**Mr Mato Siladić,**
major, dipl. inž.

# Primena parcijalnih diferencijalnih jednačina za generiranje proračunskih mreža u aerotehnici

**Problematika generiranja proračunskih mreža (»numerical grid generation«) je postala sastavni deo kompjuterske aerodinamike i jedna je od najvažnijih faktora u numeričkom rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina u složenim strujnim oblastima. Ona zahteva inženjerijski osećaj za fizičko ponašanje, matematičko razumevanje funkcionalnih relacija na tačkama mreže (kako bi se postiglo fizičko rešenje sa dovoljno tačnosti) i dosta imaginacije. U radu je prezentirana upotreba parcijalnih diferencijalnih jednačina u numeričkom generiranju proračunskih mreža, kao jedna od nužnih sekvenci u rešavanju problema strujanja oko složenih aerodinamičkih konfiguracija.**

## Uvod

Proračunska mreža predstavlja krivolinijski koordinatni sistem kod kojeg se, obično, jedna koordinatna linija poklapa sa konturom tela, a jedna sa spoljnom granicom proračunskog polja. Potreba za proračunskom mrežom proistekla je iz prirode načina rešenja jednačina kretanja i metoda njihove diskretizacije i aproksimacije u strujnom polju. Da bi se uopšte moglo govoriti o rešavanju problema, potrebno je podeliti strujno polje na veliki broj elementarnih površina (u 2-D strujanju) ili zapremina (u 3-D strujanju) kako bi greška aproksimacije diferencijalnih jednačina bila što manja. U svakoj tački proračunske mreže, nekom od numeričkih metoda (metodom konačnih razlika, konačnih površina ili zapremina ili metodom konačnih elemenata) vrši se proračun svih parametara strujanja. U osnovi, proračunska mreža može da se generira numeričkim putem primenom algebarskih metoda ili pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ). Kod algebarskih metoda prvo se definišu tačke na konturi tela i spoljnoj granici, a zatim se, primenom raznih tipova matematičkih interpolacija, vrši generiranje tačaka i koordinatnih linija unutar definisanog strujnog polja. Ove metode su relativno jednostavne, brze i omogućuju eksplicitnu kontrolu položaja tačaka i linija koordinatnog sistema.

Kod metoda parcijalnih diferencijalnih jednačina koriste se sva tri tipa jednačina — eliptične, parabolične i hiperbolične. Koristeći iste principe kao i kod algebarskih metoda, prvo se specificiraju unutrašnja i spoljna granica (izuzev kod hiperboličnih PDJ kod kojih je spoljni region otvoren), a zatim se koordinatne tačke i linije generiraju kao rešenje PDJ-a.

Obe metode su veoma popularne, ali, za sada, nijedna od njih ne, omogućava univerzalno generiranje proračunskih mreža za sve tipove konfiguracija. (Jedan detaljan pregled razvoja i primene koncepta numeričkog generiranja proračunskih mreža dat je u [1]).

U aerodinamičkim aplikacijama obično se koristi tzv. »H«, »O« i »C« tip proračunske mreže.

H-tip proračunske mreže — predstavlja koordinatni sistem kod kojeg koordinatne linije prate konturu date konfiguracije, tj. dobijaju oblik strujnica koje dolaze iz neporemećene struje ispred tela, obilaze ga i nastavljaju kretanje u neporemećeni deo strujanja iza njega. Obezbeđuje odličnu rezoluciju strujnog polja ispred i iza aerodinamičkog tela. To je, ujedno, i najjednostavniji tip mreže. Međutim, H-tip proračunske mreže ne obezbeđuje potpuno tačnu aproksimaciju strujnog polja oko zaobljenih ivica i teže je ostvariti optimalnu kontrolu koncentracije tačaka pri udaljavanju od tela.

O-tip proračunske mreže — predstavlja koordinatni sistem kod kojeg koordinatne linije u potpunosti obavijaju telo. Daje slabiju rezoluciju polja prema spoljnoj granici, ali obezbeđuje veoma dobru rezoluciju koordinatnih linija kod zaobljenih ivica.

C-tip proračunske mreže — predstavlja koordinantni sistem kod kojeg koordinatne linije polukružno obavijaju posmatrano telo. U suštini, »C« mreža predstavlja kombinaciju O-tipa mreže u regionu ispred tela i H-tipa mreže u regionu iza tela. Ova proračunska mreža obezbeđuje veoma dobru aproksimaciju svih granica i periodičnih graničnih uslova.

Pri generiranju proračunskih mreža za 3-D aplikacije koriste se 2-D principi generiranja i kombinacija sva tri navedena tipa mreža.

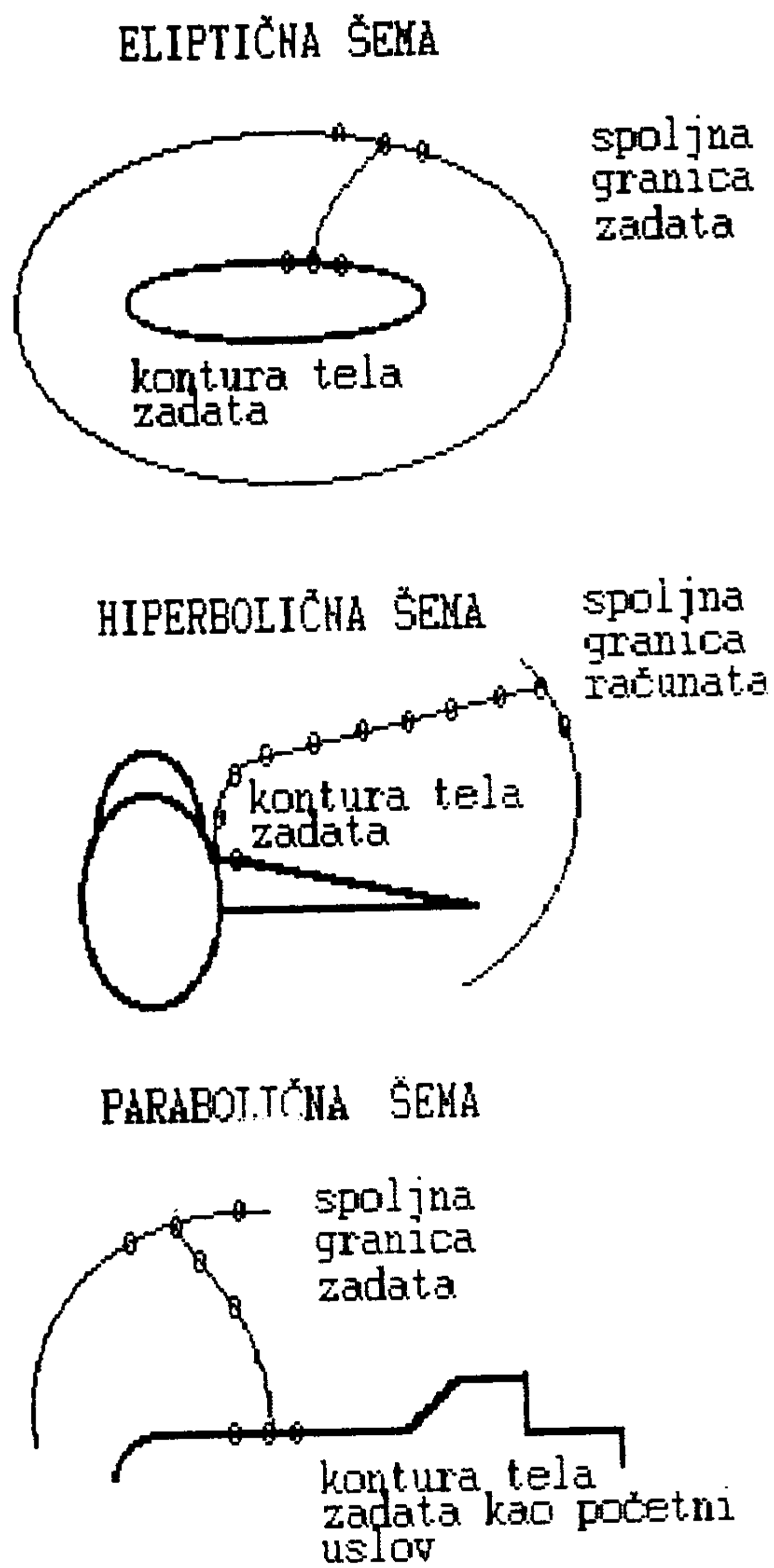
## Potreba i zahtevi za vezani krivolinijski koordinatni sistem

Pri numeričkom rešavanju PDJ uvek se javlja potreba za tačnom reprezentacijom graničnih uslova. Na primer, osnovni zahtev koji se ovde postavlja jeste da se odrede tačke proračunske mreže konstruisane na koordinatnim linijama koje se podudaraju sa granicama fizičkog tela. Na taj način, jedna koordinatna promenljiva može biti specificirana kao konstanta na svakoj granici, a monotona varijacija druge koordinatne oko granica može se specifirati kao skup polaznih podataka za problem diskretizacije PDJ. Zatim, ostaje problem da se generišu vrednosti ovih koordinata u polju, počevši od zadatih granica ili početnih vrednosti. Naravno, pri tome mora postojati jedinstvena podudarnost između osnovnog i krivolunijskog koordinatnog sistema (npr. preslikavanje fizičkog polja na proračunsku ravan mora biti jedan prema jedan, tako da svaka tačka u fizičkom polju odgovara samo jednoj tački u proračunskom polju i obrnuto). Koordinatne linije iste familije ne smeju se ukrštavati, a različitih familija mogu se presecati samo jednom (npr. jakobijan transformacije mora uvek biti različit od nule u svakoj tački). Dalje, koordinatne linije moraju biti glatke kako bi se obezbedila kontinualnost prvih izvoda. Tačke mreže moraju biti na malim rastojanjima u fizičkoj ravni gde se javljaju velike numeričke greške, a iskrivljenje elementarnih polja mreže mora biti izbegnuto u što većoj meri, jer, u suprotnom, može izazvati uvećanje proračunske greške i dovesti u pitanje konvergenciju rešenja.

Pošto krivolinijska proračunska mreža ima koordinatne linije podudarne sa konturama svih prisutnih fizičkih tela, svi granični uslovi za dati problem mogu se izraziti u tačkama mreže bez dodatnih interpolacija, a uslov normalnosti na telu može se postići koristeći konačne razlike među tačkama, čak i u slučajevima kada linije koordinatnog sistema nisu normalne na granicama tela. Transformisane jednačine se, zatim, mogu oproksimirati metodom konačnih razlika ili konačnih elemenata i rešiti numeričkim putem u transformisanoj ravni.

## Generiranje proračunskih mreža pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina

Primena PDJ u generiranju numeričkih proračunskih mreža postala je veoma popularna zbog velikog broja mogućnosti sa kojima se može realizovati. Ovde je osnovna ideja da se generira numerička mreža kao rešenje PDJ koja zadovoljava zadate granične uslove na granicama datog fizičkog polja. Osnovne ideje ovih metoda prikazane su na slici 1.

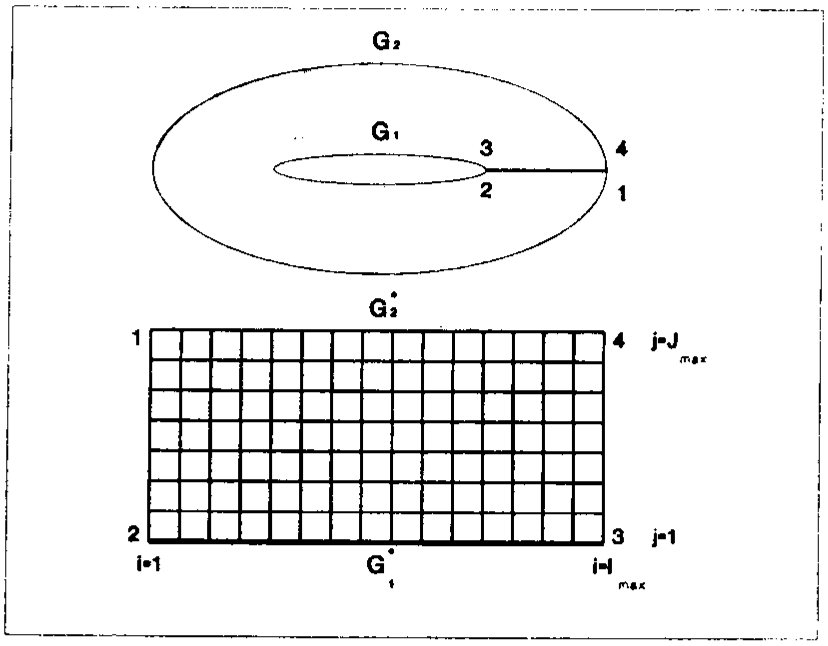



*Sl. 1 — Osnovne ideje generiranja proračunskih mreža primenom PDJ*

## Eliptična diferencijalna šema

Eliptična diferencijalna šema zahteva specifikaciju graničnih uslova na kompletnim granicama fizičkog polja. Položaj koordinatnih tačaka u unutrašnjosti polja određuje se rešenjem seta eliptičnih PDJ. Najviše se koriste Laplace) i Poisonove (Poisson) jednačine. U slučaju ravnomerne raspodele tačaka na nezakrivljenim granicama, koordinatne linije mreže biće ravnomerno raspodeljene zbog »umirujućeg« uticaja laplasijana. U Poisonovim sistemima, kvalitet numeričke mreže (gustina i nagib linija) može se ostvariti pravilnim izborom prinudnih funkcija sa kontrolnim parametrima.

Pretpostavimo da želimo transformisati dvodimenzionalni region G, ograničen sa dve konture proizvoljnog oblika u pravougaoni region G*, kao što je prikazano na slici 2. Opšta transformacija iz fizičke ravni [x, y] u transformisanu ravan [$\xi$, $\eta$] data je sa $\xi = \xi(x, y)$ i $\eta = \eta(x, y)$, dok je inverzna transformacija data sa $x = x(\xi, \eta)$ i $x = y(\xi, \eta)$. Prvi izvodi se transformišu na sledeći način:




*Sl. 2 — Transformisanje fizičke ravni u proračunsku ravan*

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f, y)}{\partial(\xi, \eta)}}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}} = \frac{y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta}{J} \qquad (1)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f, x)}{\partial(\xi, \eta)}}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}} = \frac{x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi}{J} \qquad (2)$$

gde je J jakobijan transformacije definisan kao $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

Razmotrimo primenu Laplasovih jednačina za generiranje proračunskih mreža:

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}=0 \qquad (3)$$

$$\eta_{xx}+\eta_{yy}=0 \qquad (4)$$

gde su:

$$(\ )_{xx}=\frac{\partial}{\partial x^2} \ \text{ i } \ (\ )_{yy}=\frac{\partial}{\partial y^2}$$

sa Dirihleovim (Dirichle) graničnim uslovima:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \xi_1(x, y) \\ \eta_1 \end{bmatrix}; \quad [x, y]\in G_1 \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \xi_2(x, y) \\ \eta_2 \end{bmatrix}; \quad [x, y]\in G_2 \qquad (6)$$

U izrazima (5) i (6) $\eta_1$ i $\eta_2$ su konstante a $\xi_1(x, y)$ i $\xi_2(x, y)$ zadate monotone funkcije na unutrašnjoj granici $G_1$ i spoljnoj granici $G_2$. Ovaj sistem garantira jednoznačno preslikavanje krivolinijskog koordinatnog sistema vezanog za granice bilo kojeg zatvorenog tela (lika). Pošto se kompletno numeričko rešavanje vrši na uniformnoj pravougaonoj proračunskoj ravni, zavisno i nezavisno promenljive u jednačinama (3) i (4) moraju se uzajamno zameniti. Koristeći navedene transformacije između fizičke i proračunske ravni i znajući da su koordinatne linije u transformisanoj ravni konstante, dobijamo vezani sistem jednačina sledećeg oblika:

$$Ax_{\xi\xi}+Bx_{\xi\eta}+Cx_{\eta\eta}=0 \qquad (7)$$

$$Ay_{\xi\xi}+By_{\xi\eta}+Cy_{\eta\eta}=0 \qquad (8)$$

gde su:

$$A=x_\eta^2+y_\eta^2$$

$$B=-2(x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta)$$

$$C=x_\xi^2+y_\xi^2$$

a transformisani granični uslovi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1(\xi, \eta_1) \\ p_2(\xi, \eta_1) \end{bmatrix}; \quad [\xi, \eta_1]\in G^*_1 \qquad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1(\xi, \eta_2) \\ q_2(\xi, \eta_2) \end{bmatrix}; \quad [\xi, \eta_2]\in G^*_2 \qquad (10)$$

Funkcije $p_1(\xi, \eta_1)$, $p_2(\xi, \eta_1)$, $q_1(\xi, \eta_2)$ i $q_2(\xi, \eta_2)$ zadate su sa poznatim oblikom unutrašnje i spoljne granice fizičkog polja. U skladu sa slikom 2 pretpostavimo da se kontura aeroprofila i spoljna granica fizičkog polja transformišu u $\eta$-linije koje formiraju donju i gornju stranicu, a da se proizvoljni presek, koji spaja granice, preslikava na $\xi$-linije koje formiraju levu i desnu stranicu transformisane (proračunske) ravni. Dakle, leva i desna strana proračunske ravni su podudarne u fizičkom polju, pa su i fizičke koordinate x i y jednake duž ovih linija. U proračunskoj ravni se, zatim, formira uniformna mreža $\xi$ i $\eta$ linija, čije je rastojanje konstantno i jednako jedinici. Primenom centralnih razlika, jednačine (7) i (8) u tački (i, j) mogu se aproksimirati po x koordinati u obliku:

$$A(x_{i-1,j}-2x_{i,j}+x_{i+1,j})+B(x_{i-1,j-1}-$$
$$-x_{i-1,j+1}-x_{i+1,j-1}+x_{i+1,j+1})/4+$$
$$+C(x_{i,j-1}-2x_{i,j}+x_{i,j+1})=0 \qquad (11)$$

a po y-koordinati kao:

$$A(y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j})+B(y_{i-1,j-1}-$$
$$-y_{i-1,j+1}-y_{i+1,j-1}+y_{i+1,j+1})/4+$$
$$+C(y_{i,j-1}-2y_{i,j}+y_{i,j+1})=0 \qquad (12)$$

Proračunsko polje ima dimenzije $(J_{max}-2)x(I_{max}-1)$. Granične vrednosti su zadate na linijama $j=1$ (kontura tela) i $j=J_{max}$ (spoljna granica) za $1<i<$ $<I_{max}$. Ulazno-izlazne granice se pojavljuju na $i=1$ i $i=I_{max}$. Pošto su vrednosti x i y koordinata jednake duž ovih linija, iteracija je neophodna samo duž jedne od njih. Za $i=1$ izvodi se mogu, za svako $2<j<J_{max-1}$, definisati na sledeći način:

$$(x_\xi)_{i,j}=(x_{2,j}-x_{I\,max,j})/2 \qquad (13a)$$

$$(x_{\xi\xi})_{i,j}=x_{2,j}-2x_{1,j}+x_{I\,max-1,j} \qquad (13b)$$

$$(x_{\xi\eta})_{i,j}=(x_{2,j+1}-x_{2,j-1}+x_{I\,max-1,j-1}-$$
$$-x_{I\,max-1,j+1})/4 \qquad (13c)$$

Slični izrazi mogu se koristiti i za y-koordinatu. Na samom početku rešavanja sistema jednačina neophodno je odrediti početne vrednosti koordinata. To se može postići, na primer, linearnor interpolacijom tačaka između spoljne i unutrašnje granice ili pretpostavkom da su početne vrednosti jednake nuli.

Diskretizovan sistem (11) i (12) može se sada rešiti po $x_{i,j}$ i $y_{i,j}$ iterativnim putem, koristeći relaksacione metode, kao što su sukcesivna relaksacija po linijama ili tačkama (successive over-relaxation — SOR, potprogram za sukcesivnu relaksaciju po linijama dat je u prilogu) i metodom naizmenične promene smera diferenciranja (altering direction implicit — ADI), sve dok se ne postigne zadati kriterijum konvergencije. Ukoliko sistemu (3) i (4) dodamo prinudne funkcije, dobijamo Poisonov sistem u sledećem obliku:

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}=P(\xi,\eta) \tag{14}$$

$$\eta_{xx}+\eta_{yy}=Q(\xi,\eta) \tag{15}$$

Funkcije $P(\xi,\eta)$ i $Q(\xi,\eta)$ se zadaju, a zavise od prirode problema i željene raspodele tačaka. Primenom istog seta transformacija dobijamo novi skup vezanih jednačina za generiranje proračunskih mreža:

$$Ax_{\xi\xi}+Bx_{\xi\eta}+Cx_{\eta\eta}=-J^2[P(\xi,\eta)x_\xi+ +Q(\xi,\eta)x_\eta] \tag{17}$$

$$Ay_{\xi\xi}+By_{\xi\eta}+Cy_{\eta\eta}=-J^2[P(\xi,\eta)y_\xi+ +Q(\xi,\eta)y_\eta] \tag{16}$$

Eliptičke šeme zasnovane na Laplasovim ili Poisonovim jednačinama naišle su na široku primenu za razne 2-D i 3-D konfiguracije. Na primer, Thompson [2] i Holst [3] kontrolišu kvalitet numeričke mreže pomoću eksponencijalnih prinudnih funkcija sa kontrolnim parametrima. Izbor kontrolnih parametara zavisi od oblika tela. U toku generiranja mreže oko konkretne konfiguracije zahteva se interakcija korisnika, jer ove kontrolne funkcije omogućuju pomeranje koordinatnih linija unutar polja, ali se teško postiže željeno rastojanje i ortogonalnost na granicama i u polju. Ovaj problem je ublažen primenom kontrolnih funkcija (Sorenson [4]) koje omogućuju proizvoljnu kontrolu ugla nagiba $\xi$-koordinatnih linija na unutrašnjoj granici i rastojanje između aeroprofila i $\eta$-koordinatnih linija. Interesantno rešenje ostvarili su Chen i Obaish [5] koji tretiraju kontrolne funkcije $P(\xi,\eta)$ i $Q(\xi,\eta)$ u osnovnim jednačinama kao nepoznate, a zatim postavljaju uslov ortogonalnosti koordinatnih linija u blizini granica da bi odredili izraze za funkcije $P(\xi,\eta)$ i $Q(\xi,\eta)$.

Osnovne karakteristike eliptičnih sistema u generisanju numeričkih mreža su:

1. obezbeđuju jednoznačno preslikavanje između fizičke i proračunske ravni (polja);
2. koordinatne linije su »glatke«, a diskontinuiteti u nagibu koordinatnih linija na granicama se ne prenose u polje;
3. u toku iterativnog postupka generiranja mreže zahteva se memorisanje kompletnih podataka o koordinantama tačaka iz prethodne iteracije, zbog potrebe zadovoljenja kriterijuma konvergencije definisanog zadatom greškom;
4. konvergencija rešenja je spora u slučajevima kada su unutrašnja i spoljanšnja granica na relativno malim rastojanjima (kao što je kod kola kompresora ili turbina).

### *Parabolična šema*

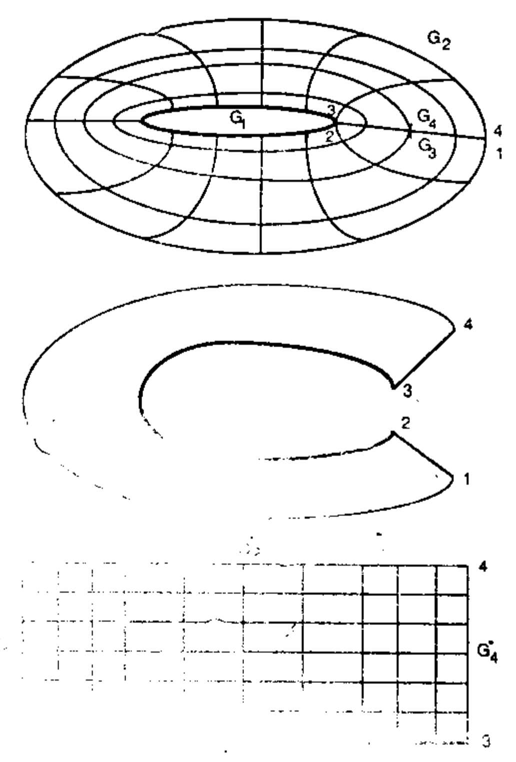
Proračunska mreža može se generirati eksplicitno pomoću paraboličnih diferencijalnih jednačina metodom stepovanja (tzv. »marching« algoritam), počevši od neke unutrašnje granice, koja se pojavljuje kao početni uslov rešenja. Difuzni karakter jednačina ublažuje eventualne neregularnosti u mreži zbog oblika početne granice. Važnost algoritma stepovanja ovde je dvostruka: *(1) u najvećem broju slučajeva potrebno kompjutersko vreme čini samo deo onog potrebnog za generiranje proračunske mreže pomoću eliptične šeme* i *(2) zahtevano čuvanje podataka u toku generiranja mreže je znatno manje u odnosu na eliptičnu šemu.* Polazne jednačine, iz kojih se izvodi sistem neophodan za generiranje proračunskih mreža, imaju sledeći oblik:

$$a(\xi,\eta)x_\eta = b(\xi,\eta)x_{\xi\xi} + c(\xi,\eta)V_x(\xi,\eta) + d(\xi,\eta) \qquad (18)$$

$$a(\xi,\eta)y_\eta = b(\xi,\eta)y_{\xi\xi} + c(\xi,\eta)V_y(\xi,\eta) + d(\xi,\eta) \qquad (19)$$

Ovde su *a, b, c* i *d* konstante ili neke funkcije od $(\xi, \eta)$; $x$ i $y$ su koordinate u fizičkom polju; $\xi$ i $\eta$ koordinate u nuemričkoj ravni, a $V_x$ i $V_y$ veličine koje predstavljaju meru promene x i y koordinata i mogu se aproksimirati primenom linearne ili polinomske interpolacije između unutrašnjih i spoljašnjih granica.

Kod većine transformacija, upotrebljenih u numeričkim analizama, rastojanje između koordinatnih linija $\xi$ i $\eta$ u proračunskoj ravni jednako je jedi-




*Sl. 3 — Princip generiranja »O« tipa proračunske mreže primenom parabolične šeme*

nici. Međutim, ovo ograničenje nije nužno. Pri diskretizaciji jednačina možemo pretpostaviti da je rastojanje između koordinatnih linija u proračunskoj ravni kvaziuniformno. Zatim, primenom Tajlorovog (Taylor) reda za aproksimaciju prvog i drugog izvoda (oznaka na slici 3) i primenom odgovarajućih transformacija između fizičke i proračunske ravni, model jednačine (18) i (19) transformišu se u traženi set jednačina za generiranje proračunske mreže:

$$\alpha x_{i-1,j} + \beta x_{i,j} + \gamma x_{i+1,j} = D_x \qquad (20)$$

$$\alpha y_{i-1,j} + \beta y_{i,j} + \gamma y_{i+1,j} = D_y \qquad (21)$$

gde su:

$$\alpha = \frac{2A}{F_{i-1}(F_i + F_{i-1})}; \gamma = \frac{2A}{F_i(F_i + F_{i-1})}$$

$$\beta = \frac{-2A}{F_i + F_{i-1}}\left(\frac{1}{F_i} + \frac{1}{F_{i-1}}\right) - \frac{2C}{G_j + g_{j-1}}\left(\frac{1}{G_j} + \frac{1}{g_{j-1}}\right)$$

$$D_x = -B(X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1})/[(F_i + F_{i-1})(G_j + g_{j-1})] - \frac{2C}{G_j + g_{j-1}}\left[\frac{x_{i,j-1}}{g_{j-1}} + \frac{X_{i,j+1}}{G_j}\right]$$

$$D_y = -B(Y_{i+1,j+1} - Y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1})/[(F_i + F_{i-1})(G_j + g_{j-1})] - \frac{2C}{G_j + g_{j-1}}\left[\frac{y_{i,j-1}}{g_{j-1}} + \frac{Y_{i,j+1}}{G_j}\right]$$

$$A = x^2_\eta + y^2_\eta$$

$$B = -2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)$$

$$C = x^2_\xi + y^2_\xi$$

$$x_\xi = \frac{x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}}{F_i + F_{i-1}};$$

$$y_\xi = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}}{F_i + F_{i-1}}$$

$$x_\eta = \frac{X_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{F_i + F_{i-1}} \quad \text{ili}$$

$$x_\eta = \frac{XB_{i,I\,max} - x_{i,j-1}}{F_i + F_{i-1}}$$

$$y_\eta = \frac{Y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{G_j + g_{j-1}} \quad \text{ili}$$

$$y_\eta = \frac{YB_{i,j\,max} - y_{i,j-1}}{G_j + g_{j-1}}$$

$$X_{i,j+1} = \frac{XB_{i,j\,max} + x_{i,j-1}}{2};$$

$$Y_{i,j+1} = \frac{YB_{i,j\,max} + y_{i,j-1}}{2}$$

$$G_j = \eta_{max} - \eta_j; \quad g_{j-1} = \eta_j - \eta_{j-1}$$

$$F_i = \xi_{i+1} - \xi_i; \; F_{i-1} = \xi_i - \xi_{i-1}$$

Jednačine (20) i (21) rešavaju se simultano za sve tačke $x_{i,j}$ i $y_{i,j}$ na j-toj liniji proračunske mreže primenom trodijagonalnog algoritma. Rešenje startuje sa $j=2$ (prvoj liniji mreže do unutrašnje granice) i stepuje do $j=J_{max}-1$ (liniji mreže do spoljne granice). Pri tome, koordinate na $j+1$ liniji se uvek zadaju kao aritmetička sredina koordinata na $j=j-1$ i $j=J_{max}$ liniji ili se zamenjuju sa koordinatama na spoljnoj granici, tj. $j=J_{max}$. U oba slučaja nema bitnijih razlika u konačnom rešenju. Na isti način se određuju koeficijenti A, B i C. U paraboličnoj šemi, neuniformno rastojanje tačaka u proračunskoj ravni ima isti efekat kao prinudne funkcije sa kontrolnim parametrima u eliptičnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Parabolična šema je primenjiva i za 2-D i 3-D konfiguracije. Nakamura [6] je primenio parabolične PDJ sa uprošćenim drugim izvodima za generisanje »O« i »H« tipa mreže, Edvards [7] je proširio metod na 3-D probleme u dve koordinate, dok je treća diferencirana pomoću centralnih razlika, a Siladić i Carey [8] su metod generalizovali i primenili za proizvoljne jednokomponentne i višekomponentne konfiguracije na sva tri tipa proračunske mreže.

*Hiperbolična šema*

U primeni ove šeme, numerička mreža se dobija se integracijom hiperboličnih PDJ i zahteva Košijeve (Caushi) granične uslove. Koordinatne linije se dobijaju eksplicitnim diferenciranjem, metodom stepovanja, od početne prema spoljnoj granici. Za ovu šemu koristi se sledeći sistem jednačina:

$$x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta = V(\xi, \eta) \tag{22}$$

$$x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta = 0 \tag{23}$$

$V(\xi, \eta)$ predstavlja matricu transformacije i reprezentuje površinu u fizičkoj ravni za datu jediničnu površinu u proračunskoj ravni. Ako je $V(\xi, \eta)$ dato kao funkcija položaja, tada se jednačina (22) može upotrebiti za kontrolu rastojanja koordinatnih linija u fizičkoj ravni. Jednačina (23) predstavlja meru ortogonalnosti koordinatnih linija u fizičkom polju. Posle linearizacije jednačina (22) i (23) oko poznatog stanja $(\bar{x}, \bar{y})$, dobija se sistem jednačina:

$$[A]r_\xi + [B]r_\eta = f \tag{24}$$

gde su:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} \bar{x}_\eta & \bar{y}_\eta \\ \bar{y}_\eta & -\bar{x}_\eta \end{bmatrix};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{y}_\xi \\ -\bar{y}_\xi & \bar{x}_\xi \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ V + \bar{V} \end{bmatrix}$$

Karakteristične vrednosti $[B]^{-1}$ [A] su pozitivne, tako da ie sistem (24) hiperboličan u $\eta$ smeru i može se primeniti metod stepovanja po $\eta$-koordinati sve dok je $\bar{x}_\xi^2 + \bar{y}_\xi^2 \neq 0$

Pri generisanju proračunskih mreža sa ovom šemom, prvo se pretpostavlja da je površina tela podudarna sa koordinatom $\eta = 0$ i vrši se raspodela tačaka duž samog tela. Zatim se zahteva određivanje veličine $V(\xi, \eta)$ u jednačini (22). Na primer Steger i Sorenson [9] preporučuju da se $V(\xi, \eta)$ odredi polaganjem prave linije iste dužine kao obim tela, a zatim da se na njoj izvrši raspodela tačaka kao i na osnovnom telu, tj. koordinatnoj liniji $\eta=0$. Posle toga, povlači se nova linija, paralelna prvoj, na $\eta=$const. na proizvoljnom rastojanju. Kada se to završi, veličina $V(\xi, \eta)$ se procenjuje kao površina elementarnih polja mreže. Primena hiperbolične šeme za generiranje proračunske mreže oko aeroprofila uspešno je realizovao Steger i Chausse [10], a za 3-D mrežu oko spejs-šatla Kutler [11]. nični, a kod parabolične šeme početni uslov rešenja. U proračunskoj ravni se, zatim, formira mreža $\xi$ i $\eta$ linija, čije je rastojanje za eliptičnu šemu konstantno i jednako jedinici, a za paraboličnu šemu definisano trigonometrijskom *sin* ili *cos* funkcijom. Nakon definisanja proračunske ravni pristupa, se rešenju transformisanih diferencijalnih jednačina, s tim što eliptična šema zahteva korišćenja iterativne relaksacione metode, a parabolična eksplicitni algoritam stepovanja. Svi prezentirani primeri ostvareni su na kompjuteru *CDC 170/ /750 Dual Cyber*, a poređenje proračunske efikasnosti obe šeme dato je u tabeli.

*Tabela*

*Uporedne karakteristike proračunske efikasnosti eliptične i parabolične diferencijalne šeme pri generiranju proračunskih mreža*

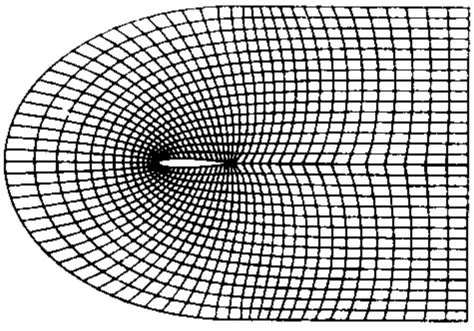
| Eliptična šema NACA 0012 | | $\xi_{xx}+\eta_{xx}=P(\xi,\eta)$ $\xi_{yy}+\eta_{yy}=Q(\xi,\eta)$ | | | | Parabolična šema |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dimenzije mreže | Greška | Broj ITER. | R | ω | CPU (sec) | CPU (sec) |
| 27 × 20 | 0.0001 | 78 | 5 | 1.81 | 11.722 | 0.083 |
| 27 × 20 | 0.0001 | 71 | 4 | 1.81 | 10.708 | 0.088 |
| 27 × 20 | 0.0001 | 68 | 3 | 1.80 | 10.264 | 0.090 |
| 61 × 28 | 0.0001 | 99 | 3 | 1.81 | 48.561 | 0.288 |
| 61 × 28 | 0.001 | 479 | 2 | 1.81 | 239.259 | 0.283 |
| Dvokomponentni aeroprofili NACA 0012 Ugao otklona zakrilca 25° | | | | | | |
| 69 × 20 | 0.0001 | 275 | 4 | 1.80 | 105.702 | 0.340 |
| 69 × 20 | 0.001 | 116 | 5 | 1.81 | 48.301 | 0.342 |

| NACA 0012 — Samo parabolična šema | |
|---|---|
| Dimenzije mreže | CPU (sec) |
| 61 × 28 | 0.252 |
| 80 × 25 | 0.288 |
| 80 × 40 | 0.469 |
| 100 × 40 | 0.571 |
| 120 × 80 | 1.354 |
| 120 × 100 | 1.686 |

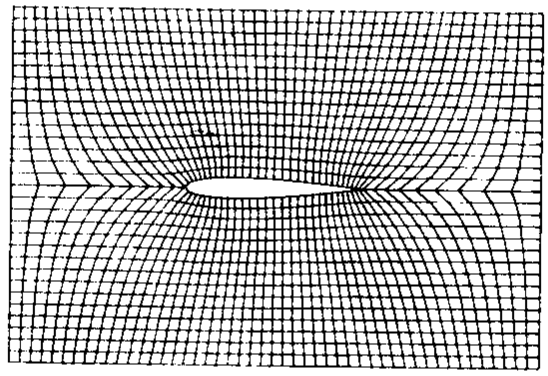
## Primena eliptične i parabolične šeme za aerodinamičke aplikacije

U konkretnim primerima biće demonstrirana upotreba Laplasovih i Poisonovih jednačina za generiranje proračunske mreže oko jednokomponentnih i dvokomponentnih aeroprofila. Kod eliptične šeme, kontura aeroprofila, sa matematičkog aspekta, predstavlja gra-

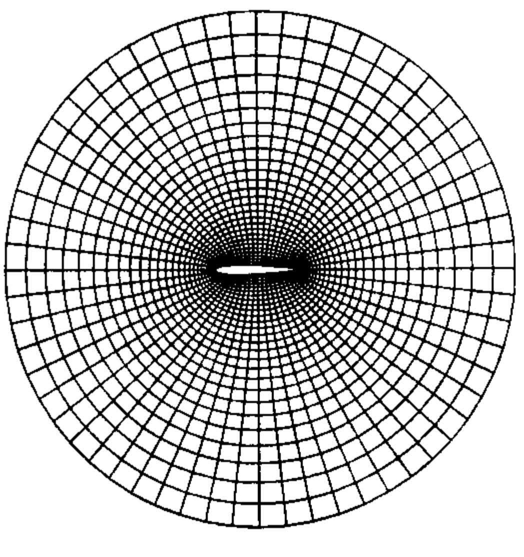
Na slikama 4 i 5 prikazani su »C« i »H« tip proračunske mreže oko jednokomponentnog aeroprofila generirane



*Sl. 4 — »C«-tip proračunske mreže generiran primenom laplasovih jednačina*



*Sl. 5 — »H«-tip proračunske mreže generiran primenom laplasovih jednačina*

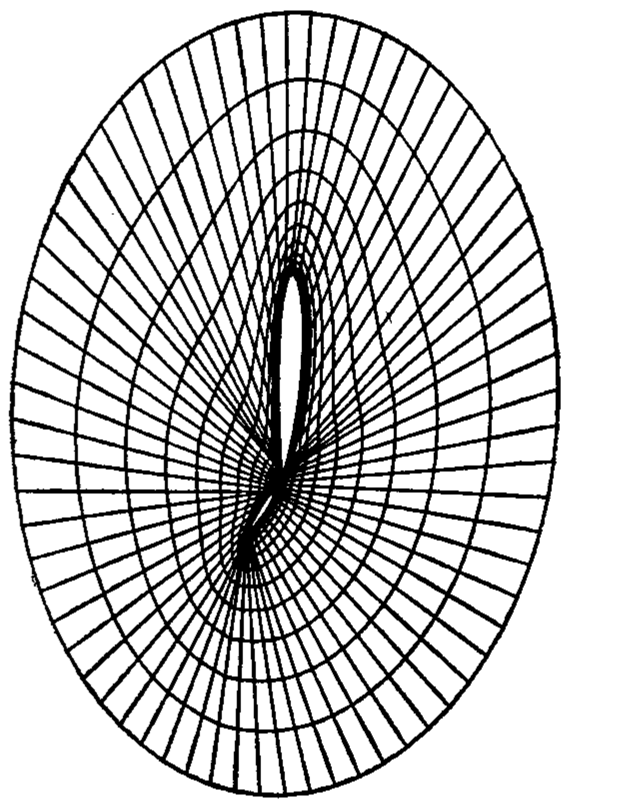


*Sl. 6 — »O«-tip proračunske mreže generiran primenom Poisonovih jednačina*

pomoću Laplasovih jednačina, metodom sukcesivne relaksacije po tačkama. Može se videti da one obezbeđuju dobru glatkoću koordinatnih linija, ali ne obezbeđuju dovoljnu atrakciju u blizini konture aeroprofila. To je nepovoljno pri proračunu viskoznog strujanja, jer se u blizini površine tela dešavaju najveće promene gradijenata.

Slika 6 prikazuje O-tip proračunske mreže oko NACA 0012 aeroprofila generisane pomoću eliptične šeme sa prinudnim funkcijama $P(\xi, \eta)$ i $Q(\xi, \eta)$ eksponencijalnog tipa. Dimenzije mreže su $61 \times 28$, a poluprečnik spoljne granice tri dužine tetive. Atrakcija koordinata primenjena je na prvih pet linija pored konture, napadne i izlazne ivice aeroprofila. Pri konstantnom parametru akceleracije, konvergentno rešenje je postignuto nakon 99 iteracija.

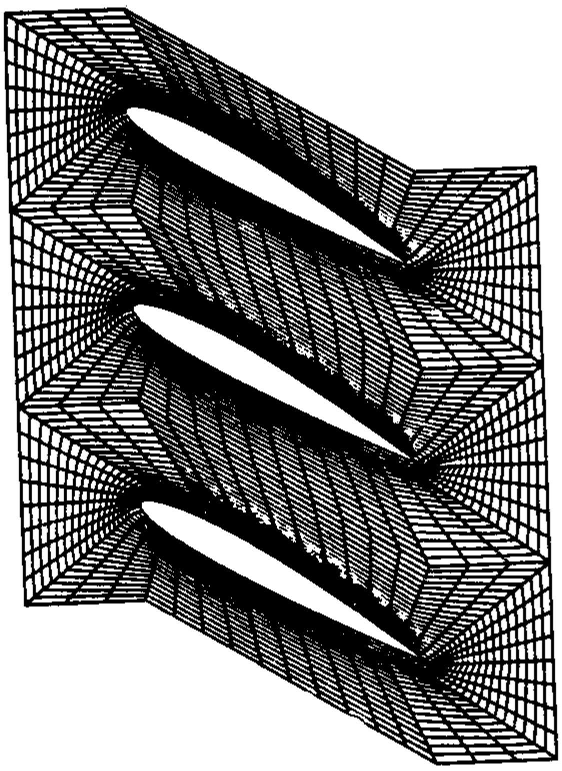
Na slikama 7 i 8 prikazana su dva O-tipa mreže generisane oko dvokomponentnih i kaskade aeroprofila primenom parabolične diferencijalne šeme. U prvom primeru demonstrirana je mo-



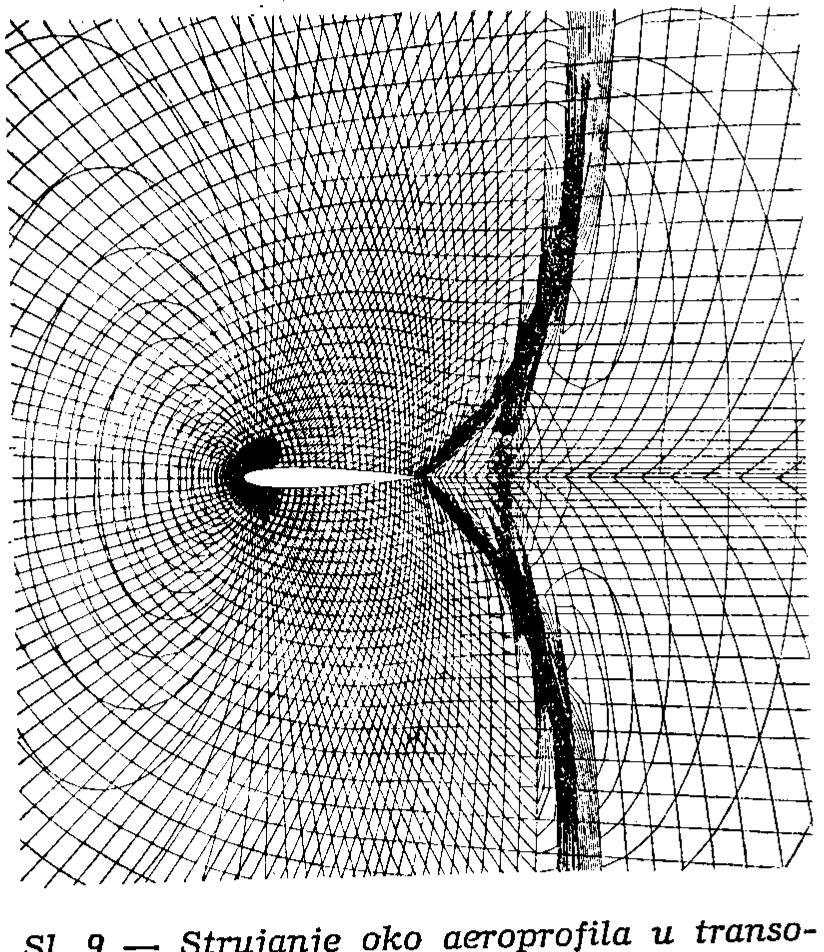
*Sl. 7 — »O«-tip proračunske mreže oko dvokomponentnih aerofila generiran primenom parabolične šeme*

gućnost ove šeme da generira upotrebljivu mrežu oko višekomponentnih aerodinamičkih tela. Dimenzije mreže su

87×30, a potrebno kompjutersko vreme (CPU) za njeno izračunavanje 0.623 s. Drugi primer demonstrira sposobnost parabolične šeme da zadovolji granične uslove na veoma maloj udaljenosti od unutrašnje granice.



*Sl. 8 — »O«-tip pročunske mreže oko kaskade aeroprofila generiran primenom parabolične šeme*



*Sl. 9 — Strujanje oko aeroprofila u transoničnom strujanju dobijeno na »C«-tipu proračunske mreže*

Na slici 9 prikazana je primena C-tipa proračunske mreže u proračunu transoničnog strujanja oko aeroprofila NACA 0012 (pri brzini M=0,92 i napadnom uglu α=0°). Na njoj se jasno vidi formiranje »λ« udarnog talasa na izlaznoj ivici, odnosno potreba i sprega proračunske mreže i rešenja konkretnog aerodinamičkog problema.

## Zaključak

Proračunska mreža, kao krivolinijski sistem vezan za granice tela oko kojeg se vrši proračun strujnog polja, jedna je od najvažnijih elemenata u rešavanju složenih strujanja, naročito vezanih za viskozne efekte i transonični opseg brzina. Ona mora obezbediti uslove za pravilnu aproksimaciju graničnih uslova, koncentraciju koordinatnih linija u oblastima gde se dešavaju najveće promene parametara (na primer u zonama gde se očekuje pojava udarnih talasa ili odvajanje strujnica) i jednoznačno preslikavanje složenog strujnog polja u jednostavniju proračunsku ravan. Ovi zahtevi se uspešno ostvaruju primenom parcijalnih diferencijalnih jednačina, mada one zahtevaju dosta složene transformacije između fizičke i proračunske ravni.

Kroz konkretne primere primene eliptičnih i paraboličnih šema u generiranju mreža pokazana je njihova univerzalna mogućnost aplikacije na jednokomponentnim i višekomponentnim telima, s tim što je parabolična šema, sa proračunskog aspekta, mnogo jednostvnija i brža.

```
      SUBROUTINE LAPLAS (IMAX,JMAX,X,Y,W,ITMAX,EPS)
C**
C**  Potprogram za resavanje Laplasovih jednacina
C**  metodom sukcesivne relaksacije po linijama
C**
C**  IMAX  - broj tacaka na unutrasnjoj granici, ekvivalentan
C**          broju "ETA" linija u proracunskoj ravni
C**  JMAX  - broj tacaka na preseku izmedju spoljne i unutrasnje
C**          granice, ekvivalentan broju "DZETA" linija u
C**          proracunskoj ravni
C**  X i Y - koordinate tacaka proracunske mreze
C**  W     - faktor akceleracije iterativnog resenja (1.5-1.86)
C**  ITMAX - maksimalni broj iteracija (100-300)
C**  EPS   - dozvoljena greska resenja (0.001-0.0001)
C**
      DIMENSION X(120,80), Y(120,80)
      DIMENSION A(120),B(120),C(120),D(120),F(120),G(120)
C**
      JM1= JMAX-1
      IM1= IMAX-1
      IT=0
       EMAX1=0.0
        EMAX2=0.0
C**
 40   IT= IT+1
      DO 10 J= 2,JM1
        DO 20 I= 2,IM1
          DEL1= X(I,J)
          DEL2= Y(I,J)
          XXD= 0.5*(X(I+1,J)-X(I-1,J))
          XED= 0.5*(X(I,J+1)-X(I,J-1))
          YXD= 0.5*(Y(I+1,J)-Y(I-1,J))
          YED= 0.5*(Y(I,J+1)-Y(I,J-1))
          AD= XED**2+YED**2
          BD= XXD*XED+YXD*YED
          GD= XXD**2+YXD**2
          XXED= (X(I+1,J+1)-X(I+1,J-1)-X(I-1,J+1)+X(I-1,J-1))*0.25
          YXED= (Y(I+1,J+1)-Y(I+1,J-1)-Y(I-1,J+1)+Y(I-1,J-1))*0.25
          BD= -2.0*BD
          A(I)= AD
          B(I)= -AD-AD-GD-GD
          C(I)= AD
          F(I)= -BD*XXED-GD*(X(I,J+1)+X(I,J-1))
 20       G(I)= -BD*YXED-GD*(Y(I,J+1)+Y(I,J-1))
C**
      F(2)= F(2)-A(2)*X(1,J)
      G(2)= G(2)-A(2)*Y(1,J)
      F(IM1)= F(IM1)-C(IM1)*Y(IMAX,J)
      G(IM1)= G(IM1)-C(IM1)*Y(IMAX,J)
C**
C** Relaksacija po linijama
      CALL TRID (A,B,C,D,F,2,IM1)
      CALL TRID (A,B,C,D,G,2,IM1)
C**
```

```
C**
      DO 30 I= 2,IM1
         XC= W*(F(I)-X(I,J))
         YC= W*(G(I)-Y(I,J))
         X(I,J)= X(I,J)+XC
         Y(I,J)= Y(I,J)+YC
         EMA1= ABS(DEL1-X(I,J))
         EMA2= ABS(DEL2-Y(I,J))
         IF (EMA1.GT.EMAX1) EMAX1=EMA1
         IF (EMA2.GT.EMAX2) EMAX2=EMA2
 30    CONTINUE
 10    CONTINUE
      IF (EMAX1.LT.EPS.OR.EMAX2.LT.EPS) THEN
        WRITE(*,5) IT
        GO TO 60
          ELSE IF (IT.EQ.ITMAX) THEN
            WRITE(*,25) ITMAX
            RETURN
              ELSE
                GO TO 40
      END IF
C**
 60   CONTINUE
      DO 50 I= 1,IMAX
        WRITE (*,15) (X(I,J),J=1,JMAX)
 50     WRITE (*,15) (Y(I,J),J=1,JMAX)
C**
  5    FORMAT (/5X,'MREZA GENERIRANA POSLE',I4,'ITERACIJA')
 15    FORMAT (10E13.6)
 25    FORMAT (/5X,'MALI BROJ ITERACIJA ITMAX= ',I3)
       RETURN
       END



      SUBROUTINE TRID (A,B,C,X,F,NL,NU)
C**
C** Podprogram za resavanje trodijagonalne matrice
C**
      DIMENSION A(2),B(2),C(2),X(2),F(2)
      X(NL)=C(NL)/B(NL)
      F(NL)=F(NL)/B(NL)
      NLP1= NL+1
      DO 10 J=NLP1,NU
        Z=1.0/(B(J)-A(J)*X(J-1))
        X(J)=C(J)*Z
 10     F(J)=(F(J)-A(J)*F(J-1))*Z
      NUPNL=NU+NL
      DO 20 J1=NLP1,NU
        J=NUPNL-J1
 20     F(J)=F(J)-X(J)*F(J+1)
      RETURN
      END
```

*Literatura:*


[1] J. F. Thompson: Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics, AIAA Journal No. 11, 1984.

[2] J. F. Thompson: Elliptic Grid Generation, in Numerical Grid Generation, edited by J. F. Thompson, North-Holland P. Co., New York 1982.

[3] T. L. Holst: Approximate Factorization Schemes for Solving the Transonic Full Potentional Equation, in »Advances in Computational Transonics«, edited by W. G. Habashi, vol. 4, Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.

[4] R. L. Sorenson: Grid Generation by Elliptic Partial Differential Equations for Three-Element Augmentor Wing Airfoil, in »Numerical Grid Generation«, edited by J. F. Thompson, North-Holland P.Co., New York 1982.

[5] C. J. Chen and K. M. Obaish: Numerical Generation of Nearly Orthogonal Boundary-Fitted Coordinate Systems, in »Advancements in Aerodynamics, Fluid Mechanics and Hydraulics« edited by R. E. A. Arndt, H. G. Stefan, C. Farell and S. M. Peterson, American Society of Civil Engineers, New York, 1986.

[6] S. Nakamura: Marching Grid Generation Using Parabolic Paratial Differential Equations« in »Numerical Grid Generation«, edited by J. F. Thompson, North-Holland P.Co., New York, 1982.

[7] T. A. Edwards: Noniterative Three Dimensional Grid Generation Using Parabolic Partial Differential Equations, AIAA paper 85-0485.

[8] M. F. Siladic and G. F. Carey: Numerical Grid Generation by Partial Differential Equations, The Texas Institute for Computational Mechanics Report 87-3, The University of Texas at Austin, 1987.

[9] J. L. Steger and R. I. Sorenson: Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates, NASA CP-22166, 1980.

[10] J. L. Steger and D. S. Chaussee: Generation of Body Fitted Coordinates Using Hyperbolic Partial Differential Equations, SIAM Journal os Scientific and Statistical Computing, vol. 1, No. 3, 1980.

[11] P. Kutler: A Perspective of Theoretical and Applied Computational Fluid Dynamics, AIAA Journal, No. 3, 1985.