dio koji isto tako otkazuje nakon nekog slučajnog vremena T_2 itd. Nakon što je i posljednji rezervni dio odradio neko slučajno vrijeme T_{n+1} i on otkazuje, a sa njim i cijela rezervna grupa.

Prema tome, slučajno vrijeme rada jedne rezervne grupe bez otkaza je:

$$T_0 = T_1 + T_2 + \dots + T_{n+1} \quad (1)$$

gdje je T_1 — vrijeme rada do otkaza sastavnog dijela, a $T_2, T_3, \dots, T_{n+1}$ — vrijeme rada do otkaza rezervnih dijelova.

U promatranom modelu (sl. 1), pod pojmom pouzdanosti sistema podrazumijevamo ukupnu pouzdanost, tj. pouzdanost »osnovnog« sistema sa njegovim rezervnim dijelovima.

Pouzdanost rezervne grupe, u zavisnosti od broja rezervnih dijelova, može se dobiti na osnovu podataka iz eksploatacije ili izračunati prema formuli:

$$r_i(x_i) = \sum_{k=0}^{x_i} \frac{(\lambda_i \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda_i t} \quad (2)$$

(kumulativna Poissonova raspodjela)

gdje su:

$r_i(x_i)$ — pouzdanost i -tog sastavnog dijela sa x_i rezervnih dijelova,

λ_i — intenzitet otkaza rezervnih dijelova sastavnog dijela

t — promatrano vrijeme.

Proračun pouzdanosti rezervne grupe po Poissonovoj raspodjeli može se izvršiti samo u slučaju kada vremena rada do otkaza sastavnog i rezervnih dijelova imaju eksponencijalnu raspodjelu sa parametrom λ . U svim drugim slučajevima, proračun pouzdanosti rezervne grupe je veoma složen, pa se umjesto njega koriste podaci iz eksploatacije ili podaci dobiveni eksperimentom.

Pouzdanost sistema, uz dati sastav rezervnih grupa, izračunava se kao:

$$R(x) = \prod_{i=1}^N r_i(x_i) \quad (3)$$

Za formiranje rezervnih grupa potrebno je nabaviti određeni broj rezervnih dijelova koji će biti u »hladnoj rezervi«. Jasno je da će pouzdanost sistema biti veća što je taj broj veći. Međutim, to iziskuje veća novčana ulaganja.

Stoga se u praksi uvijek javlja problem novčanih ulaganja za nabavku rezervnih dijelova koji će biti u »hladnoj rezervi«, a želi se maksimalna pouzdanost sistema.

Iz toga proizlazi problem kako za zadatu količinu novčanih ulaganja, uz poznate jedinične cijene rezervnih dijelova, izabrati asortiman i količinu rezervnih dijelova koji će biti u »hladnoj rezervi« da bi dobili maksimalnu pouzdanost sistema.

Postavka rješenja problema metodom dinamičkog programiranja

Dinamičko programiranje je metoda matematičkog programiranja kojom se efikasno rješavaju specijalno strukturirani zadaci određivanja ekstrema realne funkcije više promenljivih, čiji argumenti uzimaju vrijednosti iz unaprijed zadane oblasti.

Metoda je efikasna kada su u pitanju zadaci male dimenzionalnosti, odnosno kada je broj promenljivih, koje se pojavljuju u zadatku ili broj koordinata upravljanja i stanja u sistemu koji se razmatra — mali. Tada je primjena dinamičkog programiranja direktna i praktična rutinska stvar. Međutim, kada je dimenzionalnost zadatka veća, dinamičko programiranje se ne primjenjuje u svom standardnom obliku, već je svaki zadatak u izvjesnoj mjeri istraživački.

Naš problem, optimizacija pouzdanosti TMS izborom asortimana i količine rezervnih dijelova u »hladnoj rezervi«, uz ograničena novčana ulaganja, predstavlja, u stvari, problem optimizacije raspodjele resursa.

Sam proces raspodjele resursa u suštini je raspodjela jednog (ili više vrsta) resursa količine x na N aktivnosti proizvoljno indeksiranih, $i = 1, \dots, N$. Na svaku aktivnost dodeljuje se po dio resursa x_i , $i = 1, \dots, N$, i to tako da se na svih N aktivnosti raspodijeli cijela količina x . Svaku aktivnost karakteriše zadana funkcija efekta $f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, N$. Ove funkcije pokazuju zavisnost efekta od količine resursa koja se dodjeljuje svakoj aktivnosti. Pretpostavlja se: a) da se efekti svih aktivnosti mjere istim jedinicama, b) da je ukupan efekat raspodjele jednak sumi pojedinih efekata i c) da dodjeljivanje resursa nekoj aktivnosti ne utječe na efekte drugih aktivnosti.

Problem optimizacije resursa je slijedeći: raspodijeliti resurs količine x na N aktivnosti, tako da je ukupan efekat najveći. Ako bi se u rješavanju ovog zadatka pokušalo primjeniti rezultate klasične teorije analize funkcija, naišlo bi se na ozbiljne računске teškoće.

Za naš slučaj, problem se može definirati na slijedeći način: potrebno je raspodijeliti određenu količinu novčanih sredstava za nabavku odgovarajućeg asortimana i količine rezervnih dijelova tako da pouzdanost promatranog sistema bude maksimalna.

Dinamičko programiranje je vrlo efikasno u rješavanju optimalne raspodjele jednog tipa resursa. Primjenjujući tehniku invarijantnog uronjavanja [2], umjesto specifičnog zadatka u smislu raspodjele određene količine resursa x i broja aktivnosti N , naš problem svrstavamo u familiju problema, tj. smatramo x i N promjenjivim. U takvoj familiji problema, jedan od problema ima trivijalno rješenje. To je problem za $N = 1$, kada, u stvari, nema raspodjele, jer postoji samo jedna aktivnost, pa cjelokupnu količinu resursa dodjeljujemo toj prvoj, jedinoj aktivnosti. Do rješenja našeg specifičnog problema, tj. za zadato x , N , dolazimo na taj način što uspostavimo pogodne relacije koje povezuju rješenje problema iz

familije, i to za $N = 1$ i $N = 2$, zatim za $N = 2$ i $N = 3$, itd. Koristeći te relacije dolazimo i do traženog rješenja za zadato N . Pomenute relacije povezuju u stvari optimalne vrijednosti kriterija — ukupnog efekta raspodjele. Da bismo do njih došli potrebno je odrediti funkcije $F_N(x)$ — optimalni ukupni efekat raspodjele resursa količine x na N aktivnosti. Ukupno treba odrediti N funkcija i to za $N = 1, \dots, N$. One se određuju prema slijedećoj relaciji:

$$F_N(x) = \max_{(x_1, \dots, x_N)} \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \quad (4)$$

$$N = 1, \dots, N$$

Iz relacije (4) slijedi, za $N = 1$:

$$F_1(x) = \max_{x_1} f_1(x_1) \quad (5)$$

Veze između funkcija $F_1, \dots, F_N$ nalaze se tako što se pretpostavi da je za posljednju, N -tu aktivnost dodijeljeno x_N resursa, a za sve prethodne $N-1$ aktivnosti tada preostaje $x - x_N$ resursa. Ako je ovih $x - x_N$ resursa optimalno raspoređeno na $N-1$ aktivnosti, onda je, s obzirom na relaciju (4), optimalni efekat ove raspodjele $F_{N-1}(x - x_N)$. Ukupan efekat za svih N aktivnosti je: $f_N(x_N) + F_{N-1}(x - x_N)$. Da bi on bio najveći, treba potražiti njegov maksimum po x_N . Tada, opet, na osnovu (4), važi:

$$F_N(x) = \max_{x_N} [f_N(x_N) + F_{N-1}(x - x_N)]$$

Ova funkcionalna jednačba omogućuje da se nađe $F_N(x)$ kada se zna $F_{N-1}(x)$. Tumačeći princip optimalnosti [2], iz nje slijedi uopćena rekurentna relacija za tekući indeks i :

$$F_i(x) = \max_{x_i} [f_i(x_i) + F_{i-1}(x - x_i)] \quad (6)$$

$$i = 2, \dots, N$$

$$x_i \leq x$$

Prvu u nizu, funkciju $F_1(x)$, nalazimo lako iz (5). Relacija (6) predstavlja rekurentnu relaciju u kojoj treba obaviti operaciju »max« po samo jednoj

promjenljivoj. Pomoću nje je početni zadatak traženja maksimuma funkcije od N promjenljivih transformiran u niz znatno lakših zadataka traženja maksimuma funkcija samo jedne promjenljive. Traženje maksimuma u (6) obavlja se numeričkim putem, pretraživanjem sa pogodno izabranim korakom diskretizacije. Iz toga se može zaključiti da u pogledu vremena računanja, obim računanja linearno raste sa porastom N .

Funkcije $F_i(x)$, $i = 1, \dots, N$ se lako računaju uz pomoć računara. One se obično prikazuju i pamte tabelarno. Uzme se da je ukupna količina resursa x uniformno diskretizirana, sa korakom diskretizacije Δ , tako da argumenti funkcija F_i uzimaju vrijednost $0, \Delta, \dots, R\Delta = x$. Zatim se formira tabela optimalne raspodjele resursa u kojoj nakon svake kolone $F_i(x)$, $i = 1, \dots, N$ postoji po jedna kolona x_i , $i = 1, \dots, N$ u koju se stavljaju one vrijednosti x_i , $i = 1, \dots, N$ koje prema (6) daju maksimum funkcijama F_i .

Kada je formirana tabela, jednostavnim postupkom, određuje se optimalna raspodjela. Postupak je slijedeći: za zadato $x = R\Delta$ nalazimo optimalno x_N' — optimalnu količinu resursa za N -tu aktivnost. Za preostalih $N-1$ aktivnosti ostaje $x - x_N'$ resursa. U koloni x nalazimo vrstu sa tom vrijednošću, i u presjeku te vrste sa $x_{N-1}(x)$ kolonom nalazimo optimalnu vrijednost resursa koju treba dodijeliti $(N-1)$ -oj aktivnosti. Ostaje $x - (x_N' + x_{N-1}')$ resursa koje treba raspodijeliti na preostalih $N-2$ aktivnosti, itd. do prve aktivnosti.

Iz toga slijedi da računski proces u dinamičkom programiranju ima dvije faze: a) računanje funkcija $F_i(x)$, $i = 1, \dots, N$ i b) određivanje optimalnih $x_1', \dots, x_N'$.

Bitne karakteristike dinamičkog programiranja u pogledu primjene su:

— ne zahtjeva se neprekinutost funkcija f_i , $i = 1, \dots, N$, već one mogu biti prekidne ili, čak, zadate tablicama ili grafikonima;

— postupak dinamičkog programiranja automatski izdvaja optimum, ili dva i više optimuma, a odbacuje relativne ekstreme;

— postojanje raznih dopunskih ograničenja na promjenljive, kao npr. cjelobrojnost svih ili samo nekih promjenljivih, samo uprošćava računski postupak, i

— jedna od važnih osobina dinamičkog programiranja je da se radi formiranja tabele optimalne raspodjele resursa ravnopravno mogu organizirati računski procesi »unaprijed« i »unazad«.

Matematički model rješenja postavljene probleme

Postavljeni problem spada u probleme složene raspodjele jednorodnog resursa. On se matematički može definirati na slijedeći način:

$$\text{naći } \max R(X) = \prod_{i=1}^N r_i(x_i),$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{i=1}^N c_i \cdot x_i \leq C_0, \quad x_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

i, x_i — cjelobrojni.

Rekurentne relacije u ovom slučaju su:

$$f_i(C_i) = \max_{x_i} r_i(x_i) \cdot f_{i-1}(C_i - c_i \cdot x_i) \\ 0 \leq c_i \cdot x_i \leq C_0, \quad i = 1, \dots, N$$

Granice utroška, odnosno broja rezervnih dijelova, određuju se iz:

$$0 \leq x_i \leq \left\lfloor \frac{C_0}{C_i} \right\rfloor, \quad i = 1, \dots, N$$

Rekurentna relacija za određivanje rezervnih dijelova prve rezervne grupe je:

$$f_1(C_1) = \max_{x_1} r_1(x_1)$$

$$0 \leq x_1 \leq \left\lfloor \frac{C_0}{C_1} \right\rfloor$$

Rekurentna relacija za određivanje rezervnih dijelova druge rezervne grupe je:

$$f_2(C_2) = \max_{x_2} r_2(x_2) \cdot f_1(C_2 - c_2 \cdot x_2)$$

$$0 \leq x_2 \leq \left\lfloor \frac{C_0}{C_2} \right\rfloor$$

Na isti način dobiju se i ostale rekurentne relacije.

U relacijama su korišćene slijedeće oznake:

- $r_i(x_i)$ — pouzdanost i -tog sastavnog dijela sa x_i rezervnih dijelova,
- C_0 — ukupna novčana ulaganja,
- c_i — cijena rezervnog dijela i -tog sastavnog dijela,
- C_i — trenutno ulaganje, i
- N — ukupan broj sastavnih dijelova.

Algoritam za rješavanje postavljene probleme

Na osnovu navedenog matematičkog modela napravljen je algoritam za rješavanje postavljene probleme metodom dinamičkog programiranja. Algoritam se sastoji od dva dijela, i to: algoritma za proračun elemenata tabele optimalne raspodjele resursa i algoritma za određivanje optimalnih vrijednosti.

Algoritam za proračun elemenata tabele optimalne raspodjele resursa

Ulazni podaci su slijedeći: a) broj sastavnih dijelova sistema, b) jedinačne cijene rezervnih dijelova, c) ukupna novčana ulaganja, i d) pouzdanosti sastavnih dijelova u zavisnosti od broja rezervnih dijelova zadate tabelarno ili Poissonovom raspodjelom.

Izlaz iz algoritma su maksimalne pouzdanosti koje se mogu ostvariti na osnovu raspodjele ukupnih trenutnih

ulaganja u tekući sastavni dio i prethodne sastavne dijelove, kao i optimalni broj rezervnih dijelova za tekući sastavni dio, na osnovu kojeg se dobiva navedena maksimalna pouzdanost.

Algoritam je prikazan na slici 2.

U njemu su korišćene sljedeće oznake:

- n — index sastavnog dijela (pod-sistema);
- N — ukupan broj sastavnih dijelova;
- x — broj rezervnih dijelova;
- C_i — trenutno ulaganje;
- C — ukupno trenutno ulaganje;
- C_0 — ukupna novčana ulaganja;
- c_r — cijena rezervnog dijela za n -ti sastavni dio;
- $P_r(C)$ — maksimalna pouzdanost ostvarena ulaganjem u n -ti i prethodne sastavne dijelove, i
- $x_r(C)$ — optimalni broj rezervnih dijelova n -tog sastavnog dijela u ovisnosti o ulaganju.

Algoritam za određivanje optimalnih vrijednosti

Ulazni podaci za ovaj algoritam su: a) tabela optimalne raspodjele resursa $[C, P_n(C), x_r(C)]$, b) broj sastavnih dijelova sistema, c) ukupna novčana ulaganja, i d) jedinačne cijene rezervnih dijelova.

Izlaz iz algoritma su sljedeći podaci: a) maksimalna pouzdanost sistema, b) optimalni broj rezervnih dijelova za svaki sastavni dio, i c) ostatak novčanih ulaganja.

Algoritam je prikazan na slici 3.

U algoritmu su korišćene sljedeće oznake:

- x_{opN} — optimalni broj rezervnih dijelova za N -ti sastavni dio;
- x_{opr} — optimalni broj rezervnih dijelova za n -ti (tekući) sastavni dio;

Sl. 2 Algoritam za proračun elemenata tabele optimalne raspodjele resursa

C_{ost} — ostatak ukupnih novčanih ulaganja, i
 P_{max} — maksimalna pouzdanost sistema.

Sl. 3 Algoritam za određivanje optimalnih vrijednosti

Računarski program

Na osnovu datog algoritma napravljen je program za rješavanje postavljenog problema, u programskom jeziku FORTRAN 77, na računaru CYBER 800/175 u operativnom sistemu NOS 2.4. Program se uz manje korekcije može prilagoditi za rad na drugim računarima koji koriste programski jezik FORTRAN.

Program omogućava rješavanje optimizacije pouzdanosti sistema od 100 sastavnih dijelova, od kojih svaki može imati do 100 rezervnih dijelova i pri-

lagoden je za interaktivan rad. Ulazni podaci o pouzdanostima sastavnih dijelova o ovisnosti o broju rezervnih dijelova mogu se zadati tabelarno ili Poissonovom raspodjelom.

Kada se ulazni podaci o pouzdanosti sastavnih dijelova, zadati tabelarno, unose prvi put, mogu se trajno zapamtiti u datoteci »Podaci« i po želji ponovo koristiti. Program omogućava da se prije početka računanja mogu provjeriti ulazni podaci smješteni u datoteci i po potrebi promijeniti. Također, u slučaju greške pri upisivanju ulaznih podataka omogućen je povratak na početak njihovog unošenja.

Dijagram toka programa prikazan je na slici 4.

U programu se koristi standardni program za izračunavanje faktoriijela (kao potprogram FAKT).

Zaključak

Zahtjev za povećanjem pouzdanosti sistema, koji se uvijek postavlja u praksi, posebno dolazi do izražaja kada su u pitanju TMS. Pouzdanost se nastoji povećati primjenom novih tehnologija pri izradi sastavnih dijelova, novim konstrukcijskim rješenjima TMS, te korišćenjem metode rezerviranja. Međutim, sve to iziskuje dodatna novčana ulaganja i poskupljuje TMS, pa se stoga uvijek traži određeni kompromis.

U ovom radu je analizirana »hladna rezerva«, iz teorije rezerviranja, kao moguće rješenje za povećanje pouzdanosti TMS (sistema) i posebno primjene metode dinamičkog programiranja za određivanje asortimana i količine rezervnih dijelova u »hladnoj rezervi«.

Problem je opisan i definisan, data je teoretska postavka njegovog rješenja metodom dinamičkog programiranja i matematički model rješenja. Na osnovu toga je napravljen algoritam i program koji za zadata novčana ulaga-

nja i jedinačne cijene rezervnih dijelova proračunava asortiman i količinu rezervnih dijelova u »hladnoj rezervi« za svaki sastavni dio TMS, uz uslov da pouzdanost TMS bude maksimalna.

Program je provjeren na više primjera, no rezultati provjere u ovom ra-

du nisu dati zbog svoje obimnosti. Na osnovu tih rezultata može se zaključiti da se metoda dinamičkog programiranja može veoma efikasno primijeniti u rješavanju navedenog problema. Osim toga, metoda je i veoma pogodna za postavljanje na računar.

Sl. 4 Dijagram toka programa

Literatura:

- [1] Petrić J., Petrić Z.: Operaciona istraživanja u vojsci, VIZ, Beograd, 1974.
- [2] Petrović R.: Specijalne metode u optimizaciji sistema, NIP Tehnička knjiga, Beograd, 1977.
- [3] Dovedan Z., Smileski M., Divjak Zalokar J.: FORTRAN 77 s tehnikama programiranja, Zveza za tehničko kulturo Slovenije, Ljubljana, 1987.

- [4] Krčević S., Petrić J., Čupić M., Nikolić J.: Algoritmi i programi iz operacionih istraživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1983.
- [5] Stojiljković M., Vukadinović S.: Operaciona istraživanja, VIZ, Beograd, 1984.