Jedan metod brzog proračuna sopstvenih frekvencija helikoptera

U članku su obrađene osnovne postavke problema oscilovanja lopatica i helikoptera. Postupak proračuna sveden je na formiranje diferencijalnih jednačina ravnoteže elemenata kojima se opisuje oscilatorno kretanje delova helikoptera, a u nastavku se jednom od približnih numeričkih metoda izvodi proračun oblika oscilovanja i sopstvenih frekvencija i proračun naponskog stanja u preseccima. Posebna pažnja je data kombinaciji proračuna sa merenjima nivoa oscilacija na helikopterima, koji su u eksploataciji, čime se omogućuje praćenje stanja helikoptera.

Uvod

Glasnik RV i PVO je već pisao o vibracijama helikoptera, kao o izuzetno ozbiljnom problemu koji se sreće u inženjerijskoj praksi u vazduhoplovstvu. Pri tome, posebna pažnja je bila posvećena uticaju vibracija na ljudski organizam [3].

U ovom radu, međutim, obrađene su osnovne postavke problema oscilovanja lopatica i helikoptera, uz prikaz frekvencijskog dijagrama sa analizom uticajnih parametara, a zatim je opisan i jedan skraćeni metod proračuna sopstvenih frekvencija za slučaj zajedničkih mašućih i torzionih oscilacija. Metod je praktičan za prvu fazu projektovanja, jer u skraćenom postupku proračuna brzo daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti.

Uzroci pojave vibracija helikoptera

Aerodinamičke sile, koje deluju na krakove glavnog rotora, značajno se menjaju pri obrtanju rotora u stacionarnom režimu leta i imaju periodični karakter. Sile i momenti koji se javljaju na lopaticama rotora prenose se na glavčinu glavnog rotora preko osnih šarnira, i proizvode vibracije na trupu, a sastoje se od pomenutih aerodinamičkih sila, sila inercije i centrifugalnih si-

la, koje nastaju usled mašućeg kretanja, zabacivanja, zakretanja i obrtanja krakova. Značajne vibracije nastaju i usled obrtanja repnog rotora. Vibracije, takođe, nastaju i usled rada motora, transmisije i reduktora.

Na slici 1 naznačeni su najčešći uzročnici povišenih vibracija helikoptera.

Uklanjanje ili smanjivanje nivoa vibracija ima veliki značaj iz tri razloga:

1. — Smanjivanje sila koje izazivaju zamor materijala na lopaticama, mehaničkim komponentama i konstrukciji helikoptera,
2. — Preventiva u cilju sprečavanja oštećenja ugrađene osetljive elektronske i druge opreme; i
3. — Vrednost sopstvenih frekvencija delova ljudskog organizma.

Na osnovu iznetog proizilazi važnost određivanja vrednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja helikoptera, i harmonika tih frekvencija jer kada vrednost sopstvenih frekvencija dostigne vrednost frekvencije pobudnih oscilacija dolazi do rezonanse, koja za niže harmonike može da izazove katastrofalne posledice. Međutim, pri određivanju vrednosti sopstvenih frekvencija helikoptera u celini ili pojedinih njegovih elemenata, konstruktor je suočen sa tri osnovna ograničenja:

Sl. 1

— vrednost pobudnih frekvencija rotirajućih delova helikoptera (lopatice i glave glavnog i repnog rotora, reduktora, motora, transmisije);

— vrednost sopstvenih frekvencija delova helikoptera (lopatice glavnog i repnog rotora, struktura helikoptera, mehaničke komponente, itd.); i

— vrednost sopstvenih frekvencija delova ljudskog organizma.

za posledicu ima pojavu vibracija helikoptera.

U cilju definisanja pobudnih sila $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ i momenata $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$, koji se sa rotora prenose na strukturu helikoptera, posmatrajmo rotor sa pet lopatica, koji se obrće ugaonom brzinom ω .

Neka u trenutku vremena t , lopatica rotora zauzima položaj kao na slici 2.

Pobudne sile i momenti

Prema samom principu letenja, helikopter je izložen dejstvu periodičnih sila i momenata. Lopatice vrše složeno obrtno kretanje oko ose glave glavnog rotora i oscilatorno kretanje u ravni mahanja, zabacivanja i zakretanja. Aerodinamičko opterećenje je promenljivo i po dužini lopatica i po azimutu, čak i u stacionarnom letu. Pri progresivnom letu, menja se i brzina i napadni ugao nadolazeće vazdušne struje, usled čega dolazi do mašućeg kretanja lopatice, što

Sl. 2

U svakom trenutku vremena pobudna sila $X(t)$ ima različitu vrednost. Posle $1/5$ vremena punog obrta rotora, prva lopatica će biti na mestu druge, druga na mestu treće itd. Zbog toga, ukoliko se teorijski radi o identičnim lopaticama, vrednost pobudne sile posle $1/5$ vremena punog obrta rotora biće ponovo ista kao u početnom trenutku vremena. Očigledno je, dakle, da se raspored i veličina pobudnih sila u svakoj ravni ponavljaju posle svakih $1/5$ obrta, a jasno je da to važi i za slučaj rotora za »z« lopatica, kada se raspored i veličine pobudnih sila ponavljaju svakih $1/z$ vremena punog obrta rotora.

Prema tome, proizilazi da periodična pobudna sila kod petolopatičnog rotora, koja se prenosi na helikopter, ima učestanost 5ω , dok za to vreme periodična sila koja deluje na lopaticu ima učestanost ω .

S obzirom da frekvencija pobudnih sila helikoptera p , direktno zavisi od broja lopatica rotora z , frekvencija pobudnih sila i momenata se može u opštem slučaju izraziti kao:

$$p = z\omega \quad (1)$$

Pobudna sila $X(t)$, kao svaka periodična funkcija, se može razložiti u Furijeov red:

$$X(t) = X_0 + X_{a1} \cos 5\omega t + X_{b1} \sin 5\omega t + X_{a2} \cos 10\omega t + X_{b2} \sin 10\omega t + \dots \quad (2)$$

Ili, na osnovu (1)

$$X(t) = X_0 + X_{a1} \cos pt + X_{b1} \sin pt + X_{a2} \cos 2pt + X_{b2} \sin 2pt + \dots + X_{an} \cos p_n t + X_{bn} \sin p_n t + \dots + \quad (3)$$

$$M_x = M_{x0} + M_{x_{a1}} \cos pt + M_{x_{b1}} \sin pt + M_{x_{a2}} \cos 2pt + M_{x_{b2}} \sin 2pt + \dots + M_{x_{an}} \cos p_n t + M_{x_{bn}} \sin p_n t + \dots +$$

$p_n = n z \omega$, je n -ta frekvencija pobudnih oscilacija.

Na isti način, mogu se definisati i ostale pobudne sile i momenti $Y(t)$, $Z(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$.

Ukoliko helikopter ima i repni rotor, koji se obrće ugaonom brzinom ω_r , na helikopter će delovati i pobudne sile od repnog rotora, sa frekvencijom:

$$p_{rr0} = z_r \omega_r, p_{rr1} = 2 p_{rr0}, p_{rr2} = 3 p_{rr0}, \dots p_{rrn} = (n+1) p_{rr0}, p_{rrn} \text{ — je } n\text{-ta frekvencija pobudnih oscilacija repnog rotora.}$$

Sl. 3

Mehaničke oscilacije koje se prenose na strukturu helikoptera (ili u vazduhoplovnom žargonu — vibracije helikoptera), uzrokovane su dejstvom opisanih pobudnih sila i momenata, kao neizbežna posledica principa na kojima se zasniva mogućnost leta helikoptera. U ovom radu, međutim, dat je akcenat na određivanje sopstvenih frekvencija lopatice, kao primer koji je primenljiv i pri određivanju sopstvenih frekvencija svakog drugog elementa ili helikoptera u celini.

Oscilacije lopatica helikoptera

Diferencijalne jednačine oscilovanja lopatice

Ograničen prostor daje mogućnost da se ovde opiše postupak formiranja diferencijalnih jednačina oscilovanja lopatice samo u ravni mahanja, kao i postupak određivanja sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja. Postupak je analogan i za ravan zabacivanja.

Ugib u ravni mahanja se određuje kao otklon lopatice u ravni normalnoj na ravan glavčine (slika 4), pri čemu se posmatra samo jedan isečak lopatice.

Sl. 4

Polazeći od uslova ravnoteže sila koje deluju na isečak lopatice, u literaturi [1] i [2] je pokazano da parcijalna diferencijalna jednačina oscilovanja lopatice ima sledeći oblik:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(EI_z \frac{\delta^2 y}{\delta r^2} \right) - \frac{\delta}{\delta r} \left(N \frac{\delta y}{\delta r} \right) + m \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{\delta T}{\delta r} \quad (4)$$

ili,

$$(EI_z y'')'' - (Ny')' + my = T' \quad (5)$$

- E — Jangov modul elastičnosti;
- I_z — Moment inercije oko ose savijanja;
- EI_z — Krutost lopatice;
- N — Centrifugalna sila;
- m — Masa lopatice;
- y — Pomeraj lopatice u ravni mahanja.

Rešavanje diferencijalne jednačine (4 ili 5) u zatvorenom analitičkom obliku je nemoguće, čak i u slučaju da su parametri m i EI_z konstantni po dužini

lopaticice. U ovom slučaju, proračun frekvencije se vrši nekom od aproksimativnih metoda. Prethodno je potrebno sačiniti matematički model lopatice, u kome se lopatica zamenjuje konačnim elementima, kod kojih je masa koncentrisana u levom kraju elementa, a krutost na konačnom elementu je konstantna. Dužina i krutost elemenata međusobno mogu biti različite.

Na slici 5, prikazan je matematički model lopatice pogodan za proračun metodom tri momenta, detaljnije datoj u literaturi [1].

Kada je opterećenje T , (sl. 4) na lopaticu usled aerodinamičkih sila jednaka nuli, jednačina (5) predstavlja slobodno kretanje lopatice u vakumu, tj. jednačina opisuje slobodne oscilacije lopatice u polju centrifugalnih sila i dobija oblik:

$$(EI_z y'')'' - (Ny')' + my = 0 \quad (6)$$

U slučaju da nema obrtanja lopatice, tj. kada su centrifugalne sile jednake nuli, dobija se jednačina slobodnih oscilacija u obliku:

$$(EI_z y'')'' + my = 0 \quad (7)$$

Diferencijalna jednačina (7) predstavlja najprostiji oblik oscilovanja. Rešenje te jednačine može se dobiti raznim metodama. Koristeći, na primer, metod razdvajanja promenljivih [1] i uvođenjem smene:

$$y = \bar{y}(r) \sin pt$$

i posle četverostrukog integraljenja dobija se jednačina oscilovanja u obliku:

$$\bar{y} = p^2 \int_0^y \left\{ \int_0^r \frac{dr^2}{EI_z} \right\} \int_0^R m \bar{y} dr^2 \quad (8)$$

Ova inteligentna jednačina može se rešiti na primer metodom postepenog približenja. S obzirom da i na levoj i desnoj strani jednačine figuriše nepoznata $\bar{y}$, funkciju na desnoj strani moguće je zameniti bilo kojom poznatom funkcijom, koja ima približan oblik

proračunavanog harmonika normiran bilo kojom vrednošću (na primer, da je na kraju lopatice $y_n=1$).

Proces proračuna teče tako što se svaki naredni ciklus unosi pod integral novo izračunata vrednost funkcije pomeranja $\bar{y}$. Proces teče sve dok se ne zadovolji uslov da je razlika sopstvenih frekvencija između dva susedna ciklusa p_i^2 i p_{i+1}^2 manja od unapred zadate greške ϵ , tj.

$$p_i^2 - p_{i+1}^2 < \epsilon \quad (9)$$

Ovim je određena funkcija pomeraja $\bar{y}_i(r)$ i sopstvena frekvencija p_i^2 posmatranog harmonika. Proces brzo konvergira ka ϵ .

Da bi se proračunao svaki sledeći harmonik i njegova frekvencija, neophodno je da bude zadovoljen uslov ortogonalnosti sledećeg harmonika, sa svim prethodno izračunatim. Ovaj uslov proizilazi iz zakona o održanju energije, a fizički mu je smisao da njegovim ispunjenjem lopatica može istovreme-

Sl. 5

no oscilovati po više harmonika, ali samo po onim koji zadovoljavaju uslov ortogonalnosti

$$\sum m_i \bar{y}^{(j)} \bar{y}_i^{(j+1)} = 0 \quad (10)$$

$\bar{y}_{i(j)}$ i $\bar{y}_{i(j+1)}$ su pomeraji lopatice po j -tom i $j+1$ -vom harmoniku, na i -tom preseku (konačnom elementu) lopatice.

Na taj način, ostvarena je i neophodna veza pri prelazu u proračunu sa jednog harmonika na drugi.

Diferencijalna jednačina oscilovanja lopatice u polju centrifugalnih sila (6), može se rešiti metodom Galerkin [1], tako što se kao polazni harmonici za proračun koriste oblici oscilovanja nerotirajuće lopatice, koji su izračunati po gore opisanom postupku. U sklopu tog postupka, dobija se veza između sopstvene frekvencije nerotirajuće i rotirajuće lopatice u obliku:

$$p_j^2 = p_{0j}^2 + k_j \omega^2, \quad (11)$$

gde je:

p_j — sopstvena frekvencija lopatice u polju centrifugalnih sila

p_{0j} — sopstvena frekvencija lopatice bez uticaja centrifugalnih sila ($\omega = 0$),

k_j — koeficijent koji obuhvata uticaj centrifugalnih sila,

ω — ugaona brzina obrtaja rotora.

Iz izraza (11) proizilazi da za $\omega = 0$ postoji samo vrednost p_{0j} sopstvene frekvencije nerotirajuće lopatice. Sa povećanjem ugaone brzine obrtanja rotora raste i vrednost p_j sopstvene frekvencije lopatice.

S druge strane, vrednost sopstvene frekvencije nekog sistema za najprostiji slučaj oscilovanja (sistem koji pre-

$$p^2 = \frac{c}{m} \quad (12)$$

dstavlja teg sa oprugom) je data sledećim izrazom:

gde je:

p — sopstvena frekvencija sistema;

c — krutost opruge;

m — masa tega.

Iz jednačine (12) sledi da sopstvena frekvencija oscilujućeg sistema raste sa povećanjem krutosti opruge (c). Analogijom, drugi član iz jednačine (11) se uslovno naziva dinamičkom krutošću lopatice. Fizički, naziv ima smisao s obzirom da je u koeficijentu k_j iz jednačine (11) sadržan uticaj centrifugalne sile, koja teži da »istegne« lopaticu, što je analogija sistemu tega sa oprugom.

Za slučaj oscilovanja lopatice u ravni zakretanja diferencijalna jednačina oscilovanja, analogno, ima oblik:

$$(GI\phi'')' - \text{Im}(\ddot{\phi} + \omega^2\phi) = 0 \quad (13)$$

G — Modul torzije lopatice;

I_0 — Polarni moment inercije poprečnog preseka;

Im — Maseni moment inercije preseka

ϕ — Pomeraj lopatice u ravni zakretanja.

Metod proračuna je identičan već opisanom metodu proračuna lopatice u ravni mahanja i stoga ovde neće biti posebno obrazlagan. U krajnjem, dobija se da je sopstvena frekvencija rotirajuće lopatice u ravni zakretanja data sledećim izrazom:

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 \quad (14)$$

gde je:

v — sopstvena frekvencija rotirajuće lopatice;

v_0 — sopstvena frekvencija nerotirajuće lopatice;

ω — ugaona brzina obrtanja rotora.

Analiza frekvencijskog dijagrama i uticaj projektnih parametara na veličinu sopstvenih frekvencija

Na osnovu proračuna vrednosti sopstvenih frekvencija (11) iz diferencijalne jednačine (6) sledi da sa povećanjem krutosti lopatice raste i njena sopstvena frekvencija, a da sa povećanjem mase vrednost sopstvene frekvencije pada. Možemo uslovno reći da sa povećanjem ugaone brzine raste dinamička krutost lopatice, a samim tim raste i njena sopstvena frekvencija.

Sl. 6

Postavlja se, međutim, pitanje koje su to kritične vrednosti frekvencije koje treba izbegavati, ili koje pri projektovanju izborom odgovarajućih parametara treba menjati. Odgovor je sadržan na frekvencijskom dijagramu, koji se formira na bazi napred opisanog proračuna sopstvenih i pobudnih frekvencija (jedan primer je prikazan slikom 6).

Na tom dijagramu, osim vrednosti sopstvenih frekvencija nekoliko harmonika, ucrtava se i određen broj harmonika pobudnih frekvencija. Za lopatice su bitni prvih 7—8 harmonika, jer i harmonijske komponente aerodinamičkih sila imaju značajnu veličinu samo do osmog harmonika. Iz dijagrama se vidi da se već treći harmonik sopstvenih frekvencija lopatice velike krutosti ne seče ni sa desetim harmonikom pobudne frekvencije u radnom dijapazonu broja obrtaja ($n/n_r < 1$).

Dijagram pobudnih harmonika se formira množenjem broja obrtaja rotora ω sa $n = 1, 2, \dots$, čime se dobijaju različite vrednosti frekvencija, a za istu vrednost ugaone brzine. Ove vrednosti se mogu podeliti sa radnim brojem obrtaja, kako bi se dobio bezdimenzijski koeficijent koga je lakše analizirati. Ponavljanjem postupka za više vrednosti ugaonih brzina do radnog broja obrtaja ($n/n_r = 1$), dobija se lepeza pobudnih frekvencija. U preseku n -tog harmonika sopstvenih frekvencija sa j -tim harmonikom pobudnih frekvencija, nalaze se kritične vrednosti frekvencija i brojeva obrtaja.

Na osnovu navedenog, može se zaključiti da je promenom krutosti i mase lopatice moguće uticati na vrednosti sopstvene frekvencije lopatice. Međutim, i tu postoje ograničenja po pitanju više parametara:

— *masa lopatice*: Pri projektovanju se teži da masa lopatice bude što manja jer direktno utiče i na masu celog helikoptera. Međutim, nesrazmerno smanjenje mase dovodi do rasta promenljivih napona usled ugiba u ravni mahanja u toku leta, a samim tim i do smanjenja njenog resursa. Ovaj problem se dosta uspešno rešava upotrebom visoko otpornih kompozitnih materijala.

— *statistički ugib lopatice*: Ugib lopatice usled sopstvene težine ne treba da je suviše velik, a ograničen je i konstrukcijom samog helikoptera. Rast

veliĉine statičkog ugiba je u direktnoj vezi sa krutošću lopatice, pri ĉemu za lopatice male krutosti dolazi do povećanja dinamiĉkih preopterećenja.

— *visina ramenjaĉe*: Ovaj parametar je ograniĉen izborom aeroprofila i ne može se drastiĉno povećavati, jer sa povećanjem visine ramenjaĉe dolazi do povećanja duŹine aerodinamiĉke tetive, što kao krajnju posledicu ima pogoršanje aerodinamiĉkih karakteristika rotora.

— *vitoperenost lopatice*: Ovaj parametar ima znaĉaj kod obezbeđenja jednolike raspodele indukovnih brzina u ravni obrtanja.

— *aerodinamiĉka ĉistoća površina*: Kod ovog parametra bitno je imati u

vidu da sa povećanjem hrapavosti raste koeficijent otpora, tako da opada vrednost uzgona za isti napadni ugao.

— *krutost na torziju*: Sa dijagrama zajedniĉkih mašućih i torzionih oscilacija, prikazanom na sledećoj slici 7. se vidi da je od praktiĉnog znaĉaja samo prvi harmonik torzionih oscilacija. Znaĉaj vrednosti krutosti na torziju je kroz udeo torzije na zajedniĉke torzione oscilacije i oscilacije u ravni maĉanja i kao parametar preko koga se odreĉuje veliĉina šarnirnih momenata neophodnih za proraĉun sistema upravljanja nosećim rotorom.

S tim u vezi, po dinamiĉkim karakteristikama lopatice se dele na lopatice male, srednje i velike krutosti.

Na frekvencijskom dijagramu sa slike 7 unesena su prva tri harmonika za sva tri tipa lopatica.

1. *Lopaticice male krutosti*: kod ovih lopatica, drugi harmonik sopstvenih frekvencija seče se sa četvrtim harmonikom pobudnih oscilacija, a treći harmonik sopstvenih frekvencija seče se u radnom dijapazonu sa šestim harmonikom pobudnih oscilacija.

Ove lopaticice nemaju dovoljnu čvrstinu, osetljive su na iznenadne promene struje vazduha i imaju mali resurs. Međutim, dosta se primenjuju zbog lake i proste konstrukcije. U početku, ove lopaticice su rađene u kombinaciji drvo-metal, a zatim je ramenjača rađena od čelične cevi, dok su rebra od drvene lepenke sa platnenom oplatom.

2. *Lopaticice srednje krutosti*: Prema dijagramu sa slike 7. drugi harmonik sopstvenih frekvencija seče se sa petim harmonikom pobudnih oscilacija, na 80% punog broja obrtaja rotora.

U početku, lopaticice ovog tipa imale su profilisanu metalnu ramenjaču, metalna rebra i metalnu oplatu. Sa razvojem novih tehnologija, ramenjača ostaje ista, ali se ugrađuje sačasta struktura.

3. *Lopaticice velike krutosti*: **Moguće** je postići da drugi harmonik sopstvenih frekvencija bude van petog harmonika pobudnih oscilacija. Time se smanjuju naizmenični naponi koji dejstvuju na ramenjaču u odnosu na lopaticice srednje krutosti. Međutim, s obzirom da se povećanje krutosti obično vrši na račun povećanja mase ojačanjem ramenjače, može se desiti da je lopatica preteška i da je nesposobna da apsorbuje neravnomernost dejstva, aerodinamičkih sila, usled čega nije pogodna za povećana tresenja. Zbog toga su praktične lopaticice od kompozitnih materijala. Ove lopaticice imaju svojstvo visokog strukturalnog prigušenja, što je veoma važno u blizini rezonanse, jer utiče na smanjenje amplitude oscilovanja. Karakteriše ih visoka čvrstoća,

krutost i otpornost na zamor. Promena sopstvenih frekvencija u ravni mahanja kod ovakvih lopatica može se vršiti odabiranjem posebnih vlakana, koja imaju po potrebi veći ili manji modul elastičnosti.

U dosadašnjoj analizi, pretežno je spominjan uticaj krutosti na drugi i treći harmonik. Prvi harmonik se obično nalazi između drugog i trećeg harmonika pobudnih oscilacija. Na njegov položaj može se uticati jedino drastičnijim izmenama konstrukcije i ugradnjom bezšarnirne lopaticice, ugradnjom reaktivnih motora na kraju lopaticice ili nekim drugim metodama.

Skraćena metoda proračuna sopstvene frekvencije za slučaj jednovremenih oscilacija u ravni mahanja i zakretanja

Problemu određivanja vrednosti sopstvenih frekvencija pristupa se, generalno, u sledeća tri slučaja:

a) Pri projektovanju novog helikoptera, neposredno po završenom izboru koncepcije helikoptera i po definisanju projektnih i aerodinamičkih parametara rotora i strukture. Ovaj proračun predstavlja osnov za proračun naponskih stanja.

b) U slučaju da se na već postojećem helikopteru vrši konstruktivna dorada većeg obima iz bilo kog razloga, proračun je takođe neophodno provesti.

c) Na helikopterima koji su u eksploataciji određivanje (merenjem) je ponekad neophodno izvršiti u cilju definisanja nivoa vibracija, lociranja uzroka, kao i njihovog smanjenja.

Proračun se vrši nekom od numeričkih metoda, a rezultati se usled kompleksnosti problema obavezno proveravaju ispitivanjem i merenjem. Pri tome je neophodno uzeti u obzir realni slučaj istovremenog oscilovanja u svim ravnima, što izuzetno usložnjava sam proračun i čini ga veoma dugotrajnim.

U svetu već postoje programi, namenjeni za projektovanje i matematičko modeliranje helikoptera. Na primer, program CONMIN omogućuje variranje i optimizaciju čak 5000 parametara helikoptera. Pri tome se kao parametri trupa helikoptera uzimaju u obzir materijal, dimenzije i poprečni presek okova, okvira i uzdužnika, raspored agregata, mase, opreme, itd. Za lopaticu, varira se vitoperenost, prečnik rotora, ugaona brzina rotora, raspodela tetive po razmahu, strelovitost, oblik profila lopatice, itd.

Međutim, za brze procene vrednosti zajedničkih mašućih i torzionih sopstvenih frekvencija moguće je primeniti i neki od skraćenih postupaka, koji daje osnovne (bar kvantitativne) vrednosti koje su dovoljne za inženjersku procenu, koje parametre treba izmeniti, a tek potom pristupiti dugotrajnom detaljnom proračunu. Jedan takav metod je prikazan u daljem tekstu, uz napomenu da je sasvim zadovoljavajuću tačnost izračunatih vrednosti zajedničkih oscilacija u ravni mahanja i zakretanja. Greška pri ovom proračunu iznosi 5—10% od vrednosti sopstvenih frekvencija, što je u fazi izbora projektnih parametara i koncepcije lopatice kako pri projektovanju nove, tako i pri modifikaciji postojeće lopatice, sasvim dovoljno.

Postupak bazira na rešavanju diferencijalnih jednačina oscilovanja lopatica, s tim što se integrali u diferencijalnim jednačinama rešavaju korišćenjem propusnog svojstva jedinične stepenaste funkcije [4].

Sistem diferencijalnih jednačina zajedničkih mašućih i torzionih oscilacija je moguće prikazati u obliku spregnutih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} EI_z y'''' - (NY')' - mp^2 y + \\ + am p^2 \varphi = 0 \\ (GI_0 \varphi')' - map^2 y + I_m (p^2 - \\ - \omega^2) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

gde je »a« rastojanje između centra masa i centra krutosti. Ostale oznake su već ranije pominjate u tekstu.

Centrifugalna sila se određuje preko integrala:

$$N = \int_r^R m \omega^2 (R_0 + r) dr \quad (16)$$

gde su R i R_0 radijusi lopatice i glave glavnog rotora, a r radijus lopatice u bilo kom preseku. U cilju uprošćenja postupka, za funkcije $y(r)$ i $\varphi(r)$, mogu se odabrati oblici oscilovanja nerotirajuće lopatice sa po radijusu konstantnim maseno krutosnim karakteristikama, izračunatim prema jednačinama (8)—(10) i (13)—(14). U cilju uprošćenja terminologije, oznaka za pomeraj y , dobijena razdvajanjem promenljivih zamenjena je oznakom y i kao takva će se primenjivati u nastavku teksta. U tom slučaju, sistem jednačina (15) se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} (C_n - b_n - p^2 m n) A + p^2 a k n B = 0 \\ - p^2 a n k A + (-c k + (p^2 - \omega^2) m k) B = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Integrali u jednačinama (17) dobijeni su sprovođenjem Galerkinovog postupka. U tom slučaju, članovi u jednačini postaju:

$$\begin{aligned} C_n &= \int_r^R EI_z (y'')^2 dr \\ b_n &= -\omega^2 \int_0^r dr \int_r^R m (R_0 - r) (y')^2 dr = \\ &= -\omega^2 b_n^* \end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned} b_n^* &= \int_0^r dr \int_r^R m (R_0 - r) (y')^2 dr \\ m n &= \int_0^R m y^2 dr \\ a k n &= \int_r^R a m \varphi y^2 dr \\ c k &= \int_r^R GI_0 (\varphi')^2 dr \\ c k &= \int_0^R I_0 \varphi^2 dr \end{aligned} \quad (18)$$

Sistem jednačina (17) imaće rešenja, kada je determinanta sistema jed-

naka nuli. U tom slučaju dobijamo frekvencijsku jednačinu u obliku:

$$(1-x^2)p^4 - (pn^2 + pk^2)p^2 + pn^2pk^2 = 0 \quad (19)$$

Parcijalne vrednosti frekvencija u ravni mahanja i zakretanja su:

$$pn^2 = \frac{cn}{mn} + \varphi^2 \frac{bn^*}{mn} \quad (20)$$

$$pk^2 = \frac{ck}{mk} + \omega^2$$

Veza između mašućih i torzionih oscilacija je:

$$x = \frac{akn \cdot ank}{mkmn} \quad (21)$$

Iz jednačine (19), dobijamo frekvenciju zajedničkih mašućih i torzionih oscilacija:

$$p^{1,2} = \frac{(pn^2 + pk^2) \pm \sqrt{(pn^2 - pk^2)^2 + 4xpn^2pk^2}}{2(1-x)} \quad (22)$$

I u ovom slučaju lopatica se deli na »n« delova, sa konstantnim maseno krutosnim karakteristikama u svakom elementu. Izračunavanje integrala (18) se provodi koristeći propusno svojstvo jedinične stepenaste funkcije, tj. da na posmatranom konačnom elementu funkcija ima vrednost $U=1$, a van njega $U=0$.

U tom slučaju integrali (18), izračunavaju se na sledeći način:

— Izračunavanje mase:

$$m(r) = m_1 \sum_{i=1}^N m_i (U(r - r_{pi}) - U(r - r_{ki})) \quad (23)$$

gde je:

m_1 — masa po jedinici dužine (specifična masa), početnog elementa

$\bar{m}_i$ — masa i-tog elementa, svedena na masu prvog elementa ($\bar{m}_i = m_i/m_1$)

U — jedinična stepenasta funkcija
 pik — označavaju početak i kraj konačnog elementa lopatice.

Unošenjem izraza za masu u jednačinu (18), dobijaju se sledeći izrazi:

$$mn = m_1 R_i \sum_{i=1}^N \left(\int_{r_{pi}}^1 y^2 d\bar{r} - \int_{r_{ki}}^1 y^2 d\bar{r} \right)$$

$$cn = (EI_z)_i R \sum_{i=1}^N (\bar{EI}_z)_i \left(\int_{r_{pi}}^1 (y'')^2 d\bar{r} - \int_{r_{ki}}^1 (y'')^2 d\bar{r} \right) \quad (24)$$

$$bn = -\omega^2 m_1 R \sum_{i=1}^N \bar{m}_i \left(\int_0^1 \int_{r_{pi}}^1 (\bar{R}_0 - \bar{r}) (y')^2 d\bar{r} - \int_0^1 \int_{r_{ki}}^1 (\bar{R}_0 - \bar{r}) (y')^2 d\bar{r} \right)$$

$$\int_0^1 \int_{r_{ki}}^1 (\bar{R}_0 - \bar{r}) (y')^2 d\bar{r}$$

$$bn = -\omega^2 m_1 R^3 \sum_{i=1}^N \bar{m}_i \left(\int_0^1 (\bar{R}_0 - \bar{r}) d\bar{r} \left(\int_{r_p}^1 (y')^2 d\bar{r} - \int_{r_k}^1 (y')^2 d\bar{r} \right) \right)$$

$$akn = am R \sum_{i=1}^N \bar{m}_i \left(\int_{r_k}^1 \varphi y^2 d\bar{r} - \int_{r_p}^1 \varphi y^2 d\bar{r} \right)$$

$$ck = (GI_{oi}) \sum_{i=1}^N (GI_{oi}) \left(\int_{r_{pi}}^1 (\varphi')^2 d\bar{r} - \int_{r_{ki}}^1 (\varphi')^2 d\bar{r} \right)$$

$$mk = (Im)_i \sum_{i=1}^N I \bar{m} \left(\int_{r_p}^1 \varphi^2 d\bar{r} - \int_{r_k}^1 \varphi^2 d\bar{r} \right)$$

$$\frac{bn}{mn} = \omega^2 R K_N$$

$$K_N = \frac{-\omega^2 R \sum_{i=1}^N \left(\int_{r_{pi}}^1 (y')^2 d\bar{r} - \int_{r_{ki}}^1 (y')^2 d\bar{r} \right) \sum_{i=1}^N \bar{m}_i (R_0(\bar{r}_p - r_k) + \frac{1}{2}(r_p^2 - r_k^2))}{\sum_{i=1}^N \left(\int_{r_p}^1 y^2 d\bar{r} - \int_{r_k}^1 y^2 d\bar{r} \right)}$$

START

Proračun oscilacija u ravni mahanja

Proračun oscilacija u ravni zakretanja

p_n i y_n ,
za $n = 1, 2, \dots$
prema jednačinama:
(7 — 11)

p_k i y_k ,
za $k = 1, 2, \dots$
prema jednačinama:
(13 i 14)

Tabelarno izračunavanje integrala, za
svaki harmonik i konačni element iz je-
dnačine (24)

$$\int_{r_{pi}}^1 y^2 d\bar{r}; \int_{r_{ki}}^1 y^2 d\bar{r};$$

$$\int_{r_p}^1 (y')^2 d\bar{r}; \int_{r_k}^1 (y')^2 d\bar{r};$$

$$\int_{r_{pi}}^1 (y'')^2 d\bar{r}; \int_{r_{ki}}^1 (y'')^2 d\bar{r};$$

Tabelarno izračunavanje integrala, za
svaki harmonik i konačni element iz je-
dnačine (24)

$$\int_{r_p}^1 \phi y^2 d\bar{r}; \int_{r_k}^1 \phi y^2 d\bar{r};$$

$$\int_{r_{pi}}^1 (\phi')^2 d\bar{r}; \int_{r_{ki}}^1 (\phi')^2 d\bar{r};$$

Izračunavanje koeficijenata: m_n , c_n , b_n ,
 k_n , k_N
jednačina: (24)

Izračunavanje koeficijenata: c_k , m_k , k_k
jednačina: (24)

Izračunavanje parcijalne vrednosti sop-
stvene frekvencije p_n , za $n = 1, 2, 3, \dots$

Izračunavanje parcijalne vrednosti sop-
stvene frekvencije p_k , za $k = 1, 2, 3, \dots$

Sumarna vrednost frekvencije $p_{1,2}$
jednačina (22)

Sl. 8 — Algoritam toka proračuna sopstvenih frekvencija skraćenom metodom

Na isti način se određuju i koeficijenti k_n i k_k :

$$\frac{c_n}{m_n} = \frac{(E I_z)_1}{m_1} k_n$$

$$\frac{c_k}{m_k} = \left(\frac{G I_0}{I_m} \right)_1 k_k \quad (25)$$

n — n -ti harmonik mašućih oscilacija
 k — k -ti harmonik torzionih oscilacija.

Integrali u jednačinama (24), mogu se izračunati ranije i dati u obliku grafika ili tablice.

Sada se izrazi za frekvenciju n -tog harmonika mašućih i frekvenciju k -tog harmonika torzionih oscilacija mogu napisati u obliku:

$$p_n = \sqrt{\frac{(E I_z)_1}{m_1} k_n^2 + \omega^2 R^2 k_N^2}$$

$$p_k = \sqrt{\frac{G I_0}{I_m} k_k^2} \quad (26)$$

Koeficijenti k_n , k_N i k_k , definisani su jednačinama (24) i (25).

Na slici 8. prikazan je algoritam toka proračuna:

U algoritmu za proračun, korišćene su sledeće oznake:

- p_n — sopstvena frekvencija n -tog harmonika u ravni mahanja
- y_n — n -ti harmonik u ravni mahanja
- p_k — sopstvena frekvencija k -tog harmonika u ravni zakretanja
- φ_k — k -ti harmonik u ravni zakretanja
- p_{ij} — frekvencija zajedničkih oscilacija u ravni zakretanja i mahanja, n -tog i k -tog harmonika.

Ostale oznake su ranije date u tekstu.

Na slici 9 prikazani su rezultati proračuna ovom metodom sopstvenih frekvencija lopatice helikoptera.

Ovaj metod je praktičan, jer se može primeniti i za druge oscilujuće elemente, koji se opisanim metodom mogu aproksimirati u elastičnu gredu.

Zaključak

Prikazani skraćeni metod za brzu procenu sopstvenih frekvencija lopatice helikoptera za slučaj zajedničkih ma-

Sl. 9

šućih i torzionih oscilacija je sasvim zadovoljavajući za nivo eksploatacije i održavanja, ali i za početnu inženjersku procenu kod projektovanja novih ili rekonstrukcije već postojećih elemenata.

Druga korist šire primene prikaznog (ili nekog sličnog) programa mogla bi biti u koncentraciji iskustvenih i teorijskih znanja. Naime, poznavanje teorijskih uzroka nastanka prekomernih vibracija, merenje njihovih vrednosti na odgovarajućim tačkama helikoptera i iskustvena znanja stečena u jedinicama i remontnom zavodu omogućuju formiranje stabla otkaza, koje bi algoritamski moglo korisnika da navodi na uzrok povišenih vibracija, kao i na metode za njihovo otklanjanje.

Sledeći korak bio bi formiranje još složenijeg programa, u kome bi bili:

1. Zadati parametri:

— vrednost pobudnih frekvencija rotirajućih delova helikoptera, na određenim režimima leta,

— vrednost sopstvenih frekvencija prvih 7—8 harmonika oscilovanja vitalnih delova helikoptera (lopatice, struktura, itd.).

2. Ograničenja:

— Dozvoljene vrednosti amplituda i frekvencija koje je propisao proizvođač, i (ili)

— Dozvoljene vrednosti amplituda i sopstvenih frekvencija delova ljudskog organizma, na granici komfortabilnosti.

3. Snimljeni parametri:

— Snimljene vrednosti frekvencija i amplituda na tačkama definisanim pod stavom 1.

4. Analiza:

Na osnovu datih vrednosti program bi mogao vršiti predikciju mogućeg uzročnika vibracija, kao i davati preporuke za njihovo otklanjanje.

Literatura:

- [1] M. L. Mil': Vertolety — Račun i projektovanje izdatel'stvo »Mašinstroenie«, Moskva, 1967. god.
- [2] A. R. S. Bramwell: Dinamika vertoletov, (prevod sa engleskog na ruski), izdatel'stvo, Mašinstroenie, 1976. god.
- [3] kllk Nikodinović Dragan: Glasnik RV i PVO br. 5, iz 1985. god. Vibracije helikoptera.

- [4] Čujko A. N., Pavljuk N. I.: UDK 629.735 Uporošćenij metod opredeljenja sobstvenyh kolebanij lopasti vertoleta, 1990, od.
- [5] Goran Savanović: Uticaj aerodinamičkih i projektnih parametara na sopstvene frekvencije i frekventne karakteristike helikoptera, 1991, god. (magistarski rad).