ODREĐIVANJE OPTIMALNOG PERIODA KOMBINOVANE PREVENTIVNE ZAMENE

Izvršena je analiza postojećih matematičkih modela za određivanje minimalnih ukupnih troškova korektivnih zame-
na i preventivnih zamena elementa posle određenog vreme-
na rada. Za dati primer elementa, čija funkcija raspodele
vremena do pojave otkaza podleže Vejbulovoj raspodeli,
korišćenjem analiziranih modela, određeno je optimalno vre-
me između preventivnih zamena. Rešavanjem istog primera,
korišćenjem programskog paketa MathCAD, pokazano je da
se rezultati dobijaju znatno jednostavnije i brže. Istaknuti
su i značaj i prednosti primene matematički orijentisanog ko-
risničkog softvera u oblasti inženjerstva održavanja tehnič-
kih sistema.

1. Uvod

Jedna od osnovnih mogućnosti za povećanje pouzdanosti tehničkih siste-
ma u procesu eksploatacije je racional-
na organizacija preventivnog održava-
nja. Kako se i kod najsavremenijih teh-
ničkih sistema ne može izbeći korišće-
nje nekog elementa ili dela koji ima
znatno kraći radni vek od ostalih delo-
va sistema, neophodno je kroz preven-
tivno održavanje planirati i sprovesti
njegovu zamenu u određenim vremen-
skim razmacima, kako taj deo ne bi do-
minantno uticao (praktično određivao)
srednje vreme između otkaza sistema,
čime bi bile degradirane ukupne per-
formanse sistema.

Kada se menja trajanje perioda iz-
među preventivnih zamena, menjaju se
i ukupni troškovi a time i rentabilnost
sistema u eksploataciji. Teži se da taj
period bude tako izabran da ukupni
troškovi budu minimalni. U domaćoj i
stranoj literaturi je poslednjih 20—25
godina definisan i ispitan veći broj ma-
tematičkih modela i postupaka za do-
bijanje najpovoljnijeg (optimalnog) pe-
rioda preventivne zamene elemenata
kod kojih se, usled trošenja ili starenja
u toku rada, intenzitet otkaza znatno
poveća.

U ovom radu, u drugom poglavlju
izvršena je analiza postojećih matema-
tičkih modela za određivanje ukupnih

troškova preventivne zamene po jedi-
nici vremena. Na osnovu te analize de-
finisani su postupci za dobijanje opti-
malnog perioda preventivne zamene
pri čemu su kao kriterijum optimizacije
uzeti minimalni ukupni troškovi zame-
na usled otkaza i preventivnih zamena.
Analiziran je i aproksimativni matema-
tički model čijim se korišćenjem brzo
i jednostavno dobijaju približne vred-
nosti optimalnog perioda preventivne
zamene i odgovarajućih minimalnih u-
kupnih troškova.

U trećem poglavlju, na primeru ko-
ji je već tretiran u literaturi [1], pri-
kazano je praktično korišćenje mate-
matičkih modela i postupaka analizira-
nih u prethodnom poglavlju. Pri tome
je korišćen programski paket MathCAD
za Windows operativni sistem na PC
računarima. Upotreba korisničkog soft-
vera kao alata za rešavanje konkretnih
problema u odnosu na pisanje posebnog
programa za izračunavanje vrednosti
funkcija u pojedinim tačkama (pri čemu
je potrebno ispisati znatno veći broj
instrukcija i naknadno vršiti analizu
dobijenih rezultata) ima velike predno-
sti. Lakše i preglednije se unose podaci,
postoji mogućnost gotovo trenutnog
grafičkog prikazivanja definisanih fun-
kcija, olakšano je manipulisanje dato-
tekama i štampanje dokumenata.

Kako su matematički modeli pre-
ventivnog održavanja u literaturi defi-

nisani i opisani preko različitih veličina i korišćenjem različitih oznaka i u slučajevima kada se radi o potpuno istim modelima, najpre se daje pregled oznaka korišćenih u ovom radu.

Korišćene oznake:

$f(t)$	— gustina raspodele vremena do pojave otkaza
$F(t)$	— funkcija raspodele vremena do pojave otkaza
$R(t)$	— pouzdanost elementa, verovatnoća da će raditi bez otkaza do trenutka t
$\lambda(t)$	— trenutna vrednost intenziteta otkaza
β, η	— parametri (oblika i razmere) Vejbulove raspodele
K_β	— vrednost Γ funkcije, $\Gamma(1+1/\beta)$
m	— srednje vreme između otkaza kada se ne vrši preventivna zamena
m_k	— srednje vreme između obnavljanja kada se vrši kombinovana preventivna zamena
T	— vreme nakon koga se vrši preventivna zamena
T_k, T_{ak}	— optimalne vrednosti vremena nakon koga se vrši preventivna zamena
$L(T)$	— funkcija intenziteta otkaza koji sadrži optimalno rešenje
C_k, C_p	— troškovi korektivne i planske zamene
C_0	— ukupni troškovi po jedinici vremena kada se ne vrši preventivna zamena
C_{zk}, C_{ak}	— ukupni troškovi zamena po jedinici vremena
C_{rk}, C_{ar}	— relativne vrednosti ukupnih troškova u odnosu na C_0

2. Analiza modela za određivanje optimalnog perioda kombinovane preventivne zamene

Za sistem koji sadrži element čiji je radni vek, zbog stalnog porasta intenziteta otkaza, znatno kraći od radnog veka sistema, na početku rada ($t=0$) planira se vreme T posle koga se taj element zamenjuje, pri čemu ukupne troškove C_p čine troškovi zamene i cena rezervnog elementa. U slučaju da element otkaze pre isteka vremena T (pretpostavlja se da je indikacija otkaza trenutna), on se zamenjuje, čime se postiže potpuno obnavljanje sistema (stanje kao u $t=0$). Datum sledeće zamene preplanira se tako da bude po isteku vremena T i taj se proces, na isti način, nastavlja dalje. Ukupne troškove korektivne zamene C_k čine troškovi zamene, cena rezervnog elementa i gubici zbog prekida rada sistema, pošto se u slučaju zamene usled otkaza ne može birati da se ona izvrši u vreme kada se sistem ne koristi. Na taj način je $C_k > C_p$.

Zbog toga što se vreme sledeće preventivne zamene određuje od trenutka bilo planirane, bilo korektivne zamene, ova strategija se naziva kombinovana preventivna zamena. Vremena između zamena čine pozitivne, međusobno nezavisne slučajne veličine, koje podležu istoj raspodeli.

Srednje vreme između otkaza kada nema preventivne zamene je:

$$m = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = - \int_0^{\infty} t \cdot \frac{dR(t)}{dt} \cdot dt = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (1)$$

dok u slučaju kombinovane preventivne zamene ono iznosi:

$$m_k = \int_0^T R(t) dt \quad (2)$$

Pri kombinovanoj zameni vrše se, znači, dve vrste zamene: sa verovatno-

ćom da će sistem otkazati $F(T)$ uz troškove C_k i sa verovatnoćom da sistem neće otkazati sa verovatnoćom $R(T)$ uz troškove C_p , tako da srednji troškovi po jedinici vremena iznose:

$$C_{zk}(T) = \frac{C_k \cdot F(T) + C_p \cdot R(T)}{m_k} \quad (3)$$

ili posle zamene $F(T) = 1 - R(T)$:

$$C_{zk}(T) = \frac{C_k - (C_k - C_p)R(T)}{m_k} \quad (4)$$

Za opisani proces preventivne zamene u [1] je, pod nazivom model Vajsbauuma, dat izraz:

$$T_u(t) = \frac{K_1 - (K_1 - K_2)R(t)}{\int_0^T R(t)dt} \quad (5)$$

gde je:

$R(t)$ — verovatnoća da će element biti ispravan do trenutka t (zakon pouzdanosti elementa)

K_1 — troškovi naknadne zamene

K_2 — troškovi preventivne zamene

$T_u(t)$ — ukupni troškovi održavanja, svedeni na čas rada.

Samo zamenom oznaka oznakama koje se koriste u ovom radu dobija se izraz (4). U [2] je za isti proces dat izraz:

$$C(t) = \frac{C_1 \cdot F(t) + C_2 \cdot \bar{F}(t)}{\int_0^T \bar{F}(x)dx} \quad (6)$$

Imajući u vidu da je $F(t) = 1 - \bar{F}(t)$, izraz (6) sa oznakama koje se koriste u ovom radu ($C_1 = C_k$, $C_2 = C_p$) postaje isti kao izraz (3).

Model kombinovane preventivne zamene je u [3] dat u obliku:

$$C(\Theta) = \frac{p + [1 - R(\Theta)]P}{m_\Theta} \quad (7)$$

gde su:

p — troškovi zamene elementa

P — gubici zbog toga što sistem, usled otkaza, ne radi

Na taj način je $P = C_k - C_p$ i $p + P = C_k$, tako da je izraz (7) isti kao izraz (4).

Kombinovana preventivna zamena se u [4] ne analizira, ali je definisana preko izraza:

$$C_T(T_p) = C_e \cdot t \cdot \lambda_e \cdot T_p + C_p \cdot t \cdot \lambda_p \cdot T_p \quad (8)$$

gde je:

$$\lambda_e \cdot T_p = \frac{1 - R(T_p)}{\int_0^{T_p} R(\tau)d\tau} \quad \text{i} \quad \lambda_p T_p = \frac{R(T_p)}{\int_0^{T_p} R(\tau)d\tau}$$

tako da se zamenom $C_e = C_k$ i $C_t(T_p)/t = C_{zk}$ lako može svesti na izraz (3) odnosno (4).

Minimum funkcije zavisnosti troškova C_{zk} od vremena T dobija se iz uslova:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{zk}(T)}{dT} &= 0 \\ &= \frac{-(C_k - C_p) \frac{dR(T)}{dT}}{m_k^2} \cdot m_k - \\ &= \frac{\frac{dm_k}{dT} [C_k - (C_k - C_p)R(T)]}{m_k^2} = 0 \end{aligned}$$

pošto je:

$$\frac{dm_k}{dT} = R(T)$$

može se napisati:

$$\begin{aligned} (C_k - C_p) \frac{dR(T)}{dT} \cdot m_k + R(T) [C_k - (C_k - \\ - C_p) \cdot R(T)] &= 0 \end{aligned}$$

Ako se poslednji izraz napiše u obliku:

$$(C_k - C_p) \frac{\frac{dR(T)}{dT}}{R(T)} \cdot m_k + C_k - (C_k - C_p) R(T) = 0$$

a imajući u vidu da je:

$$\frac{\frac{dR(T)}{dT}}{R(T)} = -\lambda(T)$$

dobija se uslov optimuma:

$$\lambda(T)m_k + R(T) = \frac{C_k}{C_k - C_p} \quad (9)$$

Isti uslov se daje u [2] u obliku:

$$\lambda(T) \cdot m_k - F(T) = \frac{C_p}{C_k - C_p} \quad (10)$$

Vrednost T koja zadovoljava uslov (9) odnosno (10) je optimalna vrednost vremena kombinovane preventivne zamene T_k pri kojoj troškovi po jedinici vremena imaju minimalnu vrednost. Koliko ti minimalni troškovi iznose dobiće se ako se vrednost m_k iz izraza (9) zameni u (3).

$$m_k = \frac{C_k}{\lambda(T)(C_k - C_p)} - \frac{R(T)}{\lambda(T)}$$

$$C_{zk}(T_k) = \frac{[C_k - (C_k - C_p)R(T_k)] \cdot \lambda(T_k)(C_k - C_p)}{C_k - (C_k - C_p)R(T_k)}$$

odakle je:

$$C_{zk}(T_k) = \lambda(T_k) \cdot (C_k - C_p) \quad (11)$$

Na osnovu izvedenih izraza može se zaključiti da se optimalna vrednost perioda kombinovane preventivne zamene nalazi na preseku krive definisane izrazom (3) i krive:

$$L(T) = \lambda(T) \cdot (C_k - C_p) \quad (12)$$

pošto je tačka sa koordinatama T_k , $C_{zk}(T_k)$ zajednička za obe krive. To se

može iskoristiti za grafičko određivanje optimalnog vremena T_k .

Kada se zamena elementa vrši samo u slučaju njegovog otkaza, tj. nema preventivne zamene, srednje vreme do otkaza dato je izrazom (1) a ukupni troškovi za to vreme iznose C_k , tako da srednji troškovi po jedinici vremena iznose:

$$C_0 = \frac{C_k}{m} \quad (13)$$

Relativni iznos troškova (normirani troškovi) kombinovane preventivne zamene u odnosu na slučaj kada nema preventivne zamene je:

$$C_{rk} = \frac{C_{zk}}{C_0} \quad (14)$$

odakle se zamenom iz (3) i (13) dobija:

$$C_{rk} = \frac{m[C_k - (C_k - C_p)R(T)]}{m_k \cdot C_k} = \frac{m}{m_k} \left[1 - \left(1 - \frac{C_p}{C_k} R(T) \right) \right] \quad (15)$$

Iz izraza (15) se vidi da je $C_{rk}(0) = \infty$ i da $C_{rk} \rightarrow 1$ kada $T \rightarrow \infty$

Svi prethodno izvedeni izrazi važe za bilo koju raspodelu vremena do po-

jave otkaza. Unošenjem parametara određene raspodele u te izraze dobijaju se konkretni izrazi za slučaj te raspodele. Najčešće se koristi Vejbulova raspodela kod koje za $\beta > 1$ intenzitet otkaza neprekidno raste. U literaturi se, međutim, ova raspodela ne daje uvek preko istih parametara, pa su u tabeli 1 date karakteristike pouzdanosti elemenata za tri slučaja prikazivanja Vejbulove raspodele koji se najčešće javljaju.

Tabela 1

Karakteristike pouzdanosti elementa za slučaj Weibulove raspodele vremena do pojave otkaza

$f(t)$	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$	$\frac{\beta}{\alpha} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^\beta}{\alpha}}$	$\beta a t^{\beta-1} e^{-a t^\beta}$
$F(t)$	$1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$	$1 - e^{-\frac{t^\beta}{\alpha}}$	$1 - e^{-a t^\beta}$
$R(t)$	$e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$	$e^{-\frac{t^\beta}{\alpha}}$	$e^{-a t^\beta}$
$\lambda(t)$	$\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$	$\frac{\beta}{\alpha} t^{\beta-1}$	$\beta a t^{\beta-1}$
$m = \int_0^\infty R(t) dt$	$\eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\alpha^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\alpha^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$
veza između parametara	$\eta = \alpha^{\frac{1}{\beta}} = a^{-\frac{1}{\beta}}$	$\alpha = \eta^\beta = a^{-1}$	$a = \eta^{-\beta} = \alpha^{-1}$

U slučaju Weibulove raspodele, kao što se iz tabele 1 vidi, izraz (1) postaje:

$$m = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta} dt = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = K_\beta \cdot \eta \quad (16)$$

Izrazi (3) i (4) za Weibulovu raspodelu postaju:

$$C_{zk}(T) = \frac{C_k - (C_k - C_p) e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta}}{\int_0^T R(\tau) d\tau} \quad (17)$$

Uslov optimalnosti kombinovane preventivne zamene (9) u slučaju Weibulove raspodele glasi:

$$\frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{T}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot m_k + e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta} = \frac{C_k}{C_k - C_p} \quad (18)$$

Normirani troškovi kombinovane preventivne zamene (15) za Weibulovu raspodelu dati su izrazom:

$$C_{rk}(T) = \frac{K_\beta \cdot \eta}{m_k} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{C_p}{C_k}\right) e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta} \right] \quad (19)$$

Sl. 1 — Zavisnost ukupnih troškova zamena po jedinici vremena pri različitim odnosima $\frac{C_p}{C_k}$ za $\beta=4$

Krive zavisnosti troškova C_{rk} od odnosa T/η za $\beta=4$, sračunate preko izraza (19), prikazane su na slici 1 u slučaju kada odnos planske i korektivne zamene iznosi 0,1,0,2,0,5 i 0,9. Sa slike se vidi da je optimalno vreme preventivne zamene utoliko kraće ukoliko je odnos troškova C_p sa C_k manji. Iste zavisnosti samo pri $\beta=2$ date su na slici 2, sa koje se vidi da je efekat preventivne zamene znatno manji nego u prethodnom slučaju.

U slučaju eksponencijalne raspodele ($\beta=1$), na osnovu (12) može se napisati da je:

$$C_{zk}(T) = \frac{C_k - (C_k - C_p)e^{-\frac{T}{\eta}}}{\eta \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\eta}}\right)} \quad (20)$$

a na osnovu (19):

Sl. 2 — Zavisnost ukupnih troškova zamena po jedinici vremena pri razlicitim odnosima $\frac{C_p}{C_k}$ za $\beta=2$

$$C_{rk}(T) = \frac{1 - \left(1 - \frac{C_p}{C_k}\right) e^{-\frac{T}{\eta}}}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\eta}}\right)} \quad (21)$$

Krive na slici 3 dobijene su korišćenjem izraza (21) i sve se nalaze iznad ordinate jednake jedinici, što znači da se preventivna zamena u slučaju eksponencijalne zamene ne isplati. Optimalna strategija u tom slučaju je da se zamena vrši samo posle otkaza, pošto je jeftinije da se preventivna zamena ne vrši, već da se čeka da sistem otkaze.

Sl. 3 — Zavisnost ukupnih troškova zamena po jedinici vremena pri razlicitim odnosima $\frac{C_p}{C_k}$ za $\beta=1$

U [1] je dat još jedan postupak određivanja optimalnog perioda preventivne zamene elementa kod koga je vre-

me do pojave otkaza raspoređeno po Vejbulovoj raspodeli (model Jorgenso-
na):

$$t = \eta \cdot y^{\frac{1}{\beta}}$$

gde se »y« određuje iz dijagrama na kojem je dato u zavisnosti od odnosa troškova C_k i C_p , za razne vrednosti parametra oblika. Izračunavanje veličine »y« nije jednostavno, ali korišćenje dijagrama omogućava brzo određivanje optimalnog vremena preventivne zamene.

2.1 Aproksimativni model za određivanje optimalnog perioda kombinovane preventivne zamene

Aproksimativni model koji je predložen u [5] ovde je detaljno izveden.

Ukupni troškovi po jedinici vremena kada se vrši kombinovana preventivna zamena elemenata čiji intenzitet otkaza podleže Vejbulovoj raspodeli su.

$$C_{zk}(T) = \frac{C_k - (C_k - C_p)e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta}}{m_k}$$

Kada se funkcija $e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta}$ razvije u red i zanemare se svi članovi iza linearnog, dobijaju se približni izrazi:

$$e^{-\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta} \approx 1 - \left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta \quad \text{i} \quad m_k \approx T$$

Zamenom prethodnih izraza u (17) dobija se:

$$C_{zk}(T) \approx C_{ak}(T) = \frac{(C_k - C_p) \left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta + C_p}{T} \quad (23)$$

Minimum funkcije zavisnosti troškova C_{ak} od vremena dobija se iz uslova:

$$\frac{dC_{ak}(T)}{dT} = \frac{\left[\beta \cdot (C_k - C_p) \frac{T^{\beta-1}}{\eta \cdot \beta} \right]}{T^2} \cdot T -$$

$$\frac{\left[(C_k - C_p) \left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta + C_p \right]}{T^2} = 0$$

$$\beta(C_k - C_p) \left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta - (C_k - C_p) \left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta - C_p = 0$$

odakle se dobija da je:

$$\left(\frac{T}{\eta}\right)^\beta = \frac{C_p}{(\beta - 1)(C_k - C_p)} \quad (24)$$

tako da je vreme pri kome su ukupni troškovi po jedinici vremena minimalni T_{ak} , dato izrazom:

$$T_{ak} = \eta \cdot \left[\frac{C_p}{(\beta - 1)(C_k - C_p)} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (25)$$

Minimalni ukupni troškovi dobijaju se kada se vrednost za T_{ak} (25) uнесе u (23):

$$C_{ak}(T_{ak}) = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{C_p}{T_{ak}} \quad (26)$$

Zamenom troškova C_p iz (24) u (26) dobija se:

$$C_{ak}(T_{ak}) = \beta \cdot \frac{T_{ak}^{(\beta-1)}}{\eta^\beta} \cdot (C_k - C_p) \quad (27)$$

Na osnovu izraza za intenzitet otkaza iz tabele 1 može se napisati:

$$C_{ak}(T_{ak}) = (C_k - C_p) \cdot \lambda(T_{ak}) \quad (28)$$

što u potpunosti odgovara izrazu (11) tako da se i optimalna vrednost vremena T_{ak} nalazi, kao i T_k , na krivoj (12):

Upoređivanjem izraza za optimalno vreme kombinovane preventivne zamene (25) i modela Jorgensona (22) može se napisati [6] da je:

$$y \approx \frac{C_p}{(\beta - 1)(C_k - C_p)} \quad (29)$$

Korišćenjem jednostavnog izraza (29) izračunate su vrednosti veličine »y« za iste vrednosti parametara oblika Vejbulove raspodele kao na dijagramu datom u [1]. Sa slike 4 vidi se da je aproksimacija utoliko bolja ukoliko je veća vrednost parametra oblika i ukoliko su troškovi planske zamene C_p manji u odnosu na troškove korektivne zamene C_k . Razilaženje krivih sračunatih korišćenjem izraza (29) od krivih sa tač-

Sl. 4 — Odstupanja aproksimativnog modela od modela Jorgensona u zavisnosti od odnosa $\frac{C_k}{C_p} - 1$ pri različitim vrednostima parametra β

nim vrednostima »y« je relativno malo u oblasti gde je $y < 1$ i gde je $\beta > 1.5$. Takođe, kada je vrednost parametra $\beta > 3$ aproksimativni model, kao što se vidi sa slike 4, može se koristiti i kada C_p nije znatno manje od C_k , i obrnuto, ako je C_p znatno manje od C_k , aproksimativni model se može uspešno koristiti pri vrednostima parametra $\beta < 1.5$.

3. Brojčani primeri i korišćenje programskog paketa MathCAD

U [1] je analiziran problem preventivne zamene frikcionih diskova spojnice traktora. Uzeto je da intenzitet otkaza ovog elementa podleže Vejbulo-

Sl. 5 — Određivanje optimalnog perioda preventivne zamene za dati brojčani primer

voj raspodeli sa parametrima $\beta = 4$ i $\eta = 2000$. Troškove planske preventivne zamene C_p čine troškovi zamene u iznosu 100 novčanih jedinica i cena re-

zervnog dela u iznosu od 1000 novčanih jedinica, tako da je $C_p = 1100$. Troškove korektivne zamene (zamene posle otkaza elementa) C_k čine troškovi zamene u iznosu od 500 novčanih jedinica, cena rezervnog dela 1000 nov. jedinica i gubici usled zastoja u radu u iznosu od 5000 nov. jedinica, tako da je $C_k = 6500$.

Na slici 5 prikazani su ukupni troškovi kombinovane preventivne zamene po jedinici vremena u zavisnosti od perioda preventivne zamene T , kao i kriva $L(T)$ sračunata korišćenjem izraza (12). Tačke krive $C_{zk}(T)$ sračunate su korišćenjem izraza (17).

Kao što se sa slike 5 vidi, za date brojčane vrednosti krive $C_{zk}(T)$ i $L(T)$ seku se u tački sa koordinatama $A(T=1020, C_{zk}=1.43)$ što znači da je optimalno vreme preventivne zamene $T_k = 1020$ h i da tada ukupni troškovi po jedinici vremena imaju minimalnu vrednost koja iznosi $C_{zk} = 1.43$.

Na osnovu izraza (25) za dati primer dobija se:

$$T_{ak} = 2000 \cdot \left[\frac{1100}{(4-1)(6500-1100)} \right]^{0,25}$$

$$T_{ak} = 1021 \text{ h}$$

a ukupni troškovi po jedinici vremena u tom slučaju iznose (26) $C_{ak} = 1.436587$.

To su vrednosti veoma bliske vrednostima dobijenim u [1] za model Vajsbauera ($T = 1050$ h) i model Jorgensona ($T = 1028$ h). Za model Jorgensona sa dijagrama datog u [1] dobijeno je za dati primer $y = 0.07$, dok se na osnovu (29) dobija da je $y = 0.0679$.

Tačne vrednosti optimalnog perioda kombinovane preventivne zamene $T_k = 1022.66$ h i odgovarajuće minimalne vrednosti ukupnih troškova po jedinici vremena $C_{zk} = 1.443904$ nov. jedinica dobijene su iterativnim postupkom korišćenjem izraza (12) i (17) sve dok apscisa tačke preseka nije dobijena sa tačnošću 0.01 h. To je relativ-

no dugotrajan postupak sa velikim brojem izračunavanja, ali je sproveden da bi se u odnosu na tu tačnu vrednost optimalnog vremena preventivne zamene izračunala odstupanja vrednosti dobijenih drugim postupcima.

Zbog sve veće rasprostranjenosti PC računara opremljenih veoma kvalitetnim korisničkim softverom, pisanje posebnih programa za rešavanje svakog konkretnog problema uveliko potiskuje upotreba gotovih korisničkih programskih paketa. Na isti način i iz istih razloga kao što se za projektovanje i konstruisanje u svim oblastima tehnike (mašinstvo, građevinarstvo i dr.) masovno uvodi upotreba programskog paketa AutoCAD, za rešavanja numeričkih problema, razna izračunavanja, grafičku prezentaciju i obradu teksta uvodi se matematički orijentisani korisnički softver (Eureka, MathCAD, Mathematica i dr.) sa sve širim repertoarom mogućih primena zbog sve većeg broja ugrađenih funkcija i većim mogućnostima grafičkog prikazivanja.

Postojanje gotovih programskih paketa oslobađa stručnjacima dosta vremena da se bave svojom osnovnom oblašću i da istovremeno za rešavanje problema sa kojima se sreću imaju na raspolaganju alat vrhunskih performansi, kao posledicu velike konkurencije na tržištu softvera, zbog čega specijalizovane firme okupljaju vrhunske stručnjake iz oblasti programiranja.

Zbog veoma brzog razvoja oblasti inženjerskog održavanja tehničkih sistema, intenzivne implantacije novih metoda i postupaka (koji su rezultat toga razvoja) u aktivnosti održavanja u praksi i potrebe za numeričkom obradom velikog broja podataka i grafičkog prikazivanja dobijenih rezultata, upotreba matematički orijentisanog softvera je od posebnog značaja za ovu oblast.

Programski paket MathCAD, verzija koja radi u okviru Windows operativnog sistema, ima veoma bogat HELP meni tako da predstavlja tipičan »user-friendly« program. U ovom radu je korišćen i zbog toga što za relativno skromni hardver ima velike mogućnosti:

Računarske karakteristike:

- preciznost računanja: 15 sigurnih decimalnih cifara (mogućnost izbora broja prikazanih decimalnih cifara),

- računanje sa dimenzionim jednačinama,

- programsko rešavanje sistema jednačina i nejednačina (sa početnim slovima i bez njih),

- računanje izvoda i integrala funkcija (simbolički i numerički),

- račun sa kompleksnim promenljivim, kao i sa kompleksnim brojevima,

- računanje suma, proizvoda, iterativni račun,

- tretman brojeva u decimalnom, oktalnom i heksadecimalnom sistemu,

- mnoštvo ugrađenih funkcija (trigonometrijske, eksponencijalne, hiperboličke),

- statističke funkcije (linearna regresija, Gama funkcija, funkcija kumulativne normalne raspodele, funkcija greške),

- interpolacija,

- brza Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija,

- mogućnost definisanja funkcija od strane korisnika,

- račun sa vektorima i matricama uključujući:

1. množenje vektora i matrica,
2. inverziju matrica,
3. transportovanje vektora i matrica,
4. računanje determinante matrica,

5. računanje vektorskog i skalarnog proizvoda, itd, i to i simbolički i numerički.

Grafičke karakteristike:

- praktično neograničen broj grafika po jednom dokumentu,

- kreiranje inicijalnog grafika jednom jedinom komandom,

- u okviru grafika moguće je postaviti dekadnu i logaritamsku podelu osa, horizontalnu i vertikalnu mrežu, kao i niz različitih diskretnih brojeva i linija.

Specifičnosti MathCAD-a:

- potpuno proizvoljno pozicioniranje matematičkih formula, teksta i grafika u okviru dokument fajla,

- veoma lak unos matematičkih simbola,

- automatska detekcija grešaka,
- mogućnost editovanja dva fajla istovremeno,

- editovanje jednačina i teksta.

Na osnovu izraza izvedenih u prethodnom poglavlju, korišćenjem programa MathCAD, na dva načina su određene optimalne vrednosti perioda kombinovane preventivne zamene i odgovarajuće vrednosti ukupnih troškova zamena po jedinici vremena. Prvo rešenje je dobijeno izjednačavanjem izraza (17) sa nulom, a drugo kao presek krivih datih izrazima (12) i (17).

Na slici 6 prikazan je izgled MathCAD ekrana u prvom slučaju. Najpre su definisane sve veličine koje figurišu u izrazu (17), a zatim je unet i sam izraz. Od programa se zahteva da pomoću ROOT funkcije pronađe onu vrednost optimalnog perioda preventivne zamene za koju se prvi izvod funkcije troškova anulira, i da joj se dodeli simbol Top. Funkciju ROOT program izvršava preko niza uzastopnih iteracija, s tim što se prethodno definiše neka vrednost T od koje program počinje sa iteracijama.

Sl. 6 — Izgled MathCAD I ekrana

Kako brzina rešavanja zavisi od toga koliko se početna data vrednost za T razlikuje od tačne vrednosti, programu se zadaje da T izračuna iz izraza koji daje aproksimativnu vrednost optimalnog perioda kombinovane preventivne zamene (25). Na taj način program prvo kroz izraz (25) definiše vrednost T od koje zatim funkcija ROOT počinje sa iteracijama tražeći u okolini te tačke vrednost Top za koju izvod funkcije ukupnih troškova postaje jednak nuli. Treba uočiti da iza svih vrednosti i izraza koje definiše korisnik stoji znak $:=$, a iza vrednosti koje je program (na osnovu tako unetih izraza i vrednosti) izračunao stoji znak $=$. Kako u okviru programa postoji mogućnost da se definiše broj decimalnih mesta odnosno tačnost sa kojom će program izračunavati tražene vrednosti,

ovde je radi ilustracije traženo od programa da tražene vrednosti izračuna sa deset decimalnih mesta.

Na slici 7 prikazan je izgled MathCAD ekrana u drugom slučaju, odnosno izračunavanje optimalnog perioda kombinovane preventivne zamene korišćenjem izraza (12) i (17). U ovom slučaju korišćen je skup tzv. SOLVE BLOCK naredbi koje su u okviru programa definisane za simultano rešavanje jednačina ili nejednačina po zadatim promenljivim na osnovu zadatih početnih uslova. SOLVE BLOCK započinje rečju »given« a sadržaj bloka su jednačine ili nejednačine čija se zajednička rešenja traže, zajedno sa ograničenjima i početnim uslovima. Blok se završava jednačinom FIND u okviru koje se definiše koje to vrednosti program treba da izračuna, odnosno koje vrednosti se

smatraju nepoznatim. Izrazi (12) i (17) su zato modifikovani, odnosno oznake $L(T)$ i $C_{zk}(T)$ zamenjene su oznakom C_z da bi izrazi (12) i (17) činili skup od dve jednačine sa dve nepoznate: T i C_z . U okviru FIND naredbe programu se zadaje da vrednosti za optimalni period kombinovane preventivne zamene i minimalne ukupne troškove koji odgovaraju tom periodu nađe kao rešenja sistema od dve jednačine i dodeli im oznake T_{op} i C_{min} . I u okviru ovog skupa naredbi potrebno je da se definišu

nosno izraz (26) za ukupne troškove kombinovane preventivne zamene. Na ovaj način definisane početne vrednosti skraćuju put za nalaženje rešenja pa se tražene vrednosti, nakon unošenja potrebnih naredbi, dobijaju gotovo trenutno. Treba uočiti da znak jednakosti u okviru izraza ili definisanih veličina ima različite oblike zavisno od toga da li ih je uneo korisnik ili ih je program sam izračunao, i da su tačne vrednosti izračunate u istom numeričkom formatu kao i u prethodnom primeru.

The screenshot shows the MathCAD II interface with the following content:

- Menu Bar:** File, Edit, Text, Math, Graphics, Symbolic, Window, Help
- Variable Definitions:**

$$\eta := 2000 \quad \beta := 4 \quad C_p := 1100 \quad C_k := 6500$$
- Equation 1:**

$$T := \eta \cdot \left[\frac{C_p}{(\beta - 1) \cdot (C_k - C_p)} \right]^{\frac{1}{\beta}}$$
- Equation 2:**

$$C_z := \frac{\beta}{(\beta - 1)} \cdot \frac{C_p}{T}$$
- Text:** given
- Equation 3 (Integral Form):**

$$C_z = \frac{C_k - (C_k - C_p) \cdot e^{-\left[\frac{T}{\eta}\right]^{\beta}}}{\int_0^T e^{-\left[\frac{x}{\eta}\right]^{\beta}} dx}$$
- Equation 4 (Simplified Form):**

$$C_z = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left[\frac{T}{\eta} \right]^{\beta-1} \cdot (C_k - C_p)$$
- Find Function:**

$$\begin{bmatrix} T_{op} \\ C_{min} \end{bmatrix} := \text{find}(T, C_z)$$
- Results:**

$$T_{op} = 1.0226684336 \cdot 10^3 \quad C_{min} = 1.4439040056$$
- Page Number:** Page 1

Sl. 7 — Izgled MathCAD II ekrana

početne vrednosti za nepoznate veličine, odnosno vrednosti od kojih će program početi sa simultanim rešavanjem definisanih jednačina, pa je i ovde korišćen aproksimativni izraz (25) za optimalni period preventivne zamene, od-

U tabeli 2 data je tačnost rezultata dobijenih grafički i korišćenjem aproksimativnog modela kao i vrednosti izračunate pomoću MathCAD-a na oba opisana načina, u odnosu na tačne vrednosti T_k i $C_{zk}(T_k)$.

Tabela 2

Vrednosti optimalnog perioda preventivne zamene i minimalnih ukupnih troškova po jedinici vremena izračunate opisanim načinima

Postupak izračunavanja	Optimalni period		Ukupni troškovi po jedinici vremena
	T[h]	Δ [%]	C_{ob} [n.j.]
Grafički sa slike 4	1020	0.26	1.43
Aproksimativni model	1020.94	0.17	1.436587
MathCAD I	1022.67	0.01	1.443909
MathCAD II	1022.67	0.01	1.443904
Tačna vrednost	1022.66	0.01	1.443904

Iz tabele 2 vidi se da su rezultati dobijeni korišćenjem programskog paketa MathCAD za optimalni period kombinovane preventivne zamene veoma tačni i ne izlaze iz granica tačnosti (0.01) sa kojima je određeno referentno rešenje. To je velika prednost u odnosu na rezultate koji se dobijaju korišćenjem programa posebno napisanih za izračunavanje optimalnog perioda preventivne zamene. Ponekad je tačnost tih rezultata manja i od tačnosti rezultata dobijenih korišćenjem aproksimativnog modela, najčešće zbog akumuliranja greške prilikom izračunavanja vrednosti integrala u imeniocu izraza (17). Znači, samo sa nekoliko instrukcija dobijaju se tačne vrednosti, a korišćenjem aproksimativnog modela (25) za određivanje početne vrednosti T, postiže se da izračunavanje traje veoma kratko. Rezultat se dobija gotovo trenutno, a isti skup naredbi može se

pozivati iz memorije računara i koristiti za izračunavanja sa izmenjenim ulaznim podacima.

4. Zaključak

Na osnovu analize modela za određivanje optimalnog perioda preventivne zamene koji su u literaturi opisani, može se zaključiti da se oni najčešće odnose na model kombinovane preventivne zamene. Druge strategije preventivne zamene, npr. blok — zamena, tretiraju se znatno ređe.

Pokazano je da se upotrebom korisničkog programskog paketa MathCAD, jednostavnim postupkom, brzo dobijaju tačne vrednosti za optimalni period i odgovarajuće minimalne troškove kombinovane preventivne zamene.

Literatura:

- [1] Todorović, J.: Inženjerstvo održavanja tehničkih sistema — Maintainability engineering, JUMV, Beograd, 1993.
- [2] Barlow, R. G., Proshan, F.: Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [3] Pages, A., Gondran, M.: Fiabilité des systèmes, Eyrolles, Paris, 1980.
- [4] Vujanović, N.: Teorija pouzdanosti tehničkih sistema, Vojnoizdavački centar, Beograd, 1990.
- [5] Bogdanović, D.: Prilog postupku određivanja optimalnog perioda preventivne zamene, Naučno-tehnički pregled, Vol. 42, 1992, 10.
- [6] Peković, T.: Određivanje optimalnog perioda preventivne zamene, diplomski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.