Uvod

Pri izradi provlakača za evolventna ozubljenja, poseban problem predstavlja izrada profila zuba provlakača u obliku evolvente [1], [3], [4]. Zbog toga se profil evolvente zamjenjuje kružnim lukom. Potrebno je, pri tome, izvršiti što približniju zamjenu i napraviti alat koji ima što manje odstupanja od traženog profila. U radu se objašnjava način zamjene evolvente kružnicom, te izračunavanje potrebnih veličina pomoću računara.

Definiranje problema

Zamjena evolvente kružnicom izvodi se, kako pokazuje daljni tok, tako što se evolventa podijeli na veći broj dijelova i izvrši zamjena kružnicom [2], [5] (sl. 1). Kružni luk se povuče kroz točke 1, 2 i 3. Između točaka 1 i 2, te 2 i 3 odrede se tačke 4 i 5, koje se koriste za određivanje greške zamjene evolvente kružnicom.

Za određivanje tačaka 1, 2, 3..... treba naći koordinate x , y odgovarajućih tačaka. Potrebno je definirati veličine zupčanika koje ulaze u proračun koordinata x i y .

Širina uzubine (međuzublja) e biće

$$e = \frac{d \cdot \pi}{z} - s_{\max} \quad (1)$$

Polovica centralnog kuta uzubine je

$$\Theta^0 = \left(\frac{e}{d} - \operatorname{inv} \alpha \right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad (2)$$
$$\operatorname{inv} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - \alpha \operatorname{rad})$$

Polumjeri odgovarajućih tačaka dati su jednažbama (3)

$$r_1 = \frac{d_f}{2}, \quad r_2 = \frac{d}{2}, \quad r_3 = \frac{d_a}{2},$$
$$r_4 = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad r_5 = \frac{r_2 + r_3}{2} \quad (3)$$

Ako su tačke 1 i 3 podjednako udaljene od tačke 2, tada se r_2 uzima prema jednažbi (3), u protivnom je

$$r_2 = \frac{d_a + d_f}{2} \quad (4)$$

Zamjena evolvente kružnicom izvodi se uz dozvoljenu grešku koja za zupčanike modula do 3 mm iznosi 0,015 mm, a za modul preko 3 mm 0,020 mm.

Ako je greška veća od dozvoljene, treba uzimati druge vrijednosti r_1 i r_3 , tako da tačke 1 i 3 budu bliže tački 2.

Kutovi zahvatne linije dati su jednažbom (5).

$$\cos \alpha_1 = -\frac{d_b}{2r_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{d_b}{2r_2},$$
$$\cos \alpha_3 = -\frac{d_b}{2r_3}, \quad \cos \alpha_4 = \frac{d_b}{2r_4},$$
$$\cos \alpha_5 = \frac{d_b}{2r_5} \quad (5)$$

Sl. 1 Zamjena evolvente kružnicom

Svakom kutu zahvatne linije odgovara po jedan tzv. evolventni kut Θ . Ovaj kut je kut između pravca početne tačke evolvente na temeljnoj kružnici i pravca posmatrane tačke — jednačbe (6).

$$\Theta_1^0 = (\operatorname{tg} \alpha_1 - \alpha_1) \frac{180}{\pi}$$

$$\Theta_2^0 = (\operatorname{tg} \alpha_2 - \alpha_2) \frac{180}{\pi}$$

$$\Theta_3^0 = (\operatorname{tg} \alpha_3 - \alpha_3) \frac{180}{\pi}$$

$$\Theta_4^0 = (\operatorname{tg} \alpha_4 - \alpha_4) \frac{180}{\pi}$$

$$\Theta_5^0 = (\operatorname{tg} \alpha_5 - \alpha_5) \frac{180}{\pi}$$

Ovdje je:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \alpha_1 = \operatorname{inv} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 - \alpha_2 = \operatorname{inv} \alpha_2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 - \alpha_3 = \operatorname{inv} \alpha_3$$

(6)

$$\operatorname{tg} \alpha_4 - \alpha_4 = \operatorname{inv} \alpha_4$$

$$\operatorname{tg} \alpha_5 - \alpha_5 = \operatorname{inv} \alpha_5$$

Koordinate odgovarajućih tačaka slike 2 su:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin(\Theta + \Theta_1) & y_1 &= r_1 \cos(\Theta + \Theta_1) \\ x_2 &= r_2 \sin(\Theta + \Theta_2) & y_2 &= r_2 \cos(\Theta + \Theta_2) \\ x_3 &= r_3 \sin(\Theta + \Theta_3) & y_3 &= r_3 \cos(\Theta + \Theta_3) \\ x_4 &= r_4 \sin(\Theta + \Theta_4) & y_4 &= r_4 \cos(\Theta + \Theta_4) \\ x_5 &= r_5 \sin(\Theta + \Theta_5) & y_5 &= r_5 \cos(\Theta + \Theta_5) \end{aligned} \quad (8)$$

Da bi se dobio polumjer kružnice kojom se zamjenjuje evolventa, potrebno je odrediti koordinate centra tražene kružnice (sl. 2).

Kao potrebne dodatne veličine prema slici 2 uzimaju se kutovi β , γ , δ i ω , koje se definiraju jednačbama (9):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} & \operatorname{tg} \gamma &= \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} & \omega &= \beta - \gamma \end{aligned} \quad (9)$$

Sl. 2 Određivanje koordinata centra kružnice

Dijagram toka

Ulaz											
d	d ₂	d ₃	d _f	m	z	α	S _{max}	S _{min}	h _a	h _f	

Izlaz

Pisanje ulaznih podataka

$$\pi = 3.141592653$$

$$e = \frac{d \pi}{z} - S_{\max}$$

$$\text{inv} \alpha = \text{tg} \alpha - \frac{\alpha \pi}{180}$$

$$\theta^{\circ} = \left(\frac{e}{d} - \text{inv} \alpha \right) \frac{180}{\pi}$$

$$r_1 = \frac{d_f}{2}$$

$$r_2 = \frac{d}{2}$$

$$r_3 = \frac{d_1}{2}$$

$$r_b = \frac{r_2 + r_3}{2}$$

$$r_b = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$i = 1 + 5$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{d_2}{2r_1}$$

$$\theta_1 = \text{tg} \alpha_1 - \alpha_1$$

$$x_1 = r_1 \sin (\theta + \theta_1)$$

$$y_1 = r_1 \cos (\theta + \theta_1)$$

$$\beta = \arctg \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}$$

$$\gamma = \arctg \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}$$

$$\delta = \arctg \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$\omega = \beta - \gamma$$

$$R_0 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \delta \sin \omega}$$

$$x_0 = x_2 + R_0 \cos (\omega + \delta)$$

$$y_0 = y_2 - R_0 \sin (\omega + \delta)$$

Sada je polumjer kružnice kojom se zamjenjuje evolventa

$$R_0 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \delta \sin \omega} \quad (10)$$

Koordinate centra tražene kružnice biće:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_2 + R_0 \cos (\omega + \delta) \\ y_0 &= y_2 - R_0 \sin (\omega + \delta) \end{aligned} \quad (11)$$

Da bi se odredile greške odstupanja kružnice od evolvente, potrebno je utvrditi stvarne koordinate tačaka 4 i 5, što je dato jednadžbama (12)

$$\begin{aligned} x_4' &= x_0 - \sqrt{R_0^2 - (y_4 - y_0)^2} \\ y_4' &= y_0 + \sqrt{R_0^2 - (x_0 - x_4)^2} \\ x_5' &= x_0 - \sqrt{R_0^2 - (y_5 - y_0)^2} \\ y_5' &= y_0 + \sqrt{R_0^2 - (x_0 - x_5)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Izlaz

e	R ₀	x ₀	y ₀	x ₄ '	x ₅ '	y ₄ '	y ₅ '	θ
θ ₁	θ ₂	θ ₃	θ ₄	θ ₅	γ	γ	δ	
ω	α _i	e _i	Δ _{4x}	Δ _{5x}	Δ _{4y}	Δ _{5y}		

Greške zamjene evolvente kružnicom izračunavaju se prema jednadžbama (13)

$$\begin{aligned} \Delta 4_x &= \frac{(x_4' - x_4) \cdot (x_0 - x_4')}{R_0} \\ \Delta 5_x &= \frac{(x_5' - x_5) \cdot (x_0 - x_5')}{R_0} \\ \Delta 4_y &= \frac{(y_4' - y_4) \cdot (y_0 - y_4')}{R_0} \\ \Delta 5_y &= \frac{(y_5' - y_5) \cdot (y_0 - y_5')}{R_0} \end{aligned} \quad (13)$$

Na osnovu izračunatih koordinata može se napraviti šablon kojim će se vršiti kontrola odgovarajućeg profila.

Priprema informacija za proračun pomoću računara

Da bi se olakšao posao oko pisanja programa za računar, potrebno je napraviti sistematizaciju naziva svih ele-

menata potrebnih za definiranje problema te, također, i njihovo matematičko definiranje. To će se prikazati u obliku tablice i dijagrama toka. Svi nazivi i oznake usklađeni su prema ISO i DIN.

Red. br.	Naziv	Oznaka	Jednadžba
1	2	3	4
1.	Promjer deobene kružnice	d	$d = m \cdot z$
2.	Promjer tjemene kružnice	d_a	$d_a = d + 2h_a$
3.	Promjer podnožne kružnice	d_f	$d_f = d - 2h_f$
4.	Promjer temeljne kružnice	d_b	$d_b = d \cdot \cos \alpha$
5.	Tjemena visina zuba	h_a	
6.	Podnožna visina zuba	h_f	
7.	Standardni kut zahvatne linije	α	
8.	Broj zuba	z	
9.	Modul	m	
10.	Debljina zuba	s	
11.	Širina uzubine (međuzublja)	e	$e = \frac{d \cdot \pi}{z} - S_{\max}$
12.	Evolventni kut	$\text{inv } \alpha$	$\text{inv } \alpha = \text{tg } \alpha - \frac{\alpha^2 \pi}{180}$
13.	Polovica centralnog kuta uzubine	Θ^0	$\Theta = \left(\frac{e}{d} - \text{inv } \alpha \right) \cdot \frac{180}{\pi}$
14.	Polumjer tačke 1	r_1	$r_1 = \frac{d_f}{2}$
15.	Polumjer tačke 2	r_2	$r_2 = \frac{d}{2}$
16.	Polumjer tačke 3	r_3	$r_3 = \frac{d_a}{2}$
17.	Polumjer tačke 4	r_4	$r_4 = \frac{r_1 + r_2}{2}$
18.	Polumjer tačke 5	r_5	$r_5 = \frac{r_2 + r_3}{2}$
19.	Kut evolventne linije	α_i	$\alpha_i = \arccos \frac{d_b}{2r_i}$
20.	Broj tačaka na evolventi	i	$i = 5$
21.	Evolventni kut odgovarajuće zahvatne linije	Θ_i	$\Theta_i = \text{tg } \alpha_i - \alpha_i$
22.	Apscisa tačaka	x_i	$x_i = r_i \sin(\Theta + \Theta_i)$
23.	Ordinata tačaka	y_i	$y_i = r_i \cos(\Theta + \Theta_i)$
24.	Pomoćni kut	β	$\beta = \arctg \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}$

1	2	3	4
25.	Pomoćni kut	γ	$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}$
26.	Pomoćni kut	δ	$\delta = \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$
27.	Pomoćni kut	ω	$\omega = \beta - \gamma$
28.	Polumjer kružnice kojom se zamjenjuje evolventa	R_0	$R_0 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \delta \cdot \sin \omega}$
29.	Apscisa centra tražene kružnice	x_0	$x_0 = x_1 + R_0 \cdot \cos(\omega + \delta)$
30.	Ordinata centra tražene kružnice stvarna	y_0	$y_0 = y_1 + R_0 \cdot \sin(\omega + \delta)$
31.	Stvarna apscisa tačke 4	x'_4	$x'_4 = x_0 - \sqrt{R_0^2 - (y_4 - y_0)^2}$
32.	Stvarna apscisa tačke 5	x'_5	$x'_5 = x_0 - \sqrt{R_0^2 - (y_5 - y_0)^2}$
33.	Stvarna ordinata tačke 4	y'_4	$y'_4 = y_0 + \sqrt{R_0^2 - (x_0 - x_4)^2}$
34.	Stvarna ordinata tačke 5	y'_5	$y'_5 = y_0 + \sqrt{R_0^2 - (x_0 - x_5)^2}$
35.	Greška tačke 4 po apscisi	$\Delta 4_x$	$\Delta 4_x = \frac{(x'_4 - x_4) \cdot (x_0 - x_4')}{R_0}$
36.	Greška tačke 5 po apscisi	$\Delta 5_x$	$\Delta 5_x = \frac{(x'_5 - x_5) \cdot (x_0 - x_5')}{R_0}$
37.	Greška tačke 4 po ordinati	$\Delta 4_y$	$\Delta 4_y = \frac{(y'_4 - y_4) \cdot (y_0 - y_4')}{R_0}$
38.	Greška tačke 5 po ordinati	$\Delta 5_y$	$\Delta 5_y = \frac{(y'_5 - y_5) \cdot (y_0 - y_5')}{R_0}$

Zaključak

Primjena aproksimacije evolvente kružnicom izloženom metodom daje mogućnost preciznog konstruiranja evolvente, a uz korišćenje računara do-

bija se i velika ušteda u vremenu u odnosu na ručni proračun. Ovaj način proračuna moguće je koristiti i za svaku drugu krivulju gdje je potrebna aproksimacija.

Literatura:

- [1] A. V. Šegaljev: »Konstruktovanje pratjažek«, Mašglz, 1960.
- [2] D. Vukelja: »Dimenzioniranje reznih alata za obradu provlačenjem«, Tehnika br. 11/1965.
- [3] B. Rebec: »Rezni alati«, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.
- [4] V. N. Ašimov: »Protjagivanje«, Mašinstroenie, Moskva, 1981.
- [5] I. Bago: »Diplomski rad«, Mašinski fakultet,