Ivan Miletić,
dipl. inž.
Zoran Veljković,
dipl. inž.

PROCENA SREDNJE VEROVATNOĆE POGREŠNE DETEKCIJE BINARNOG SIMBOLA U PRISUSTVU PROSTOPERIO- DIČNOG SIGNALA SMETNJE

Uvod

Sistemi sa proširenim spektrom nastali su iz potrebe da se u komunikacionim sistemima obezbedi pouzdan prenos informacije u uslovima izuzetno visokog nivoa signala smetnje. Pored toga što imaju visok stepen imunosti na aktivno ometanje, ovi sistemi su u velikoj meri otporni na elektronsko izviđanje, odnosno prisluškivanje.

Prenos informacije u ovim sistemima vrši se sa ekstremno malom gustinom snage korisnog signala. Ona može da bude znatno manja od nivoa šuma, što onemogućuje da se prisustvo ovakvog signala u eteru detektuje.

Proširenje spektra korisnog signala realizuje se u procesu u kome su, istovremeno, zastupljeni i elementi kriptografije, čime je poboljšana tajnost informacije.

Sistemi sa proširenim spektrom se primenjuju u telekomunikacionim sistemima, u radio-lokaciji, sistemima za navigaciju, kontrolu vazdušnog saobraćaja, vođenje raketnih projektila, kosmičkim istraživanjima, itd. [5].

Sa druge strane, ovi sistemi su izuzetno složeni, kako sa stanovišta teorijske analize, tako i sa stanovišta praktične realizacije.

Analiza osetljivosti digitalnih sistema za prenos informacije na aktivno ometanje sastoji se u nalaženju izraza

za srednju verovatnoću pogrešne detekcije binarnog simbola u prisustvu signala smetnje.

Veliki broj praktičnih realizacija sistema sa proširenim spektrom signala zasniva se na elementima standardnog sistema za digitalni prenos informacije sa CPSK modulacijom.

Zbog toga će se ovde izvršiti analiza specifičnog slučaja detekcije CPSK signala u prisustvu prostoperiodičnog signala smetnje.

Analiza i rezultati

Pretpostaviće se da se CPSK signal formira tako što pri prenosu binarne jedinice predajnik emituje prostoperiodični signal konstante amplitude A , konstantne učestanosti ω_0 i nulte faze. Pri prenosu binarne nule emituje se signal iste amplitude i učestanosti, ali faze pomerene za 180° .

Prema tome, CPSK signal može analitički da se predstavi u sledećem obliku [1]:

$$s(t) = A \cos[\omega_0 \cdot t + (1 - \mu) \cdot \pi] = (2 \cdot \mu - 1) \cdot A \cdot \cos \omega_0 \cdot t \quad (1)$$

Pri tome je $\mu = 1$ kada se u sistemu prenosi binarna jedinica, odnosno $\mu = 0$ kada se prenosi binarna nula.

Na prijemnoj strani, osim korisnog signala, nalazi se i aditivni stacio-

narni šum koji ima Gausovu raspodelu, a potiče od samih elemenata prijemnika ili od aktivnog ometanja. S obzirom na to da prijemnici na svom ulazu imaju filter propusnik raspona učestanosti, podešen na noseću učestanost ω_0 , aditivni Gausov šum na izlazu iz tog filtera može se predstaviti u sledećem obliku [2]:

$$n(t) = x \cdot \cos \omega_0 \cdot t - y \cdot \sin \omega_0 \cdot t \quad (2)$$

gde su $x(t)$ i $y(t)$ nezavisne slučajne promenljive sa Gausovom raspodelom.

Pored ovog aditivnog stacionarnog šuma, korisnom signalu se dodaje i smetnja za koju će se pretpostaviti da je prostoperiodični signal konstantne amplitude I , učestanosti ω_i i slučajne faze α_i [5]:

$$i(t) = I \cdot \cos(\omega_i \cdot t + \alpha_i) = I \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Theta) \quad (3)$$

Signal na ulazu u prijemnik predstavlja sumu CPSK signala, uskopojasnog Gausovog šuma i prostoperiodičnog signala smetnje, što je prikazano na slici 1:

$$\begin{aligned} S_i(t) &= s(t) + n(t) + i(t) = \\ &= (2 \cdot \mu - 1) \cdot A \cdot \cos \omega_0 \cdot t + x \cdot \cos \omega_0 \cdot t - \\ &\quad - y \cdot \sin \omega_0 \cdot t + I \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Theta) = \\ &= [(2 \cdot \mu - 1) \cdot A + I \cdot \cos \Theta + x] \cdot \cos \omega_0 \cdot t - \\ &\quad - (I \cdot \sin \Theta + y) \cdot \sin \omega_0 \cdot t \end{aligned} \quad (4)$$

Sl. 1 — Blok šema demodulatora CPSK signala kada je signal predajnika u fazi sa lokalno generisanim referentnim signalom

Razmatraće se dva slučaja:

1. slučaj:

U prijemniku je moguće lokalno generisati sinfazni referentni signal koji je tačno u fazi sa signalom predajnika.

Posle množenja i NF filtriranja komponentata tog proizvoda iz raspona učestanosti oko ω_0 u kolu sa slike 1, dobija se NF signal na osnovu koga se vrši binarno odlučivanje:

$$v(t) = (2 \cdot \mu - 1) \cdot A + I \cdot \cos \Theta + x \quad (5)$$

Postupak detekcije binarnog simbola sastoji se u tome da se vrednost anvelope ulaznog signala koji se odmerava na izlazu NF filtera poredi sa određenim pragom odlučivanja, b .

Ukoliko je, pri tome, vrednost odmerka veća od praga odlučivanja, konstatuje se da je signal na ulazu postojao, odnosno da se u tom intervalu prenosi binarna jedinica.

Ukoliko je vrednost odmerka u trenutku odlučivanja manja od postavljenog praga, konstatuje se da signal na ulazu nije postojao, odnosno da se u tom intervalu prenosi binarna nula.

Pretpostavlja se da se u sistemu prenosi binarna jedinica.

Da bi se odredio izraz za verovatnoću pogrešne detekcije binarne jedinice, neophodno je odrediti funkciju gustine verovatnoće izlaznog signala NF filtera [4]:

$$p(v/1) = (1/\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N}) \cdot \exp[-(v - (A + I \cdot \cos \Theta))^2/2 \cdot N] \quad (6)$$

Verovatnoća pogrešne detekcije binarne jedinice u sistemima sa CPSK modulacijom može da se predstavi u sledećem obliku:

$$p(e/1) = P(v < b) = \int_{-\infty}^b p(v/1) dv \quad (7)$$

ili posle zamene relacije (6) u relaciji (7),

$$p(e/1) = \int_{-\infty}^b (1/\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N}) \cdot \exp[-(v - (A + I \cdot \cos \Theta))^2/2 \cdot N] dv \quad (8)$$

Koristeći relaciju (8) i činjenicu da je

$$\int_{-\infty}^b p(v/1)dv = 1 - \int_b^{\infty} p(v/1)dv \quad (9)$$

dobija se:

$$p(e/1) = 1 - \int_b^{\infty} (1/\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N}) \cdot \exp[-(v - (A + I \cdot \cos\Theta))^2 / 2 \cdot N] dv \quad (10)$$

Uvođenjem smene:

$$v = t\sqrt{2 \cdot N} + (A + I \cdot \cos\Theta) \\ dv = \sqrt{2 \cdot N} \cdot dt \quad (11)$$

dobija se:

$$p(e/1) = 1 - \int_m^{\infty} (1/\sqrt{\pi}) \exp(-t^2) dt, \\ m = \frac{b - (A + I \cdot \cos\Theta)}{\sqrt{2N}} \quad (12)$$

gde je b — prag odlučivanja.

Imajući u vidu definiciju funkcije greške kao i njenog komplementa (Error Function, Complement Error Function), tj.

$$\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2) dt \\ \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \\ = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

relacija (12) može se napisati kao:

$$p(e/1) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{b - (A + I \cdot \cos\Theta)}{\sqrt{2 \cdot N}} \right) \quad (13)$$

Radi lakše analize uzima se da je prag odlučivanja, $b=0$, pa je:

$$p(e/1) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{(A + I \cdot \cos\Theta)}{\sqrt{2 \cdot N}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A + I \cdot \cos\Theta}{\sqrt{2 \cdot N}} \right) \quad (14)$$

Relacija (14) može se napisati u sledećem obliku:

$$p(e/1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{(A + I \cdot \cos\Theta)^2}{2 \cdot N}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2}{2 \cdot N} \left(1 + \frac{I}{A} \cos\Theta\right)^2} \right) \quad (15)$$

odnosno

$$p(e/1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}[(1 + \sqrt{s} \cos\Theta)/\sqrt{y}] = \\ = p(e/1, \Theta) \quad (16)$$

pri čemu je:

$$y = \frac{A^2}{2 \cdot N} \text{ — odnos signal-šum,}$$

$$s = \frac{I^2}{A^2} \text{ — odnos snage signala smetnje i snage korisnog signala.}$$

Vidi se da dobijena verovatnoća zavisi od parametra Θ . Pod pretpostavkom da su sve vrednosti faze Θ u rasponu od 0 do 2π u trenutku odmeravanja signala $v(t)$ jednako verovatne, srednja verovatnoća pogrešne detekcije binarne jedinice računa se na osnovu izraza [3]:

$$p(e/1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e/1, \Theta) d\Theta \quad (17)$$

Identičnim postupkom dokazuje se da je istom relacijom definisana i verovatnoća pogrešne detekcije binarne nule $p(e/0)$:

$$p(e/0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e/0, \Theta) d\Theta \quad (18)$$

Prema tome, pod pretpostavkom da se binarni simboli, nula i jedinica, u sistemu pojavljuju jednako verovatno, srednja verovatnoća pogrešne detekcije binarnog simbola pri demodulaciji CPSK signala u prisustvu prostoperiodičnog signala smetnje $P(e)$ je:

$$P(e) = p(0)p(e/0) + p(1)p(e/1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e/1, \Theta) d\Theta \quad (19)$$

Integral iz ove jednačine nije moguće eksplicitno izračunati, pa se za njegovo izračunavanje koriste numeričke metode. Korišćenjem datog potprograma, integral u relaciji (18) moguće je zameniti sumom oblika:

$$p(e) \cong \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N p(e/1, \Theta_i) \Delta\Theta_i \quad (20)$$

Ako se usvoji dovoljno mali konstantni korak $\Delta\Theta_i = \Delta\Theta = \frac{2 \cdot \pi}{N}$, relacija (20) poprima oblik:

$$p(e) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(e/1, i\Delta\Theta) \quad (21)$$

2. slučaj:

Sinfaznost signala predajnika i lokalno generisanog referentnog signala na prijemnoj strani je narušena, pa postoji fazni pomak $\Delta\Phi$ između njih.

Blok-šema demodulatora za ovaj slučaj data je na slici 2.

Sl. 2 — Blok šema demodulatora CPSK signala kada signal predajnika nije u fazi sa lokalno generisanim referentnim signalom

Pod pretpostavkom da se u sistemu prenosi binarna jedinica, ulazni signal je oblika:

$$S_i(t) = [(2 \cdot \mu - 1) \cdot A + I \cdot \cos\Theta + x] \cos\omega_0 \cdot t - (I \cdot \sin\Theta + y) \sin\omega_0 \cdot t$$

a lokalno generisani signal:

$$z(t) = 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Delta\Phi) \quad (22)$$

Nakon množenja ova dva signala i NF filtriranja dobija se:

$$v(t) = (2 \cdot \mu - 1) \cdot A \cdot \cos(\Delta\Phi) + I \cdot \cos(\Theta - \Delta\Phi) + x \cdot \cos(\Delta\Phi) + y \cdot \sin(\Delta\Phi) = A \cdot \cos(\Delta\Phi) + I \cdot \cos(\Theta - \Delta\Phi) + \zeta, \quad (23)$$

$$\zeta = x \cdot \cos(\Delta\Phi) + y \cdot \sin(\Delta\Phi)$$

Promenljiva ζ predstavlja ekvivalentni Gausov šum, čiji su parametri određeni sledećom relacijom:

$$\bar{\zeta} = \bar{x} \cdot \cos(\Delta\Phi) + \bar{y} \cdot \sin(\Delta\Phi) = 0$$

$$\sigma_{\zeta}^2 = \bar{x}^2 \cdot \cos^2(\Delta\Phi) + \bar{y}^2 \cdot \sin^2(\Delta\Phi) = N \quad (24)$$

Relacija (23) je posledica činjenice da promenljive x i y imaju Gausovu raspodelu sa nultom srednjom vrednošću ($\bar{\zeta} = 0$) i varijansom $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = N$.

Sličnim postupkom primenjenim kao u relacijama od (6) do (15), za verovatnoću pogrešne detekcije binarne jedinice dobija se:

$$p(e/1) = \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2}{2 \cdot N} \cos^2(\Delta\Phi)} \cdot \sqrt{\left[1 + \frac{I}{A} (\cos\Theta + \sin\Theta \operatorname{tg}(\Delta\Phi))\right]^2} \right) \quad (25)$$

odnosno:

$$p(e/1) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}[(\cos(\Delta\Phi) + \sqrt{s} \cos(\Theta - \Delta\Phi)) \sqrt{y}] = p(e/1, \Theta) \quad (26)$$

Prema tome, izraz za srednju verovatnoću pogrešne detekcije binarnog simbola u ovom slučaju postaje:

$$P(e) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} p(e/1, \nu) d\Theta \quad (27)$$

Analogno prvom slučaju, kada nije postojao fazni pomak, i ovde se za rešavanje integrala u relaciji (27) koriste iste numeričke metode, pa je:

$$P(e) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(e/1, i\Delta\Theta), \quad (28)$$

$$\Delta\Theta = \frac{2\pi}{N}$$

Potprogram za izračunavanje funkcije ERF(X)

FUNCTION ERF(X)

T=1/(1+0.3275911*X)

ERF=1-(0.254829592*T-0.28449673*
T**2+*1.421413741**
3-1.453152027*T**4+*1.061405429*
T**5)*EXP(-X**2)

RETURN

END

Zaključak

Analiziran je uticaj prostoperiodičnog signala smetnje na prijem korisnog signala u sistemu sa proširenim spektrom, pri čemu je primenjena demodulacija CPSK signala.

Razmatrana su dva slučaja, i to:

1. U prijemu je moguće lokalno generisati sinfazni referentni signal koji je tačno u fazi sa signalom predajnika.

2. Sinfaznost je narušena i zbog toga postoji fazni pomak između signala predajnika i lokalno generisanog referentnog signala na prijornoj strani.

U oba slučaja dobijene su relacije za srednju verovatnoću greške (21) i (28), koje su izražene preko funkcije greške, a za čije brzo izračunavanje je priložen potprogram.

Uočava se, i u jednom i u drugom slučaju, da se sa povećanjem nivoa signala smetnje znatno povećava srednja verovatnoća pogrešne detekcije binarnog simbola.

Poređenjem relacija (15) i (25), vidi se da postojanje fazne greške $\Delta\Phi$ u sinfaznosti predajnog i lokalno generisanog referentnog signala na prijornoj strani, dovodi do istovremenog smanjenja odnosa signal-šum i povećanja odnosa snage signala smetnje i snage korisnog signala, čime se verovatnoća pogrešne detekcije binarnog simbola u prisustvu fazne greške znatno povećava u odnosu na slučaj kada fazna greška ne postoji.

Literatura:

- [1] GLIŠIĆ, G. S.: Error performance of CPSK System in the presence of interference, *Electronic Letters*, Vol. 15, N.3, pp. 97—99, 1979.
- [2] GLIŠIĆ, G. S.: The Error Performance of CPSK and DPSK Communication Systems in the Presence of Interference, *Research Report*, Cranfield Institute of Technology, September 1977.

- [3] DIXON R. C.: *Spread Spectrum Systems*, JOHN WILLEY, New York 1976.
- [4] CAMERON G. A.: *Spread Spectrum Technology Effecting Military Communication*, *Naval Research Review*, Vol. 30, No. 9, pp. 19—36, 1977.
- [5] GLIŠIĆ, G. S.: *Prenos signala sa ekspanovanim spektrom*, Beograd 1981.