Uvod

U radovima koji su navedeni u popisu literature, analiza ljestvičastih mreža provodi se na različite načine. Tako se u radu [1] analiza provodi postupkom indukcije i pokazuje veza s Fibonaccijevim nizom brojeva. Autor rada [2] analizu provodi određivanjem ulazne impedancije u obliku verižnog razlomka. Postupak analize metodom kombiniranja jednadžbi prvog i drugog Kirchhoffovog zakona pokazan je u radu [3]. U radu [4] pokazano je da su polinomi Chebysheva i Fibonaccijev niz brojeva vezani za analizu ljestvičastih mreža. Kako se dolazi do polinoma karakterističnih za ljestvičaste mreže razmatranjem ulazne impedancije pokazano je u radu [5]. U nekim radovima analiza se provodi rješavanjem jednadžbi diferencija ili preko prenosnih parametara četveropola. Ovim naučnim razmatranjima pokazat će se postupak

analize primjenom metode napona čvorova za rješavanje električnih mreža sa posebnim naglaskom na homogeni RC lanac.

Analiza homogenog RC lanca

Analizira se homogena ljestvičasta mreža koja u uzdužnim granama ima impedancije iznosa Z_1 , a u poprečnim impedancije iznosa Z_2 , te je pokazana na slici 1.

Naponi, struje i impedancije su funkcije varijable »s«.

Na ulaz je priključen napon U_0 , a iz slike se vidi da mreža ima ukupno »n+1« čvorova (donji čvor povezuje sve impedancije Z_2). Potrebno je odrediti izraze za napone $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots, U_n$.

Da bi se dobili opći rezultati, analiza se obično izvodi na normaliziranoj mreži. U ovom slučaju zgodno je provesti normalizaciju impedancija na iz-

Sl. 1 Homogena ljestvičasta mreža

nos impedancije Z_1 , što se dobiva tako da se sve impedancije podijele sa Z_1 .

Tako se dobiva da u uzdužnim granama elementi imaju iznos jednak »1«, a u poprečnim iznos:

$$z = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1)$$

Kada se radi metodom napona čvorova, pogodnije je raditi s admitancijama, pa će tada admitancija poprečne grane u normaliziranom obliku biti:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (2)$$

Na slici 2 pokazana je ljestvičasta mreža u normaliziranom obliku.

Uz prethodne napomene pišu se jednačbe metodom napona čvorova za shemu na slici 2. Potrebno je napisati ukupno »n« jednačbi za isto toliko čvorova (donji čvor je referentni). Jednačbe se prikazuju u matricnoj formi koja daje preglednost, te omogućuje daljnju obradu.

Sl. 2 Normalizirana ljestvičasta mreža

$$\begin{bmatrix} (y+2) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (y+2) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (y+2) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (y+2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Kvadratna matrica na lijevoj strani relacije (3) predstavlja matricu administracija čvorova. Ima »n« redaka i stupaca, a potpuno je određena elementima glavne dijagonale. Naime, to je trodijagonalna matrica koja u glavnoj dijagonali na prvim »n-1« mjestima ima iznos elementa »y+2«, a na zadnjem mjestu je »y+1«. Prve dvije sporedne dijagonale imaju sve elemente jednake

»-1«. Determinanta ove matrice je ujedno i determinanta sistema jednačbi. Razvojem ove determinante dobit će se polinom n-tog stupnja u varijabli »y«, što je očito, jer se ona nalazi na »n« mjestu u glavnoj dijagonali. Oznaka za ovako dobiven polinom je $P_n(y)$.

Zbog velikog stupnja simetrije, za razvoj determinante sistema postoje re-

kurzivne formule koje su, u stvari, jednadžbe diferencija sa polinomima P određenih stupnjeva.

Rekurzivna formula za polinome $P_n(y)$

Počne li se razvoj determinante sistema po prvom stupcu ili retku, uz već uvedene oznake za polinome, rutinskim postupkom se dobiva da je tražena rekurzivna formula:

$$P_n(y) = (y+2) \cdot P_{n-1}(y) - P_{n-2}(y) \quad (4)$$

Polinom prvog stupnja jednak je, u stvari, zadnjem elementu u glavnoj dijagonali determinante sistema i iznosi:

$$P_1(y) = y + 1 \quad (5)$$

Polinom drugog stupnja dobiva se razvojem determinante sistema sa dva retka i stupca kod koje su elementi u glavnoj dijagonali $(y+2)$ i $(y+1)$, pa je:

$$P_2(y) = y^2 + 3y + 1 \quad (6)$$

Kada su poznati P_1 i P_2 , polinom nultog stupnja dobiva se primjenom rekurzivne formule i iznosi:

$$P_0 = 1 \quad (7)$$

Primjenom rekurzivne formule, slijedeći polinomi su:

$$P_3 = y^3 + 5y^2 + 6y + 1$$

$$P_4 = y^4 + 7y^3 + 15y^2 + 10y + 1 \quad (8)$$

$$P_5 = y^5 + 9y^4 + 28y^3 + 35y^2 + 15y + 1$$

Dalje se polinomi računaju primjenom rekurzivne formule do bilo kojeg stupnja. Za $y=0$ slijedi da svi polinomi imaju iznos »1«.

Naponska prenosna funkcija

Potrebno je odrediti izraz za omjer bilo kojeg napona U_k i napona na početku ljestvičaste mreže U_0 :

$$T_{k0}(s) = \frac{U_k(s)}{U_0(s)} \quad (9)$$

Iz sistema jednadžbi, koji je dan relacijom (3), potrebno je odrediti izraz za napon U_k , a on je prema već poznatom postupku za rješavanje sistema jednadžbi jednak omjeru dviju determinanti, od kojih je ona u nazivniku jednaka polinomu P_n , dok se za onu u brojniku dobiva kada se u determinantu sistema u k -ti stupac uvrsti stupac sa desne strane relacije (3).

$$U_k = \frac{D_k}{D} \quad (10)$$

$$D_k = \begin{vmatrix} (y+2) & -1 & 0 & 0 & \dots & U_0 & \dots & 0 \\ -1 & (y+2) & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & (y+2) & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & (y+2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (y+2) & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & (y+2) & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & (y+1) \end{vmatrix} \quad (11)$$

Determinanta D_k razvija se po k -tom stupcu, pa se nakon rutinskih operacija dobiva:

$$D_k = U_0 P_{n-k} \quad (12)$$

Napon bilo kojeg čvora može se odrediti ako je poznata duljina »n« ljestvičaste mreže i napon U_0 preko relacije:

$$U_k = \frac{D_k}{D} = \frac{U_0 P_{n-k}}{P_n} \quad (13)$$

Tako, na primjer, za slučaj kada je $n=3$ za napone čvorova dobivaju se slijedeći izrazi:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_0 P_2}{P_3}; & U_2 &= \frac{U_0 P_1}{P_3}; \\ U_3 &= \frac{U_0}{P_3}; \end{aligned} \quad (14)$$

Za naponsku prenosnu funkciju dobiva se:

$$T_{k0}(y) = \frac{U_k}{U_0} = \frac{P_{n-k}(y)}{P_n(y)} \quad (15)$$

Na osnovu poznate duljine »n« ljestvičaste mreže može se iz (15) odrediti odnos bilo kog napona U_k i napona na ulazu U_0 .

Karakteristični krajnji slučajevi su:

a) za $k=0$ prenosna funkcija je očito jednaka »1«, jer odgovara omjeru napona U_0/U_0 ;

b) za $k=n$ dobiva se prenosna funkcija koja odgovara omjeru napona na kraju mreže i ulaznog napona:

$$T_{n0} = \frac{U_n}{U_0} = \frac{P_{n-n}}{P_n} = \frac{P_0}{P_n} = \frac{1}{P_n} \quad (16)$$

Iz prethodnih razmatranja vidi se da se sve prenosne funkcije mogu izraziti pomoću polonoma P , a oni se lako mogu izračunati primjenom rekurzivne formule.

Odziv homogenog RC lanca na poticaj funkcijom $S(t)$

U prethodnim razmatranjima analizirana je opća ljestvičasta mreža i izvedene su opće relacije. Kada se radi o mreži koja u uzdužnim granama ima jednake otpore, a u poprečnim jednake kapacitete, riječ je o homogenoj RC mreži ili homogenom RC lancu. Nakon što je izvršena normalizacija impedancija na otpor R i normalizacija frekvencije na frekvenciju ω_0 koja je jednaka:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (17)$$

Homogena ljestvičasta RC mreža u normaliziranom obliku pokazana je na slici 3 u kojoj otpori i kapaciteti imaju iznos jednak »1«, dok je normalizirani iznos admitancije »y« sada jednak »s«.

Polinomi $P_n(y)$ sada postaju polinomi u varijabli »s« tj. $P_n(s)$. Da bi se odredio odziv homogenog RC lanca na

Sl. 3 Homogena ljestvičasta RC mreža

poticaj jediničnom funkcijom $S(t)$, potrebno je poznavati nultočke polinoma $P_n(s)$. Kao što je u radu [8] pokazano primjenom supstitucije:

$$s + 2 = 2 \cos x \quad (18)$$

te rješavanjem jednadžbe diferencijala koja je dana rekursivnom formulom, polinom P_n izražava se u trigonometrijskom obliku koji je pogodan za ova razmatranja:

$$P_n(x) = \frac{\sin(n+1)x - \sin nx}{\sin x} = \frac{\cos \frac{2n+1}{2}x}{\cos \frac{x}{2}} \quad (19)$$

Kao što je pokazano u navedenoj literaturi, nultočke polinoma $P_n(x)$ lako se mogu odrediti, a primjenom supstitucije (18) nultočke općeg polinoma u varijabli »s« su:

$$s_m = -2 \left(1 - \cos \frac{2m-1}{2n+1} \pi \right) \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

Bilo je i za očekivati da nultočke polinoma $P_n(s)$ leže na negativnom dijelu realne osi u s-ravnini, jer taj polinom proizlazi iz RC mreže koje imaju takve osobine.

Budući da je napon na ulazu mreže oblika $u_o(t) = S(t)$, primjenom prenosne funkcije $T_{ko}(s)$ za napon bilo kojeg čvora, U_k , dobiva se:

$$U_k(s) = T_{ko}(s) U_o(s) = \frac{P_{n-k}(s)}{s P_n(s)} \quad (21)$$

Kada su poznate nultočke polinoma $P_n(s)$, on se može prikazati u faktoriziranom obliku prema relaciji (22):

$$P_n(s) = (s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_m) \dots (s-s_n) \quad (22)$$

Da se dobije napon k-tog čvora ljestvičaste RC mreže potrebno je izvoz (22) uvrstiti u (21) i izvršiti razvoj u parcijalne razlomke, a on će biti oblika:

$$U_k(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{s-s_m} = \frac{P_{n-k}(s)}{s P_n(s)} \quad (23)$$

jer je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku i nultočke polinoma $P_n(s)$ su jednostruke.

Prvi korak je da se odrede koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Za koeficijent » a_0 « dobiva se da je jednak:

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s P_{n-k}(s)}{s P_n(s)} = 1 \quad (24)$$

budući da $P_n(s)$ teži ka »1« kada »s« teži ka »0« za bilo koji »n«, a isti slučaj je i sa polinomom $P_{n-k}(s)$.

Nešto je složeniji postupak za određivanje ostalih koeficijenata, a izvodi se na slijedeći način:

$$a_m = \lim_{s \rightarrow s_m} \frac{(s-s_m) P_{n-k}(s)}{s P_n(s)} = \frac{P_{n-k}(s_m)}{s_m P'_n(s_m)} \quad (25)$$

U relaciji (25) $P'_n(s_m)$ znači da polinom $P_n(s)$ treba najprije derivirati po »s«, a zatim umjesto »s« uvrstiti » s_m « koji je dan relacijom (20). Za ove operacije treba koristiti trigonometrijski oblik polinoma.

Obično je od većeg interesa poznavanje valnog oblika napona na kraju ljestvičaste RC mreže, pa se u tom slučaju koeficijenti » a_m « razvoja u parcijalne razlomke računaju preko relacije (26), jer je tada polinom u brojniku relacije (25) jednak »1«:

$$a_m = \lim_{s \rightarrow s_m} \frac{(s-s_m)}{s P_n(s)} = \frac{1}{s_m P'_n(s_m)} \quad (26)$$

Duljim rutinskim operacijama deriviranja i sređivanja izraza za opći koeficijent » a_m « dobit će se relacija dana sa (27).

$$a_m = \frac{2}{2n+1} (-1)^m \cdot \frac{\cos^2 \frac{2m-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{2m-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2n+1} z_m \quad (27)$$

U relaciji (27) sa » z_m « označen je dio koji ovisi o » m «, što je pogodno za obradu na računaru.

$$z_m = (-1)^m \cdot \frac{\cos^2 \frac{2m-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{2m-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}} \quad (28)$$

Prema tome, da se dobije napon na kraju RC mreže treba odrediti original slijedeće funkcije:

$$U_n(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{m=1}^n \frac{z_m}{s - s_m} \quad (29)$$

a prema poznatim pravilima Laplaceove transformacije napon na kraju homogene ljestvičaste RC mreže bit će:

$$u_n(t) = 1 + \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{m=1}^n z_m e^{s_m t} \quad (30)$$

Nakon što se u relaciju (30) uvrsti izraz za nultočku polinoma » s_m «, dobiva se traženi izraz za napon » $u_n(t)$ « koji je u obliku pogodnom za obradu na računaru:

$$u_n(t) = 1 + \frac{2 e^{-2t}}{2n+1} \cdot \sum_{m=1}^n z_m e^{2t \cos \frac{2m-1}{2n+1} \pi} \quad (31)$$

Za $t=0$ napon $u_n(0)$ je jednak nuli, a za $t \Rightarrow \infty$ napon $u_n(m) \Rightarrow 1$ što je i intuitivno jasno promatranjem sheme na slici 3.

Na slici 4 pokazani su valni oblici napona $u_n(t)$ za slučajeve kada je duljina homogene RC mreže jednaka: $n=1, 2, 3, 4$ i 5 .

Sa porastom duljine » n « homogenog RC lanca raste i vrijeme kašnjenja.

Zaključak

Za analizu ljestvičastih mreža pogodno je koristiti metodu napona čvorova. Kada se radi o homogenim ljestvičastim mrežama, naponi i naponske prenosne funkcije mogu se izraziti polinomima P_n za koje postoji rekurzivna formula koja omogućuje relativno brzo određivanje polinoma bilo kojeg stupnja. U slučaju homogenog RC lanca, nakon određivanja nultočki polinoma $P_n(s)$ moguće je odrediti analitički izraz za napon na kraju mreže u vremenskoj domeni, što je i učinjeno za poticaj step funkcijom $S(t)$. Na dijagramu na slici 4 prikazani su valni oblici napona na kraju homogenog RC lanca za slučaj kada je njegova duljina od 1 do 5.

Sl. 4 Valni oblici napona $u_n(t)$

Literatura:

- [1] Morgan-Voyce A. M.: »Ladder-Network Analysis Using Fibonacci Numbers«, IRE Transactions on Circuit Theory, September 1959.
- [2] Mowery V. O., »Fibonacci Numbers and Tchebycheff Polynomials in Ladder Networks«, IRE Transactions on Circuit Theory, June 1961.
- [3] Bashkow T. R.: »A Note on Ladder Network Analysis« IRE Transactions on Circuit Theory, June 1961.
- [4] Bubnicki Z.: »Input Impedance and Transfer Function of a Ladder Network«, IEEE Transactions on Circuit Theory, June 1963.
- [5] Hazony D., Keryy U. J.: »Active Synthesis of All-Pole Transfer Functions with Recurrent Canonical RC Ladders«, IEEE Transactions on Circuit Theory, November 1971.
- [6] Swamy M. N. S., Bhattacharyya B. B.: »A study of Recurrent Ladders Using the Polynomials Defined by Morgan-Voyce«, IEEE Transactions on Circuit Theory, September 1967.
- [7] Dozet M.: »Neka svojstva ljestvičastih četveropola«, Radovi TVA br. 23., 1979., Zagreb.
- [8] Dozet M.: »Polinomi homogenog ljestvičarskog RC četveropola«, Naučno-tehnički PREGLED br. 6., 1979, Beograd.