Mr Dušan Regodić,
major, dipl. inž.

UTICAJ VRSTE STRUJANJA NA UKUPNI AERODINAMIČKI KOEFICIJENT

Uvod

Za ostvarivanje većeg dometa, sa spoljnobalističkog stanovišta, neophodno je smanjenje ukupnog otpora projektila u toku leta. Ukupni otpor projektila može se smanjiti optimizacijom njegovih dimenzija i oblika.

Na osnovu ranije analize uticaja koeficijenta otpora vrha projektila [9], razmatraće se strujanje u graničnom sloju i uticaj koeficijenta otpora trenja na ukupni aerodinamički koeficijent.

Ukupni aerodinamički koeficijent otpora iznosi:

$$C_{DO} = C_{DH} + C_{DSF} + C_{DBND} + C_{DBT} + C_{DB}$$

gde je:

- C_{DH} — koeficijent otpora vrha projektila,
- C_{DSF} — koeficijent otpora trenja,
- C_{DBND} — koeficijent otpora vodećeg prstena,
- C_{DBT} — koeficijent otpora zadnjeg konusa,
- C_{DB} — koeficijent otpora dna projektila.

Vazduh se odlikuje malom viskoznošću, pa će u neposrednoj blizini čvrste površine projektila imati istu brzinu, ali suprotan smer kretanja kao i čvrsta površina. Viskozne sile mogu se zanemariti u celom strujnom polju, osim u neposrednoj blizini površine projektila, gde se formira tanak granični sloj u kojem one imaju značajnu ulogu.

Ovakvu podelu strujanja dao je Prandtl. Ona predstavlja pojednostavljenje problema, tako da daje mogućnost dobijanja rešenja do kojih klasična dinamika idealnog fluida ne može doći. Na sl. 1, šematski je prikazana podela strujnog polja.

Ukupna aerodinamička sila predstavlja se kao suma elementarnih sila

Sl. 1 — Šematski prikaz podele strujnog polja

kojima vazduh deluje na površinu. To su sile pritiska koji deluje normalno na površinu i sile trenja koje deluju tangencijalno na površinu.

Ukupna sila trenja, koja se javlja u graničnom sloju na površini projektila izražava se preko bezdimenzijskog koeficijenta trenja C_f . Vektori brzine van graničnog sloja su mali ili približno jednaki nuli, pa se sile trenja van graničnog sloja mogu zanemariti. Strujanje van graničnog sloja može se smatrati bezvrtložnim ili potencijalnim strujanjem idealnog fluida. Unutar graničnog sloja, zbog postojanja različitih brzina između dve čestice vazduha i tangencijalnog napona, strujanje je vrtložno.

Jednačina graničnog sloja

Ravansko strujanje stišljivog fluida biće analizirano po zakrivljenoj površini [1].

Zamenom veličina

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \neq 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right]$$

što predstavlja brzinu deformacije delića vazduha,

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0$$

što predstavlja lokalnu promenu brzine, pa je konvektivna brzina za strujanje viskoznog fluida definisana Navier-Stoksovim jednačinama;

dobija se:

$$V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \cdot \left[2 \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} \right. \right.$$

$$\left. \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right\} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\partial y} \cdot \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right] \\ V_x \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \cdot \left[2 \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

gde je:

μ — dinamički koeficijent otpora (dinamički viskozitet),

p — pritisak u graničnom sloju.

Posmatranjem strujanja fluida malog viskoziteta, $\nu = \mu/\rho$, i na osnovu jednačine (2) može se zaključiti da je viskozitet bitna komponenta strujnog toka. Male vrednosti ν dopuštaju česticama vazduha, koje se nalaze u graničnom sloju, da postignu velike vrednosti brzine. Zbog toga proizvod viskoznosti i brzine dobija na značaju.

U slobodnom strujnom toku, po dalje od graničnog sloja, uticaj kočenja čestica nastalog delovanjem sile trenja nije veliki, pa su i promene brzina u pravcima datim izvodima $\partial V_x/\partial x$ i $\partial V_x/\partial y$ veoma male. Pošto su množitelji koeficijenta ν mali možemo ih zanemariti, ako se uzme u obzir uticaj sile trenja u jednačini (2), i da se slobodni tok dalje od graničnog sloja može razmatrati na osnovu Ojlerove jednačine idealnog toka. Posmatranjem strujnog toka bliže površini projektila povećava se uticaj viskoziteta na promenu brzine strujanja, pa izrazi u kojima figurira ν ne mogu biti zanemareni. Jednačina (2) može se koristiti za izračunavanje viskoznog

strujnog toka. Ovaj zaključak predstavlja prvu tačku teorije o graničnom sloju.

Druga tačka sadrži mogućnost uproščavanja jednačine (2) kada je debljina razmatranog graničnog sloja δ . Pri razmatranju graničnog sloja globalni koordinatni sistem se postavlja na vrh projektila, sa x-osom usmerenom duž ose projektila i y-osom normalnom na x-osu. Lokalni koordinatni sistem postavlja se tako da je x-osa tangenta na površinu u posmatranoj tački, a x-osa normalna na tu površinu.

Pretpostavlja se da je debljina graničnog sloja δ mala, u odnosu na karakterističnu dužinu opstrujavanja L , kako je prikazano na sl. 2. Za koordi-

Sl. 2 — Dijagram graničnog sloja
1 — granični sloj, 2 — granica sloja,
3 — krivolinijska opstrujavana površina

natu y u graničnom sloju važi relacija $0 \ll y \ll \delta$, tako da su y i δ u istoj klasi važnosti. Koordinata x definiše udaljenost duž graničnog sloja, a njen red veličina je $x \approx L$. Brzina na granici graničnog sloja ima vrednost V_δ . Brzina bilo koje tačke u graničnom sloju, na udaljenosti y , imaće vrednost $V_x \approx V_\delta$. Veličina komponente V_y odrediće se na osnovu [1], odakle sledi:

$$V_y \approx \frac{1}{\rho} \cdot \int_0^\delta \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} dy$$

Pretpostavlja se da je gustina ρ jednaka ρ_δ na granici graničnog sloja. Da bi se odredila veličina izvoda $\partial (\rho V_x) / \partial x$ koristiće se sledeće pretpostavke:

— opstrujavana površina je dužine L ,

— vrednost ρV_x može varirati od 0, na samoj površini, do $\rho_\delta V_\delta$ na granici graničnog sloja gde je $\Delta(\rho V_x) \approx \rho_\delta V_\delta$,

— vrednost $\Delta X \approx L$.

tako da se dobija:

$$\frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} \approx \frac{\rho_\delta \cdot V_\delta}{L} \quad (3)$$

$$V_y \approx \frac{1}{\rho_\delta \cdot L} \cdot \rho_\delta \cdot V_\delta \cdot \delta = \frac{V_\delta \cdot \delta}{L} \quad (4)$$

Vrednost izvoda u jednačini (2) određuje se analogno jednačini (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &\approx \frac{V_\delta}{L} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &\approx \frac{V_\delta \cdot \delta}{L} \cdot \frac{1}{L} = \frac{V_\delta \cdot \delta}{L^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Prema tome, vrednosti na levoj strani jednačine (2) biće:

$$\begin{aligned} V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} &\approx V_\delta \cdot \frac{V_\delta}{L} = \frac{V_\delta^2}{L} \\ V_y \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} &\approx V_\delta \cdot \frac{\delta}{L} \cdot \frac{V_\delta}{\delta} = \frac{V_\delta^2}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

U jednačini (6) uočljivo je da oba izraza imaju iste vrednosti na desnoj strani.

Za izraze na desnoj strani jednačine (2), koja uzima u obzir silu trenja, važe sledeće relacije:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \approx \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{V_\delta}{L^2} \quad (I)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \approx \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{V_\delta}{\delta^2} \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \approx \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{V_\delta}{L^2} \quad (\text{III})$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \approx \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{V_\delta}{L^2} \quad (\text{IV})$$

(7)

Kako je $\delta \ll L$, na osnovu jednačine (7), može se zaključiti da I, III i IV izraz imaju iste vrednosti koje su vrlo male pa mogu biti zanemarene u poređenju sa vrednošću izraza III.

Vrednost izraza $(1/\rho) \cdot dp/dx$, definisana je Bernulijevom jednačinom [1]. Zbog malog uticaja zapreminskih sila na gasovite materije, zanemariće se potencijal zapreminskih sila U.

Diferencijal opšteg slučaja kretanja iznosi:

$$\left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{dp}{dx} = -V \frac{dV}{dx}$$

što predstavlja kvazijednodimenzionalnu Ojlerovu jednačinu strujanja idealnog stišljivog fluida;

ili

$$VdV = \frac{dp}{\rho}$$

što predstavlja kvazijednodimenzionalnu Ojlerovu jednačinu strujanja idealnog stišljivog fluida za jediničnu dužinu;

odakle sledi da je:

$$\left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{V_\delta^2}{L}$$

Kada na strujni tok utiče viskozitet, ovaj izraz dobija sledeći oblik:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \approx \frac{V_\delta^2}{L} \quad (\text{8})$$

Na osnovu prethodnog pojednostavljenja, umesto jednačine (2) dobija se Prandtlova jednačina:

$$V_x \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_\delta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (\text{9})$$

Na osnovu druge jednačine (2), i definisanja vrednosti izraza slično kao kod prve jednačine (2), dobija se:

$$\begin{aligned} V_x \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} = & - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & \underbrace{\frac{V_\delta^2 \delta / L^2}{(\mu/\rho) \cdot V_\delta / (L \cdot \delta)}}_{\text{}} + \\ & \underbrace{\frac{4}{3\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)}_{\text{}} - \\ & \underbrace{\frac{2}{3\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)}_{\text{}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)}_{\text{}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)}_{\text{}} \end{aligned} \quad (\text{10})$$

Poslednji izraz na desnoj strani jednačine (10) može biti zanemaren zbog toga što ima najmanju vrednost u poređenju sa ostalim izrazima u (10). Za kompletnu analizu mora se uzeti u obzir viskozitet $\nu = \mu/\rho$. Ostali izrazi se analiziraju iz relacije (8). Vrednost umnoška na levoj strani definisana je drugim izrazom (7), odakle sledi:

$$(\mu/\rho) \cdot \frac{V_\delta}{\delta^2} = V_\delta^2 \cdot L$$

odakle vrednost kinematskog viskoziteta iznosi:

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu \approx \frac{V_{\delta} \cdot \delta^2}{L} \quad (11)$$

Kao rezultat dobija se vrednost izraza na desnoj strani jednačine (10), koja obuhvata viskozitet, tako da glasi:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \cdot \frac{V_{\delta}}{L \cdot \delta} \approx \left(\frac{V_{\delta} \cdot \delta^2}{L}\right) \cdot \frac{V_{\delta}}{L \cdot \delta} = \frac{V_{\delta}^2}{L^2} \quad (12)$$

Umnožak $(1/\rho) \partial p / \partial y$ u jednačini ima konstantnu vrednost. Vrednosti $\partial p / \partial y$ i $\partial p / \partial x$ definisane su na δ/L , tj. na osnovu gradijenta $\partial p / \partial y \ll \partial p / \partial x$. Prema tome, druga jednačina sistema (2) može se zameniti jednačinom:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

Na osnovu ovog izraza pritisak na granični sloj ostalog dela vazduha koji deluje normalno na zid ne menja se i ne izjednačava sa pritiskom p_{δ} na granici graničnog sloja.

Može se zaključiti da granični sloj ne utiče na raspodelu pritiska, a rezultat toga je hipoteza o teoriji graničnog sloja, odnosno odsustvu uticaja graničnog sloja na slobodni tok fluida.

Prema navedenoj hipotezi, raspodela pritiska po površini tela u strujnom toku, pri postojanju graničnog sloja, može se izračunati pomoću Ojlerove jednačine za idealni fluid. Pritisak se može izračunati iz uprošćene jednačine (9), koja predstavlja osnovnu jednačinu u teoriji graničnog sloja, i naziva se Prandtlova jednačina. Prime na Ojlerove i Prandtlove jednačine je moguća, uz uslov da je debljina graničnog sloja mala, u poređenju sa dimenzijama tela u strujnom toku, pa se hipoteza o odsustvu uticaja graničnog sloja na slobodni tok fluida može primeniti. Pri velikim odstojanjima od po-

vršine i većim zadebljanjima graničnog sloja, ova hipoteza se ne može primeniti. Proračun strujnog toka se tada vrši pomoću jednačine (2).

Prandtlova jednačina (9) sadrži dinamički viskozitet μ koji je u funkciji pritiska i temperature. Za dati poprečni presek graničnog sloja, koji je karakterisan konstantnim pritiskom p_{δ} , vrednost μ varira duž zadebljanog graničnog sloja u zavisnosti od temperature. Da bi se definisale vrednosti μ i ρ mora se znati funkcija temperature T_y . Za definisanje ove funkcije neophodna je jednačina energije, koja može biti uprošćena kao i jednačina (2) [1]. Koristiće se jednačina oblika:

$$\rho \cdot V_x \cdot \frac{\partial i_o}{\partial x} + \rho \cdot V_y \cdot \frac{\partial i_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial i_o}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) \cdot \frac{\partial V_x^2}{\partial y} \right] \right]$$

Za vrednost $Pr=1$ dobija se sledeći oblik jednačine:

$$\rho \cdot V_x \cdot \frac{\partial i_o}{\partial x} + \rho \cdot V_y \cdot \frac{\partial i_o}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial i_o}{\partial y} \right)$$

Jedan od mogućih integrala prethodne jednačine, za slučaj kada je entalpija $i_o = \text{const}$, iznosi:

$$i_o = i + \frac{V^2}{2} = \text{const.} \quad (14)$$

Ova jednačina važi za slučaj toplo izoloovane površine, kad ne postoji prenošenje toplote na zid. Na osnovu vrednosti $i = C_p \cdot T$ i diferenciranja jednačine (14) dobija se:

$$C_p = \frac{\partial T}{\partial y} + V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$$

gde je C_p — specifična toplota pri $p = \text{const}$.

Za vrednost $y \rightarrow 0$, brzina $V_x \rightarrow 0$. Tada je očigledno da nema promene temperature i da izvod $dT/dy \rightarrow 0$, odnosno da je $T = \text{const.}$, što znači da nema prenošenja toplote na opstrujavani zid. Umesto složene jednačine koristi se uprošćena jednačina (14). Ovakav oblik jednačine energije ne slaže se potpuno sa pravom prirodom kretanja viskoznog gasa u graničnom sloju pa se izvode aproksimirane vrednosti parametara koji definišu kretanje. Dobijeni rezultati prihvatljivi su za proračune trenja po opstrujavanoj površini. Prandtlova jednačina, kao i jednačina stanja i energije, čine sistem jednačina viskoznog graničnog sloja koji glasi:

$$V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_\delta}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial(V_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \rho)}{\partial y} \neq 0 \quad (15)$$

$$p_\delta = \rho \cdot R \cdot T$$

$$i + \frac{V_x^2}{2} = i_0$$

Vrednost pritiska »p« zamenjuje se sa »p_δ«, saglasno jednačini (13). U jednačini energije trenutna vrednost entalpije je $i = C_p \cdot T$, a stagnacija entalpije je $i_0 = C_p \cdot T_0$. Dobijeni sistem jednačina pogodan je za razmatranje laminarnog graničnog sloja, pri čemu je neophodno prilagoditi granične uslove na površini tela u strujnom toku i uslove trenutnog prenosa parametara graničnog sloja na njegovoj granici. Granični uslovi za brzinu su:

$$\begin{aligned} V_x = V_y = 0 \text{ za } y = 0 \\ V_x = V_\delta(x) \text{ za } y \Rightarrow \delta \end{aligned} \quad (16)$$

Gustina i temperatura u sistemu jednačina (15) mogu biti izraženi vrednostima brzine na graničnom sloju. Na osnovu jednačine (14) dobija se:

$$C_p \cdot T + \frac{V_x^2}{2} = C_p \cdot T_0 \quad (17)$$

$$T = T_0 \cdot \left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2} \right) = T_0 \cdot \left[1 - \frac{V_x^2}{C_0^2} \cdot (\kappa - 1) \right] = T_0 [1 - M_x^2 \cdot (\kappa - 1)] \quad (18)$$

gde je:

T — normalna temperatura u slobodnoj struji fluida,

C_0 — brzina zvuka,

M_x — lokalna vrednost Mahovog broja,

κ — koeficijent adijabate.

Koristeći jednačinu stanja $p = \rho \cdot R \cdot T$, u kojoj je pritisak p za granični sloj uzet kao p_δ na granici graničnog sloja, dobija se izraz za gustinu:

$$\rho = \frac{p_\delta}{R \cdot T} = \frac{p_\delta}{R \cdot T_0} \left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2} \right)^{-1} \quad (19)$$

Početna temperatura je

$$T_0 = T_\delta \cdot \left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2} \right)^{-1} \quad (20)$$

Gustina na granici graničnog sloja je:

$$\rho_\delta = \frac{p_\delta}{R \cdot T} = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2} \right)^{1/(\kappa-1)} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\delta \cdot \left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2} \right)^{-1} = \\ &= \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2} \right)^{\kappa/\kappa-1} \cdot \left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Na osnovu dobijenih jednačina mogu se izračunati parametri graničnog sloja, a da se pri tome ne anali-

ziraju fizičko-hemijske promene do kojih dolazi pri velikim brzinama strujanja. Gas u graničnom sloju tada dostiže veoma visoke temperature. Ove jednačine izražavaju realne vrednosti brzina u slučaju kada temperatura u graničnom sloju ne dostiže velike vrednosti. Smanjenjem brzine strujanja smanjuje se uticaj stišljivosti i zagrevanja gasa u graničnom sloju. Za nestišljivo dvodimenzionalno ravansko strujanje granični sloj ima oblik:

$$V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \cdot \frac{\partial V_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_\delta}{dx} + v \cdot \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \neq 0 \quad (23)$$

$$\frac{V_\delta^2}{2} + \frac{p_\delta}{\rho_\delta} = \text{const.}$$

Ove jednačine su rešene za granične uslove koji su dati u izrazu (16).

Debljina laminarnog graničnog sloja za dvodimenzionalno strujno polje iznosi [1, 2, 3]:

$$\delta_L = \frac{5,4 \cdot x}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (24)$$

Debljina turbulentnog graničnog sloja iznosi:

$$\delta_T = \frac{0,37 \cdot x}{\text{Re}_x^{0,2}} \quad (25)$$

gde je:

x — odstojanje od vrha projektila do tačke ispitivanja,

Re_x — Reynoldsov broj proračunat za udaljenost x .

Brzina u laminarnom graničnom sloju data je »Grocco formulom«:

$$V = \frac{V_\infty \cdot y}{\delta_L} \cdot \left(2 - \frac{y}{\delta_L} \right) \quad (26)$$

a u turbulentnom graničnom sloju je:

$$V = V_\infty \cdot \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^{1/7} \quad (27)$$

Promena brzine dominantno utiče na promenu gustine u graničnom sloju koja iznosi:

$$\rho_y(V) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{V^2}{c^2} \right)^{1/\kappa - 1} \quad (28)$$

Uticaj temperature na gustinu u graničnom sloju može se prikazati formulom:

$$\rho_y(T) = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{T_y + T}{T} \right) \quad (29)$$

gde je:

y — koordinata posmatrane tačke,

$\rho_y(V)$ — funkcionalna zavisnost gustine od brzine, u posmatranoj tački,

$\rho_y(T)$ — funkcionalna zavisnost gustine od temperature u posmatranoj tački,

T_y — temperatura u tački sa koordinatom y ,

T — normalna temperatura u slobodnoj struji.

Vrednost T_y razlikuje se za laminarni i turbulentni granični sloj. Za laminarni granični sloj iznosi:

$$T_{LY} = T + 0,88 \cdot \frac{V_y^2}{2 \cdot C_p} \quad (30)$$

Za turbulentni granični sloj iznosi:

$$T_{TY} = T + 0,92 \cdot \frac{V_y^2}{2 \cdot C_p} \quad (31)$$

Uticaj promene brzine i temperature na gustinu suprotnog su predznaka, tako da stvarna gustina u tački sa koordinatom y iznosi:

$$\rho_y = \rho_y(V) - \rho_y(T) \quad (32)$$

Laminarni i turbulentni granični sloj

Kada je granični sloj formiran tako da između pojedinih slojeva različitih brzina nema razmene čestica vazduha većih od molekula, naziva se laminarni granični sloj. Slojevi vazduha imaju različite brzine, ali zbog malih razlika oni ostaju skoro paralelni sa graničnom površinom. Koeficijent površinskog trenja ravne ploče za laminarni granični sloj, u slučaju ravnanskog strujanja nestišljivog fluida, dao je Blazius u obliku:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad (33)$$

Laminarni granični sloj je relativno tanak sa ograničenom razmenom mase između slojeva. Brzine u njemu su relativno male u blizini površine projektila, kao i površinsko trenje.

Turbulentni granični sloj je znatno deblji i sa većom razmenom mase između slojeva. Brzine u blizini površine projektila znatno su veće, kao i površinsko trenje. Koeficijent površinskog trenja za turbulentni granični sloj iznosi:

$$C_f = \frac{0,072}{\sqrt{Re}} \quad (34)$$

Iz navedenog izraza može se zaključiti da koeficijent otpora trenja C_f opada sa porastom Re-broja. Eksperimenti pokazuju da se umesto izraza za $Re < 10^5$ može upotrebiti obrazac:

$$C_f = \frac{0,074}{\sqrt{Re}} \quad (35)$$

Za područje $10^6 < Re < 10^9$ može se upotrebiti Shlihtingova empirijska formula, koja je dobijena na bazi teorijskih rezultata Karmana, za turbulentni granični sloj i glasi:

$$C_f = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad (36)$$

Na osnovu eksperimentalnih rezultata, Prandtl je dao obrazac pogodan za numeričko računanje koji je modifikovan i glasi:

$$C_f = \frac{0,472}{(\log Re)^{2,58}} \quad (37)$$

Postoji i određeni broj empirijskih obrazaca za određivanje C_f u funkciji Re-broja. Takav jedan je Falknerov obrazac kojim se dobijaju tačniji rezultati:

$$C_f = \frac{0,0306}{\sqrt[7]{Re}} \quad (38)$$

Može se zaključiti da od dužine opstrujavane površine, brzine strujanja i kinematske viskoznosti zavisi:

- debljina graničnog sloja,
- karakter strujanja u graničnom sloju,
- koeficijent otpora.

Kod malih Re-brojeva granični sloj za ravnu ploču biće najvećim delom laminaran. Kod velikih Re-brojeva najveći deo ploče biće u turbulentnom graničnom sloju (sl. 3). U granicama $10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ granični sloj je na početku ploče laminaran, a zatim turbulentan.

Dužina apscise na prelazu sa laminarnog u turbulentno strujanje je x_t . Prandtl je pretpostavio da je prelazak

Sl. 3 — Laminarno-turbulentni granični sloj pri strujanju oko ravne ploče

iz laminarnog u turbulentni granični sloj trenutno i da je od veličine x_t turbulentni granični sloj isti kao da je imao početak u tački $x_t=0$.

Koeficijent trenja za laminarno-turbulentni granični sloj iznosi:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{x_t} + \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \cdot (1 - \sqrt{x_t})^{4/5} \quad (39)$$

Dijagram $C_f(Re, x_t)$, dobijen pomoću formule (36), prikazan je na sl. 4 [1].

Sl. 4 — Dijagram $C_f = f(Re, x_t)$

Formula (36) daje dovoljno tačne rezultate. U praksi su česta strujanja koje karakteriše velika vrednost Re -broja, pa je cela ravna površina prekrivena turbulentnim graničnim slojem, počevši od $x_t=0$.

Prandtl je eksperimentom dobio novi obrazac koji glasi:

$$C_f = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{K}{Re} \quad (40)$$

gde je K — relativna hrapavost.

Na sl. 5 prikazane su razne vrednosti C_f za prelazno područje, laminarni i turbulentni granični sloj koji zavi-

si od glatkoće ploče i stepena turbulencije. Podaci potiču od Van Driesta.

Sl. 5 Zavisnost $C_f = f(Re)$

Vrednost $K = Re(C_{ft} - C_{fl})$ je za glatku ploču u dijapazonu $300 < K < 1800$. Pri većoj hrapavosti K opada do 300. Iz jednačine (36) vidi se da, pri velikim Re -brojevima, drugi izraz u toj jednačini teži nuli, a vrednost za C_f se približava onoj koja važi za turbulentni granični sloj za celu ploču. Ako se upotrebi Falknerov obrazac (35), jednačina se može napisati u sledećem obliku:

$$C_f = \frac{0,0306}{\sqrt{Re}} - \frac{1700}{Re} \quad (41)$$

Reynoldsov broj, kod kojeg laminarni granični sloj prelazi u turbulentni, zove se kritični Reynoldsov broj. Može se zaključiti da laminarni granični sloj ima manji otpor površinskog trenja od turbulentnog kod istog Re -broja, pa je poželjno održati laminarni granični sloj na što većoj dužini opstrujavane površine.

Analiza graničnog sloja pokazuje da na njega utiču:

- brzina opstrujavanja,
- dužina opstrujavane površine,
- kinematska viskoznost,
- hrapavost površine,
- gradijent pritiska,
- zakrivljenost površine,

- turbolencija,
- temperatura površine,
- stišljivost.

Pri analizi uticaja navedenih faktora na granični sloj koeficijent trenja je korigovan koeficijentima korekcije [2, 7].

Koeficijent otpora trenja za klasični projektil

Koeficijent otpora trenja određuje se prema izrazu [2]:

$$C_{DSF} = C_f \cdot \left(\sqrt{\lambda_p^2 + 0,25} + 4 \cdot \lambda_c + 2 \cdot \left(1 + \frac{d_d}{d}\right) \cdot \sqrt{\lambda_k^2 + 0,25 \cdot \left(1 - \frac{d_d}{d}\right)^2} \right) \quad (42)$$

gde je:

- λ_p — vitkost prednjeg dela projektila,
- λ_c — vitkost cilindričnog dela projektila,
- λ_k — vitkost zadnjeg konusa,
- C_f — koeficijent trenja graničnog sloja dat izrazom (36),
- d — kalibar projektila,
- d_d — prečnik dna projektila.

Reynoldsov broj strujanja Re dat je izrazom:

$$Re = \frac{340,4 \cdot M \cdot l}{\nu}$$

gde je:

- M — Mahov broj,
- l — ukupna dužina projektila,
- ν — koeficijent kinematske viskoznosti dat izrazom (11),

gde je:

$\mu = 2,436 \cdot \sin(0,001455 \cdot T_{sr})$ — koeficijent dinamičke viskoznosti,

$T_{sr} = T + 0,22 \cdot (T_R - T)$ — prosečna temperatura,

$T_R = T \cdot (1 + 0,18 \cdot M^2)$ — ravnotežna temperatura za turbulentni granični sloj,

gde je:

T — temperatura u normalnim uslovima.

Koeficijent otpora trenja može se izračunati na osnovu programa MC DRAG [4, 7], prema formuli:

$$C_{DSF} = \frac{C_{DFL} \cdot S_{WN} + C_{DFT} \cdot S_{WCL}}{S_W} \quad (43)$$

gde je, za turbulentni granični sloj, vrednost $C_{FL} = C_{FT}$

$$C_{DSF} = \frac{4}{\pi} \cdot C_{FL} \cdot S_W \quad (44)$$

Za laminarni granični sloj izvršena je korekcija obrasca po Blaziusu, tako da glasi:

$$C_{FL} = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \cdot (1 + 0,12 \cdot M^2)^{-0,12} \quad (45)$$

Ukupna opstrujavana površina data je izrazom:

$$S_W = S_{WN} + S_{WCL}$$

gde je:

S_{WN} — površina vrha projektila,

$$S_{WN} = \frac{\pi}{2} \cdot l_N \left[1 + \frac{1}{8 \cdot l_N^2} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{50 \cdot l_N^2} \right) \cdot \left(\frac{R_T}{R} \right) \right]$$

S_{WCL} — površina cilindričnog dela projektila,

$$S_{WCL} = \pi \cdot (l_T - l_N)$$

l_N — dužina prednjeg dela projektila,

l_T — dužina projektila,

$\frac{R_T}{R}$ — odnos prečnika.

Prandtl je empirijsku formulu Shlihtinga za turbulentni granični sloj koristio i ona glasi:

$$C_{fT} = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \cdot (1 + 0,21 \cdot M^2 \infty) \quad (46)$$

Schlichting je potvrdio veliku podudarnost Prandtlove empirijske formule i rezultata do kojih je došao Van Driest.

Za temperaturu $t=15^\circ$, $\mu=1,7894 \cdot 10^{-5}$ Pas i $\rho=1,225$ kg/m³ vrednost Reynoldsovog broja je $Re=23296 \cdot \mu \cdot l_T \cdot d_{REF}$.

Pregled korišćenih oznaka

Dimenzije hipotetičkog projektila 122 mm date su u [9].

Konstruktivni parametri hipotetičkog projektila 152 mm, upotrebljeni kao ulazne veličine pri proračunu klasičnom i poluempirijskom metodom MC DRAG prikazani na sl. 6 su:

DREF = 152 mm — referentni kalibar projektila,

LT = 5,596 — dužina projektila u kalibrima,

LN = 3,066 — dužina prednjeg dela u kalibrima,

RTR = 0,28095 — odnos prečnika RT/R.

M	C_{DSF}	C_{DO}	C_{DSF}/C_{DO} %
0,6	0,038	0,1421	26,7
0,7	0,037	0,1449	25,5
0,8	0,037	0,1510	24,5
0,9	0,036	0,1762	20,4
1,0	0,036	0,2721	13,3
1,1	0,035	0,3189	11,0
1,2	0,035	0,3221	10,9
1,3	0,034	0,3198	10,6
1,4	0,034	0,3115	10,9
1,5	0,034	0,3022	11,3
1,6	0,034	0,2951	11,5
1,7	0,033	0,2880	11,5
1,8	0,033	0,2811	11,7
1,9	0,033	0,2755	12,0
2,0	0,033	0,2700	12,3
2,1	0,033	0,2649	12,5
2,2	0,033	0,2591	12,7
2,3	0,033	0,2535	13,0
2,4	0,033	0,2495	13,2
2,5	0,033	0,2449	13,5
2,6	0,033	0,2415	13,7
2,7	0,033	0,2382	13,9
2,8	0,033	0,2362	14,0
2,9	0,033	0,2341	14,1
3,0	0,033	0,2330	14,2

LBT = 0,625 — dužina zadnjeg konusa u kalibrima,

DB = 0,842 — prečnik baze u kalibrima,

Sl. 6 — Dimenzije projektila

DM = 0,08947 — prečnik zatupljenja prednjeg dela u kalibrima,

DBND = 1,0223 — prečnik vodećeg prstena u kalibrima,

XCGN = 3,398 — odstojanje težišta projektila od vrha u kalibrima.

Analiza dobijenih rezultata

U tabeli 1. prikazane su vrednosti $C_{DSF}=f(M)$, $C_{DO}=f(M)$ i odnos C_{DSF}/C_{DO} za različite Mahove brojeve, dobijene proračunom klasičnom metodom na osnovu [2, 6] i formule (42), za hipotetički projektil 152 mm.

U tabeli 2 prikazane su uporedne vrednosti aerodinamičkog koeficijenta C_{DO} , C_{DSF} i C_{DSF}/C_{DO} u funkciji Mahovog

Aerodinamički koeficijent trenja zavisi od dimenzija i oblika projektila. Međutim, interesantno je uporediti procentualni udeo učešća koeficijenta otpora trenja u ukupnom aerodinamičkom koeficijentu otpora, za različite kalibre.

Za veće dimenzije projektila veći je aerodinamički koeficijent trenja. Za projektil 152 mm pri različitim brzinama javlja se promenljiva vrednost C_{DSF} .

Najveću vrednost C_{DSF} ima za $M=0,5$, što iznosi 40% od ukupne vrednosti aerodinamičkog koeficijenta C_{DO} koji je tada minimalan. Porastom brzine projektila ($M=1,2$) raste vrednost talasnog otpora [7], a smanjuje se vrednost C_{DSF} , tako da iznosi 12% od

Tabela 2

M	KALIBAR 152 mm			KALIBAR 122 mm		
	C_{DSF}	C_{DO}	C_{DSF}/C_{DO} %	C_{DSF}	C_{DO}	C_{DSF}/C_{DO} %
0,500	0,050	0,125	40	0,048	0,169	28
0,600	0,048	0,127	38	0,046	0,172	27
0,700	0,047	0,129	36	0,045	0,175	26
0,800	0,045	0,133	34	0,043	0,181	24
0,900	0,044	0,142	31	0,042	0,188	22
1,000	0,043	0,301	14	0,041	0,305	13
1,100	0,042	0,335	13	0,040	0,405	10
1,200	0,041	0,328	12	0,039	0,399	10
1,300	0,040	0,320	12	0,038	0,381	10
1,400	0,039	0,301	13	0,037	0,360	10
1,500	0,038	0,298	13	0,036	0,354	10
1,600	0,037	0,288	13	0,035	0,343	10
1,700	0,036	0,278	13	0,034	0,332	10
1,800	0,035	0,269	13	0,034	0,322	11
2,000	0,034	0,253	13	0,032	0,304	11
2,200	0,032	0,238	13	0,031	0,287	11
2,500	0,030	0,218	14	0,029	0,263	11
3,000	0,028	0,191	15	0,026	0,230	11
3,500	0,025	0,168	15	0,024	0,204	12
4,000	0,023	0,151	15	0,022	0,183	12

broja M, za hipotetičke kalibre 152 mm i 122 mm, dobijene poluempirijskom metodom MC DRAG.

C_{DO} . Za supersonične brzine koeficijent trenja iznosi do 15% vrednosti ukupnog aerodinamičkog koeficijenta.

Uporedni dijagram aerodinamičkog koeficijenta $C_{DO}(M)$ i $C_{DSF}(M)$, za hipotetički projektil 152 mm na osnovu tabele 1 i tabele 2, prikazan je na sl. 7.

ta klasičnom i poluempirijskom metodom MC DRAG. Metoda MC DRAG ima standardno odstupanje u odnosu na klasičnu metodu i to u subsonici ($M=0,6$) za 11,3%, u transonici ($M=1,1$)

Sl. 7 — Uporedni dijagrami $C_{DO}(M)$, $C'_{DO}(M)$, $C_{DSF}(M)$ i $C'_{DSF}(M)$

Zaključak

Prezentiran je teorijski pristup analizi graničnog sloja pri opstrujavanju ravne i krivolinijske površine. Pored toga, dat je komparativni pristup proračunu aerodinamičkog koeficijenta otpora trenja različitih autora za laminarni, prelazni i turbulentni granični sloj. Prikazan je proračun koeficijen-

za 10% i u supersonici ($M=3$) za 0,8%. Ukoliko se menja oblik vrha projektila dobijaju se različite vrednosti aerodinamičkog koeficijenta trenja [7, 9]. Minimalne vrednosti C_{DSF} dobijene su za vrh projektila kalibra 122 mm, oblika konusa (tabela 2).

Rad može poslužiti za procenu uticaja aerodinamičkog koeficijenta trenja na domet projektila.

Literatura:

- [1] Krasnov, N. F.: Aerodinamika, Moskva, 1980.
- [2] Janković, S.: Aerodinamika projektila, Mašinski fakultet, Beograd, 1978.
- [3] Hanjalić, K.: Dinamika stišljivog fluida, Svetlost, Sarajevo, 1978.
- [4] Robert, L. Mc Coy: »MC DRAG« a computer program for estimating the drag coefficients of projectiles, AD 098 110, 1981.
- [5] Rendulić, Z.: Aerodinamika, SSNO, 1984.
- [6] Šlihting, G.: Teorija pograničnog sloja, Nauka, Moskva, 1974.
- [7] Regodić, D.: Aerodinamika rotacionog tela, lekcije, VTA Beograd, 1994.
- [8] Sedov, L. I.: Ploskie zadači gidrodinamiki i aerodinamiki, Nauka, Moskva, 1966.
- [9] Regodić, D., Bojanić, Z.: Uticaj dimenzija i oblika vrha projektila na domet, VTG 3-4, 1994.