Mr Zoran Ristić,
potpukovnik, dipl. inž.

ODREĐIVANJE SLOBODNIH VIBRACIJA CEVI ORUĐA

Određivanje karakteristika vibracija: Svojstvenih frekvencija i formi vibracija izvršeno je primenom metode konačnih elemenata (MKE). Cev oruđa je aproksimirana sa više segmenata različitog poprečnog preseka, zavisno od konfiguracije. Simulacija programskog rešenja MKE prikazana je na modelu cevi topa kalibra 40 mm. Rezultati pokazuju da najveći uticaj na preciznost imaju vibracije cevi prvog i drugog reda, jer se više frekvencije brzo prigušuju i imaju male amplitude.

Uvod

Svako opaljenje projektila predstavlja dinamičko (impulsno) opterećenje koje dovodi do akumulacije energije u svim elementima oruđa. Posle opaljenja dolazi do raznih oblika transformacija ove energije i njenog konačnog *istitravanja* u procesu smirivanja mehaničkog sistema.

Oscilovanje je najizraženije kod cevi koja je najopterećeniji deo oruđa ili oruđa. Usled akumulirane energije, a s obzirom na problem koji se razmatra, dolazi do svojstvenih vibracija cevi kako po pravcu tako i elevaciji, što se odražava na preciznost oru-

đa. Pojava vibriranja cevi može biti veoma štetna, posebno kod automatskog naoružanja, ako se brzina gađanja poklopi sa svojstvenom frekvencijom cevi. Vibracije cevi naoružanja mogu se proučavati i ispitivati različitim metodama. Za primenu metode konačnih elemenata u analizi slobodnih vibracija cevi oruđa bez prisustva prigušenja razvijeno je odgovarajuće programsko rešenje za MKE na personalnom računaru [1].

U analizi dinamičkog modela cevi polazi se od statičkog modela oblika konzole, usvojenog broja i oblika konačnih elemenata. Za određivanje diferencijalnih jednačina, koje opisuju ovakav dinamički model, definisane su matrice krutosti i matrice masa. Primena metode MKE i njena fizička opravdanost prikazana je, uz neophodna objašnjenja, bez detaljnijeg opisa.

Programskim modelom na personalnom računaru proračunavaju se svojstvene frekvencije cevi, vektori pomaka i forme vibriranja u grafičkom obliku. Organizacija programskog modela može se predstaviti sledećim fazama na osnovu kojih se formira algoritam:

a) učitavanje ulaznih podataka,

- b) formiranje matrice krutosti i matrice masa konačnog elementa,
- c) formiranje matrice masa i matrice krutosti celog sistema,
- d) redukcija matrica sistema,
- e) određivanje dinamičke matrice sistema,
- f) određivanje svojstvenih vrednosti i svojstvenih vektora dinamičke matrice,
- g) određivanje vektora pomeranja u čvorovima,
- h) proračun pomaka i crtanje formi vibriranja.

Analize vibracionih karakteristika cevi pokazale su da najveći uticaj na preciznost imaju vibracije prvog i drugog reda, a da se viši modovi brzo prigušuju, što znači da nose malu energiju. Osim toga, visoke frekvencije se i teže pojavljuju. Pri proučavanju uticaja vibracija cevi na gađanje, posebno za automatska oružja, karakteristični su rezonancija i trenutak izlaska projektila iz cevi.

Problem rezonancije javlja se pri pojavi vibracija prvog reda koje imaju nižu frekvenciju i sporije se prigušuju. Eksperimenti su pokazali da najveći uticaj na preciznost imaju vibracije drugog reda, jer izazivaju veći ugao nagiba prednjeg dela cevi. Osim toga, i promena poprečne brzine usta cevi je veća, što takođe utiče na preciznost. Inače, vibracije drugog reda se prigušuju relativno brzo, tako da ne može doći do rezonancije pri brzinama gađanja koje se najčešće koriste.

Primena metode MKE u analizi slobodnih vibracija

Metoda konačnih elemenata omogućava da se kontinualni dinamički sistem nosećih struktura, sa beskonač-

no stepeni slobode kretanja, svede na dovoljno veliki ograničen broj stepeni slobode i, kao takav, analizira. Polazeći od Hamiltonovog varijacionog principa, može se dobiti matrični zapis dinamičke ravnoteže konačnog elementa, a na osnovu toga diferencijalna jednačina kretanja u matričnom obliku [2].

Za sistem konačnih elemenata ova jednačina glasi:

$$M \cdot \ddot{q} + C \cdot \dot{q} + K \cdot q = Q \quad (1)$$

gde je:

M — matrica masa (definiše inercijalna svojstva sistema),

C — matrica prigušenja sistema,

K — matrica krutosti (definiše elastična svojstva sistema),

q — vektor generalisanih pomeranja u čvorovima sistema ($\dot{q}$, $\ddot{q}$ — odgovarajuća brzina i ubrzanje),

Q — vektor generalisanih sila u čvorovima sistema konačnih elemenata.

U slučaju slobodnih vibracija, kada nema prigušenja ni konzervativnih spoljašnjih sila, jednačina (1) dobija oblik:

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \quad (2)$$

Kako je svojstveno vibriranje harmonijskog karaktera, vektor pomaka u čvorovima može se prikazati kao:

$$q = \bar{q} \cdot e^{i\omega t}, \quad e^{i\omega t} = \cos \omega \cdot t + i \cdot \sin \omega \cdot t$$

pa jednačina svojstvenih vibracija dobija oblik:

$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot \bar{q} = 0 \quad (3)$$

Matrična jednačina (3) predstavlja homogen sistem algebarskih jednačina,

čiji broj odgovara broju stepeni slobode sistema. Ovaj sistem ima netrivialno rešenje, ako je determinanta sistema:

$$|K - \omega^2 \cdot M| \cdot \bar{q} = 0 \quad (4)$$

Ovaj izraz je karakteristična jednačina sistema, čiji red odgovara broju stepeni slobode sistema po ω^2 . Svi koreni ove jednačine su realni i pozitivni i predstavljaju svojstvene ili vlastite frekvencije sistema. Svakoju svojstvenoj frekvenciji (ω_i) odgovara po jedan svojstveni vektor ($\bar{q}_i$) koji definiše formu ili mod vibracija.

Standardni oblik problema svojstvenih vrednosti izgleda ovako:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot Y = 0 \quad (5)$$

Ovde je A kvadratna simetrična matrica čije se svojstvene vrednosti određuju, a I je jedinična matrica reda koji odgovara redu matrice A . Vrednosti λ koje zadovoljavaju jednačinu su svojstvene vrednosti matrice A . One se dobijaju rešavanjem karakteristične jednačine, a svojstveni vektori uvrštavanjem dobijenih vrednosti u relaciju (5).

Relacija (3) može se svesti na relaciju (5) na više načina. Kada je matrica M dijagonalna (što odgovara matrici koncentrisanih masa), ili u slučaju konzistentne matrice masa, koristi se postupak dekompozicije matrice krutosti ili matrice masa i time omogućava simetrisanje dinamičke matrice A . Postupak dekompozicije se izvodi metodom Koleskog, koji je detaljno objašnjen u literaturi [2, 6], a iskorišten je u realizaciji programskog rešenja za određivanje svojstvenih karakteristika vibracija pomoću personalnog računara. Postupak je primenljiv samo za regularne matrice.

Matrica krutosti i matrica mase grede

Na primeru jednostavnog konačnog elementa oblika grede sa 4 stepena slobode, prema sl. 1, objašnjen je postupak određivanja matrice krutosti i matrice mase grede [2]:

Sl. 1 — Element grede izložen savijanju

Vektor pomaka (u) za ovaj element ima komponente v i φ

$$u = [v \ \varphi]^T \quad (6)$$

pa je vektor pomeranja u čvorovima oblika:

$$q = [v_1 \varphi_1 \ v_2 \varphi_2]^T \quad (7)$$

Za funkciju pomaka usvaja se polinom oblika elastične linije

$$V = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \quad (8)$$

odnosno: $V = x \cdot A$ (9)
gde su matrice:

$$X = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$$

$$A^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$$

Ugao nagiba elastične linije je:

$$\varphi = dv/dx = a_2 + 2a_3 \cdot x + 3a_4 \cdot x^2 \quad (10)$$

Prema tome, vektor pomeranja u čvorovima biće:

$$q = C \cdot A \quad (11)$$

gde je:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Odavde je:

$$A = C^{-1} \cdot q \quad (13)$$

$$\text{a progib } V = X \cdot C^{-1} \cdot q \quad (14)$$

U poslednjem izrazu je:

$$N = XC^{-1} = [1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad X - 2l\zeta^2 + l\zeta^3 \quad 3\zeta^2 - 2\zeta^3 - l(\zeta^2 + \zeta^3)]^T \quad (15)$$

matrica interpolacionih funkcija, ($\zeta = x/l$).

Veza deformacija i progiba određena je relacijom:

$$\varepsilon = -y \cdot d^2v/dx^2 \quad (16)$$

što znači da je matrica veze deformacije i pomaka B oblika:

$$B = -y \cdot d^2N/dx^2 \quad (17)$$

Matrica krutosti materijala za gredu odgovara Jangovom modelu elastičnosti, pa se za matricu krutosti elemenata, posle odgovarajućih sređivanja izraza dobija:

$$k = \frac{E \cdot I}{3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{simetr.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Na sličan način dobija se konzistentna matrica masa grede:

$$m = \frac{\rho \cdot F \cdot l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{simetr.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Matrica koncentrisanih masa dobija se ravnomernom raspodelom mase elemenata u oba čvora, s tim što se mase ne dodeljuju mestima na dijagonali koja odgovaraju uglovim pomacima

$$m = \frac{\rho \cdot F \cdot l}{2} \text{dijag } [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (20)$$

Kada se odrede matrice masa i matrice krutosti elemenata, formiranje ukupnih matrica sistema provodi se tako da se za svaki čvor sistema sabiraju podmatrice elemenata koje opisuju taj čvor.

Primer analize slobodnih vibracija cevi topa kalibra 40 mm

Cev topa kalibra 40 mm, u skladu sa njenim oblikom, modelirana je sistemom od šest konačnih elemenata u obliku grede (sl. 2).

Pošto se radi o šupljim segmentima koji imaju žlebove sa unutrašnje strane vodišta projektila, pri određivanju aksijalnog momenta inercije površine uzet je prstenasti poprečni presek iste površine i istog spoljašnjeg prečnika, što je prikazano u tabeli 1.

Ostale veličine potrebne za proračun su:

— modul elastičnosti materijala
 $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

— gustina materijala cevi $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.

Sl. 2 — Model cevi topa kalibra 40 mm

Tabela 1

Redni broj elemenata	Dužina l (mm)	Površina preseka F (cm ²)	Momenat inercije I (cm ⁴)
1	210	139,49	2913,93
2	960	129,34	2377,95
3	500	54,73	353,33
4	1000	40,90	219,09
5	155	43,54	242,37
6	255	17,28	261,88

Za navedene polazne podatke, korištenjem programskog modela na personalnom računaru za analizu sistema grednih elemenata, proračunate su vrednosti svojstvenih frekvencija (w_i) i pripadajućih vektora pomaka (u_i), odnosno forme vibriranja cevi. Dobijene su vrednosti za dvanaest frekvencija (w_i), a zbog obima podataka u tabeli 2, dat je prikaz dobijenih rezultata koji su najznačajniji za analizu.

Prikaz odgovarajućih formi slobodnih vibracija cevi grafički je prikazan na sl. 3.

Sl. 3 — Forme vibracija cevi topa

U analizi dobijenih rezultata česta je primena relacija kojima se defini-

še veza između frekvencije (w) i perioda oscilovanja (T), odnosno učestanosti (f), a koje glase:

$$w = 2 \cdot \pi / T \text{ i } f = 1/T, \text{ odnosno } w = 2 \cdot \pi \cdot f.$$

Tabela 2

$w(1) = 117,8$ (r/s)	$w(2) = 423,3$	$w(3) = 1083,3$	$w(4) = 2229,8$	$w(5) = 5372,9$
u (1)	u (2)	u (3)	u (4)	u (5)
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,0030	0,0114	-0,0108	-0,0124	-0,0182
0,0284	0,1050	-0,0951	-0,1032	-0,1844
0,0909	0,2575	-0,1237	-0,0183	0,0322
0,1427	0,3138	-0,0185	0,1955	0,1748
0,2219	0,3515	0,0517	0,1287	0,0041
0,3622	0,0142	0,5575	0,0850	-0,4027
0,7491	-0,1183	-0,0262	-0,0621	0,0742
0,6086	-0,9685	-0,8827	0,6810	0,2214
0,8437	-0,3806	-0,1708	0,0637	0,0103
0,6119	-0,9927	-0,9711	0,9154	-0,7075
1,00	-0,6352	-0,4239	0,3130	-0,1914
0,6128	-1,00	-1,00	1,00	-1,00

Dobijeni rezultati su u saglasnosti sa podacima u literaturi [2, 4, 6], koja obrađuje problem slobodnih vibracija elemenata konstrukcije primenom metode MKE. S obzirom na brzinu gađanja topa kalibra 40 mm (oko 300 metaka u minuti), može se zaključiti da neće doći do pojave rezonancije, jer je brzina gađanja niža od prve svojstvene frekvencije $w(1)$.

Upoređivanjem izmerenih vrednosti [7] sa izračunatim (posebno kod nižih frekvencija) mogu se uočiti određena odstupanja. Naime, prva izračunata frekvencija $f_1 = 18,7$ Hz približno odgovara drugoj izmerenoj, koja je $f_2 = 15$ Hz. Nastala odstupanja mogu biti posledica različitih faktora, kao što su: odstupanja modela od stvarnog oblika cevi, aproksimacija progiba funkcijom oblika elastične linije, greške

u toku merenja zbog prisustva prigušenja ostalih elemenata u sklopu cevi, i dr.

Pored toga, treba imati u vidu da je cev učvršćena u zadnjaku, a nije ukļješćena, kao što se teorijski pretpostavlja u modelu. Svaki od elemenata sklopa cevi ima svoje vibracije koje se mogu superponirati sa vibracijama cevi.

Prikazani model, a posebno relativno jednostavno programsko rešenje na personalnom računaru, omogućuje brzu i korektnu analizu slobodnih vibracija elemenata konstrukcije naoružanja. U tom smislu, posebno su pogodni oni elementi konstrukcije koji se mogu modelirati jednostavnim konačnim elementima, kao što su grede, štapovi ili ravne ploče sa manjim brojem stepeni slobode kretanja.

Zaključak

Problemi dinamike složenih konstrukcija, u koje nesumnjivo spada i konstrukcija naoružanja, danas se, uglavnom, rešavaju približnim metoda-

ma, od kojih je metoda MKE najčešće korišćena. Metoda MKE, kao numerička metoda, u odnosu na druge ima mnoge prednosti. Pre svega, lako je prilagodljiva varijabilnostima konstruktivnih karakteristika (obliku, dimenzijama, anizotropiji materijala, i dr.), matematički je relativno jednostavna i pomoću nje se može postići relativno velika tačnost proračuna.

Klasične metode proračuna u inženjerskoj praksi za probleme dinamičke analize, posebno u vreme značajne informatičke podrške i opreme kojom se raspolaže, danas su veoma ograničene, a često nepouzidane i nedovoljne.

U radu je prikazana jedna od mogućnosti primene metode MKE u analizi slobodnih vibracija cevi sa prepoznatljivim i relativno jednostavnim elementima oblika grede. Uvođenjem novih konačnih elemenata složenijeg oblika, ili njihovom kombinacijom, preko matrice prigušenja i analiza prigušenih vibracija elemenata konstrukcije mogu se znatno proširiti mogućnosti primene ove metode.

Literatura:

- [1] Mijajlović, G.: Dinamička analiza konstrukcija primenom metode konačnih elemenata, CVTŠ Zagreb, 1990.
- [2] Sekulović, M.: Metod konačnih elemenata, GK Beograd, 1988.
- [3] Brčić, V.: Dinamika konstrukcija, GK Beograd, 1981.
- [4] Hartog, D.: Vibracije u mašinstvu, GK Beograd, 1972.

- [5] Kojić, M. i dr.: Teorija oscilacija, NK Beograd, 1988.
- [6] Meirovitch, Lj.: Elements of vibration analysis, MC GRAW-Hill Book Company, Singapore 1986.
- [7] Goronja, B.: Eksperimentalno određivanje vibracionih karakteristika PAV topa 40 mm L/70, CVTŠ Zagreb, 1986.