Mr Dušan Regodić,
major, dipl. inž.

Primena linearne interpolacije pri proračunu numeričkih vrednosti tablica

Članak obrađuje praktičnu upotrebu tablica gađanja i spoljnobalističkih tablica, pri kojoj se određeni podaci dobijaju linearnom interpolacijom. U članku se daju teoretske postavke i objašnjenja, a čitav problem ilustriran je određenim numeričkim postupkom.

Uvod

Tablicom se naziva skup numeričkih vrednosti date funkcije poređanih za niz uzastopnih vrednosti nezavisne promenljive. Stalna veličina za koju se u tablicama menja ta nezavisna promenljiva x , zove se stepen ili raspon tablice. Tablice se dele na opšte i specijalne. Primeri opštih tablica su tablice množenja, deljenja, prirodnih brojeva, korena, logaritama, tablice kva-

drata, trigonometrijskih funkcija, itd. Specijalne tablice koriste se za potrebe određenih užih tehničkih oblasti.

Tablice gađanja u tehničkim disciplinama naoružanja izrađuju se za sva oruđa određenog kalibra i modela i predstavljaju specijalnu vrstu tablica. Numerički podaci u tablicama gađanja su određeni proračunom, a usklađeni sa rezultatima ispitivanja. Deo tablica za osnovne elemente putanje projektila dat je u tabeli 1.

Tabela 1

Izvod iz balističkih tablica za osnovne elemente putanje projektila

Daljina	Daljinar 1/6000	Daljinar 1/6400	Tablični ugao	Ordinata te- mena putanje	Vreme letenja	Krajnja brzina	Padni ugao 1/6000	Tempiranje upaljača D.1	Verovatno skretanje				
									putanja			rasprsnuće	
									po daljini (Vd)	po pravcu (Vp)	po visini (Vv)	po daljini (Vrd;	po visini (Vrv)
									metara				
m	hiljaditih		°	m	sek.	m/s	hilj.	pod.					
1	3	3a	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7600	109	117	6°34'	280	15	368	174	73	40	2,3	7,0	60	10
7700	112	119	6°41'	290	15	365	179	74	40	2,3	7,3	60	10
7800	114	122	6°50'	300	15	362	184	75	41	2,3	7,6	60	10
7900	116	124	6°58'	310	16	359	189	76	41	2,4	7,9	60	10
8000	119	126	7°07'	320	16	356	194	77	42	2,4	8,2	60	11
8100	121	129	7°15'	331	16	354	199	78	42	2,4	8,5	60	11
8200	123	131	7°24'	342	17	351	204	79	43	2,5	8,9	60	11
8300	126	134	7°33'	353	17	348	209	80	43	2,5	9,2	60	11
8400	128	136	7°42'	365	17	345	215	81	44	2,5	9,5	60	12
8500	131	139	7°51'	377	18	343	220	82	44	2,6	9,8	60	12

Starešine osnovnih jedinica moraju dobro poznavati vezu između polaznog ugla i raznih elemenata putanje, posebno dometa. Ovu vezu daju tablice gađanja koje služe za pripremu početnih elemenata za gađanje, pri čemu se uzimaju u obzir topografski elementi, meteorološke i balističke popravke. Tablice gađanja kao zbornik numeričkih podataka služe i kao izvor podataka za konstruisanje nišanskih sprava (podela na daljinaru) i uređaja za upravljanje vatrom.

Postoje tablice funkcija sa jednom ili više promenljivih veličina. Za funkcije sa više promenljivih praktičniji su nomogrami kojim se grafički predstavljaju funkcionalne zavisnosti. Često u praksi imamo slučaj da je raspon (korak) raspoloživih tablica suviše grub (velike vrednosti). Pri izradi tablica gađanja nastojalo se da se urade što ekonomičnije (mali utrošak vremena, radne snage, potrošnog materijala, itd.), da bi kasnije u praksi korisnici gubili mnogo više vremena u preciznom očitavanju podataka iz tako izrađenih tablica. Kod grubih tablica za izračunavanje međuvrednosti neke funkcije potrebno je izvršiti tzv. interpolacioni postupak.

Predmet ovog rada je upravo teorijska i praktična primena interpolacionog postupka u tehničkim disciplinama naoružanja.

Osnovni pojmovi o interpolaciji

Interpolacija je postupak kojim se unutar nekog intervala traži približna vrednost neke funkcije, koja je poznata samo u određenom nizu tačaka, a ne kontinualno. Preciznije, ako su za funkciju $y=f(x)$ definisanu na intervalu $[a, b]$, date vrednosti u tačkama $x_0, x_1, \dots, x_n$ $[a, b]$, (sl. 1), tj. ako je

$$f(x_0)=y_0$$

$$f(x_1)=y_1$$

$$f(x_2)=y_2$$

.

.

.

$$f(x_n)=y_n$$

a druge vrednosti se ne znaju, mogu li se makar približno izračunati vrednosti funkcije u ostalim tačkama, pod uslovima da je f neprekidna, diferencijabilna, itd.

Sl. 1 — Linearna interpolacija

Zaključujemo da, ukoliko je f polinom n -tog stepena, sve ostale vrednosti mogu se tačno odrediti, ako su tačke $x_0, x_1, \dots, x_n$ međusobno različite. Znači, ako su $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ $n+1$ različite, tačke kroz koje prolazi grafik funkcije $y=f(x)$ moguće je odrediti polinom $y=P_n(x)$, čiji stepen nije veći od n čiji grafik, takođe, prolazi kroz date tačke. Date tačke zovu se čvorovi interpolacije, a odgovarajući polinom $y=P_n(x)$ interpolacioni polinom. Pomoću njega možemo približno izračunati vrednosti u ostalim tačkama funkcije f . Ako je x van intervala (x_0, x_n) , onda se radi o interpolaciji, a ako je x van toga intervala onda se radi o ekstrapolaciji.

Najprostiji slučaj interpolacije između dve tačke je linearna interpolacija, kod koje se luk krive, ili eventualno prave linije, zamenjuje sečicom, tj. pravom linijom (sl. 1).

Na slici 2. prikazana je kvadratna interpolacija na paraboli povučenoj kroz tri tačke.

Sl. 2 — Kvadratna interpolacija

Danas su poznate Lagranžova interpolaciona formula i Njutnov interpolacioni polinom. Za niz tačaka $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ na jednakim razmacima (koraku) h , kojim odgovaraju vrednosti funkcije $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ vredi za interpolacionu funkciju Njutnova (Newton) interpolaciona formula

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{1}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right) \Delta^3 y_0 + \dots$$

gde su $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots$, tzv. diferencije (razlike prvog, drugog, trećeg), ... reda na mestu y_0 . Te diferencije ili konačne razlike su definisane ovako.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{diferencije} \\ \text{I reda} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{diferencije} \\ \text{II reda} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{diferencije} \\ \text{III reda} \end{array}$$

.....

$$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$$

— diferencije n -tog reda

Za svaku tabulisanu funkciju te diferencije mogu se lako izračunati pomoću diferencijske sheme. Ako posmatramo funkciju $y = x^3$, diferencijska shema glasi:

Tabela 2

Diferencijska shema

x	$y = x^3$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	1			
1	1	7	6		
2	8	19	12	6	0
3	27	37	18	6	0
4	64	61	24	6	0
5	125	91	30		
6	216				

Linearna interpolacija

Ako se iz Njtnove formule uzmu prva dva člana, desna strana je polinom prvog stepena po x i služi za linearnu interpolaciju. Ukoliko dodamo i naredni, kvadratni član, dobija se izraz za kvadratnu interpolaciju. Većina numeričkih tablica date su tako da se za računanje međuvrednosti koristi linearna interpolacija. Za intervale gde se funkcija menja veoma brzo koristi se kvadratna interpolacija koja u praksi, uglavnom, zadovoljava (npr. za funkciju $y = \text{tg} x$ u blizini ugla od 90° ili $\text{logsin} x$ za uglove u blizini 0°).

Obrazac za linearnu interpolaciju (sl. 3) glasi:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} (y_1 - y_0) = y_0 + P$$

gde je popravka:

$$P = \frac{x - x_0}{h} (y_1 - y_0)$$

Sa sl. 3, iz sličnih trouglova može se uspostaviti proporcija:

$$P : (y_1 - y_0) = (x - x_0) : h$$

a te popravke u tablicama označene su sa P. P. (»partes proporcionales«), gde se postojećoj vrednosti funkcije y_0 dodaje popravka P.

Sl. 3 — Popravka kod direktne interpolacije

Sl. 4 — Popravka kod obrnute interpolacije

Primena linearne interpolacije u spoljnoj balistici i teoriji gađanja

Projektil je ispaljen iz topa 76 mm (sl. 5). Za putanju su poznati sledeći po-

Sl. 5 — Gađanje iz topa 76 mm

Obrnuta linearna interpolacija

Koristi se ako je data vrednost funkcije y , a traži se odgovarajući argument x (sl. 4). Za ovaj slučaj je $x = x_0 + P_1$, gde je

$$P_1 = \frac{h(y - y_0)}{y_1 - y_0}$$

daci: tablična početna brzina $V_0 = 350$ m/s, polazni ugao $\Theta_0 = 20^\circ$ i balistički koeficijent $C_{43} = 0,80$. Izračunati popravku dometa zbog odstupanja stvarne početne brzine od tablične za $\Delta V_0 = 10$ m/s, a ostali uslovi su normalni.

Popravni koeficijent β uvodi se zbog promene gustine vazduha ρ sa visinom. Dat je u spoljnobalističkim ta-

blicama [2], u daljem tekstu SBT u funkciji V_0 , C_{43} i Θ_0 . Popravljeni balistički koeficijent

$$C' = \frac{\rho_0}{\rho_{0N}} \cdot \beta \cdot C$$

za normalne atmosferske uslove $\rho_0 = \rho_{0N}$ pa je $C' = \beta \cdot C$ za zadane vrednosti V_0 , Θ_0 i C_{43} iz SBT nalazimo vrednost $\beta = 0,940$, pa je popravljeni balistički koeficijent $C' = 0,940 \cdot 0,080 = 0,75$. Funkcija

$$f_0 = C' \sin 2\Theta_0 = \left(\frac{a_{0N}}{a_0} \right) f_0(C'x, V_0)$$

i imaće oblik

$$C' \sin 2\Theta_0 = f_0(C'x, V_0)$$

jer su uslovi normalni ($\tau_0 = \tau_{0N}$) i $a_0 = a_{0N}$, gde su:

f_0 — pomoćna funkcija po Sijačiju [2],

a_0, a_{0N} — brzine zvuka u prizemnim i prizemnim normalnim uslovima,

τ_0, τ_{0N} — fiktivna temperatura u prizemnim i prizemnim normalnim uslovima. Prema tome, $f_0 = C' \sin 2\Theta_0 = 0,75 \cdot \sin 40^\circ = 0,483$. Kako je f_0 u SBT data u funkciji $C'x$ i V_0 , to ćemo za poznato f_0 i V_0 izračunati vrednosti $C'x$ postupkom linearne interpolacije.

Tabela 3

Izvod iz SBT

$V_0 = 350$	
$C'x$	f_0
4000	0,435
x	0,483
4500	0,505

$$y = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{h} \right) (y_1 - y_0) = 4000 +$$

$$+ \left(\frac{0,483 - 0,435}{0,505 - 0,435} \right) (4500 - 4000) = 4343$$

Sl. 6 — Linearna interpolacija

Stvarna početna brzina $V_0 = 340$ m/s. Metodom približavanja naći ćemo vrednost $C'x$ za $V_0 = 300$ m/s, a potom linearnom interpolacijom naći vrednost $C'x$ za $V_0 = 340$ m/s.

Tabela 4

Izvod iz SBT

$C'x$	V_0
4343	350
y	340
3636	300

Sl. 7 — Linearna interpolacija

$$y = 3636 + \frac{(340 - 300)}{(350 - 300)} (4343 - 3636) = 4202$$

Ako označimo domet sa X_{340} , za početnu brzinu $V_0=340$ m/s, on iznosi

$$x_{340} = \frac{C'x}{C'} = \frac{4202}{0,75} = 5603 \text{ m}$$

$$x_{350} = \frac{C'x}{C} = \frac{4343}{0,75} = 5791 \text{ m}$$

Odstupanje dometa Δx , zbog odstupanja početne brzine $\Delta V_0=10$ m/s, iznosi:

$$\Delta x = x_{340} - x_{350} = 5603 \text{ m} - 5791 \text{ m} = -188 \text{ m}$$

Znači, neophodno je izvršiti popravku dometa zbog promene početne brzine $\Delta x_{V_0}=188$ m.

Primer za obrnutu linearnu interpolaciju:

Odrediti dubinu zaklonjenog (z), mrtvog (m) i brisanog prostora (b) pri gađanju cilja visine $h=1,5$ m, koji se nalazi iza prepreke visine $H=3,44$ m. Cilj se gađa sa poluautomatskom puškom 7,62 mm M 59/66 (sl. 8), na daljini $x=700$ m.

Sl. 8 — Zaklonjeni, mrtvi i brisani prostor

Komentar osnovnih pojmova

Prostor iza prepreke i najbliže udarne tačke naziva se zaklonjeni prostor (z). Deo zaklonjenog prostora na kome se cilj datom putanjom projektila ne može pogoditi naziva se mrtvi prostor (m) ili netučena zona. Drugi deo zaklonjenog prostora naziva se brisani prostor (b) na kojem cilj može biti pogođen u svim tačkama.

Pri rešavanju zadatka koristiće se tabela 5. izdizanja putanja iznad horizonta oružja kada se gađa zrnom 7,62 mm iz poluautomatske puške M.59/66 [3].

Zaključak izvodimo na osnovu uslova koji mora biti zadovoljen da je trećina ordinate temena putanje veća ili jednaka visini cilja, tj. $\frac{1}{3}Y_s \geq h_c$ [3].

Prepreka visine $H=3,44$ m nalazi se na daljini $x=400$ m od usta cevi, gde je ordinata $y=3,45$ m i biće prebačena sa projektilom. Zaklonjeni prostor se dobija kad razlika daljine na kojoj se gađa i daljine na kojoj se nalazi prepreka ($z=700-400=300$ m). Iz tabele zaključujemo da na daljini $x=600$ m visina ordinate $y_{600}=2,16$ m i na $x=650$ m, $y_{650}=1,22$ m (sl. 9).

Sa sl. 9. posmatračemo deo putanje označen tačkama B, D i C i na istoj izvršiti obrnutu interpolaciju kako bi našli vrednost brisanog prostora (b) za cilj visine $h_c=1,5$ m. Navedeni cilj se u ta-

beli 5. nalazi između ordinata putanje $y=1,22$ m ÷ 2,16 m.

Proračun ćemo vršiti po formuli za obrnutu interpolaciju

$$x = x_0 + P_1 = x_0 + \frac{P(y - y_0)}{y_1 - y_0}$$

$$x = 50 + \frac{(1,5 - 1,22)}{(2,16 - 1,22)}(650 - 600) =$$

$$= 50 + 14,89 = 64,89 \text{ m}$$

Izdizanje putanje iznad horizonta oružja kad se gađa zrnem 7,62 mm iz PAP 7,62 mm M.59/66

Nišan Daljina u (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
	IZDIZANJE PUTANJE U METRIMA							
50	0,02	0,08	0,15	0,23	0,36	0,46	0,66	0,86
100	0	0,11	0,26	0,42	0,65	0,82	1,28	1,68
150		0,09	0,30	0,56	0,88	1,30	1,84	2,43
200		0	0,28	0,62	1,06	1,62	2,34	3,16
250			0,19	0,62	1,16	1,87	2,76	3,80
300			0	0,52	1,17	2,02	3,08	4,34
350				0,32	1,06	2,06	3,38	4,88
400				0	0,90	2,00	3,45	5,12
450					0,54	1,80	3,42	5,26
500					0	1,40	3,20	5,26
550						0,78	2,80	5,04
600						0	2,16	4,58
650							1,22	3,88
700							0	2,88
750								1,60
800								0

Sl. 9 — Elementi putanje projektila za PAP 7,62 mm na daljini gađanja $x=700$ m

Sa slike se vidi da je $b \equiv x = 64,89$ m. Vrednost mrtvog prostora (ne tučene zone) može se izračunati sa slike 8. i iznosi

$$m = z - b = 300 - 64,8936 = 235,1 \text{ m}$$

Sl. 10 — Padni krak putanje za PAP 7,62 mm

Zaključak

Osnovni zahtev za izradu tablica jeste da vrednosti argumenata budu da-

te toliko gusto (mali korak) da se međuvrednosti mogu direktno očitati ili dobiti linearnom interpolacijom. Prethodni primeri linearne interpolacije nam ukazuju na svu složenost procesa proračuna tačnih vrednosti. Starešine u osnovnim jedinicama najčešće koriste tablice za izbor punjenja, tablice osnovnih elemenata i popravki, kod kojih je daljina efikasnog gađanja, sa najčešćim korakom $x = 100$ m.

Primeri proračuna zaklonjenog, mrtvog i brisanog prostora ukazuju na potrebu smanjenja navedenog koraka.

Upotrebom savremenih elektronskih računskih mašina moguće je postići potrebnu gustinu vrednosti argumenata pri izradi tablica gađanja. Time se korisnicima olakšava proračun međuvrednosti i upotreba svih vrsta tablica, kao zbornika numeričkih podataka.

Literatura:

- [1] Simonović V.: Numeričke metode, Mašinski fakultet, Beograd, 1983.
- [2] Pejčić V.: Spoljno-balističke tablice, TSC, Zagreb, 1979.
- [3] Mišović S.: Zbirka priloga iz teorije gađanja i pravila gađanja, VA KoV, Beograd, 1977.
- [4] Regodić D.: Spoljna balistika, CVVŠ, Beograd, 1988.