Mr Zoran Bojanić,
major, dipl. inž.

MATEMATIČKI MODEL KRETANJA PROJEKTILA POGODAN ZA IMPLEMENTACIJU U SISTEMIMA ZA UPRAVLJANJE VATROM

Rezime:

Prezentiran je matematički model koji je nastao prilagođavanjem matematičkog modela krutog tela sa šest stepeni slobode kretanja za projekte malog dometa. Izvršena je transformacija i delimična linearizacija referentnog modela. Numerička integracija diferencijalnih jednačina realizovana je podelom sistema diferencijalnih jednačina na dva podsistema sa bitno različitim frekvencijama. Analizirana je tačnost modela i mogućnost implementacije na mikroprocesorskim sistemima i digitalnim signal-procesorima.

Ključne reči: matematički model, projektil, jednačine kretanja, transformisane jednačine, numerička integracija, implementacija modela.

MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF PROJECTILES SUITABLE FOR IMPLEMENTATION IN FIRE CONTROL SYSTEMS

Summary:

In the article is presented a mathematical model developed by adaptation of a mathematical model of a solid body with six degrees of freedom of movement for small range projectiles. A transformation and partial linearization of a referent model has been made. Numerical integration of differential equations has been made by dividing the different equations system to two sub-systems with basically different frequencies. The accuracy of the model and the possibility of its implementation in microprocessor systems and digital signal processors have been analysed.

Key words: mathematical model, projectile, movement equations, transformation of equation, numerical integration, model implementation.

Uvod

Kada se usvoji da je projektil kruto telo sa šest stepeni slobode kretanja ili šematizovano elastično telo, matematički model takvog projektila ne može se koristiti za real-time simulacije u sistemima za upravljanje vatrom zbog toga što je taj model kompleksan i neekonomičan sa aspekta potrošnje računarskog vremena. Koliko god da

je brzina procesiranja savremenih balističkih računara velika, ona još uvek ne omogućava da se u sistemima za upravljanje vatrom reši, u zadovoljavajućem vremenskom intervalu, inverzni problem dinamike leta. Inverzni problem dinamike leta u ovom slučaju podrazumeva određivanje početnih elemenata projektila kada je zadata padna tačka putanje projektila koji se želi dovesti u kontakt sa ciljem. Da

bi se inverzni problem rešio korišćenjem matematičkog modela krutog tela sa šest stepeni slobode kretanja tada je potrebno sistem od 12 nelinearnih diferencijalnih jednačina transformisati u sistem jednačina koji će obezbediti, na adekvatnom hardveru, bitno smanjenje vremena procesiranja. Uslov koji mora da zadovolji transformisani model jeste da u njemu treba da se zadrži postavljeni kriterijum u pogledu tačnosti aproksimacije polaznog matematičkog modela tela sa šest stepeni slobode kretanja.

Prezentiran je model koji je nastao transformacijom i delimičnom linearizacijom matematičkog modela projektila kao krutog tela sa šest stepeni slobode kretanja. Analizirana je i mogućnost implementacije tako transformisanog modela na određenim digitalnim sistemima.

Pored izbora matematičkog modela projektila, na vreme procesiranja utiče izbor metode za numeričku integraciju i veličina koraka integracije. Integracija transformisanog sistema diferencijalnih jednačina realizovana je numeričkom metodom Runge-Kutta četvrtog reda sa optimalnom veličinom koraka integracije. Optimalna veličina koraka je kompromis između tri kontradiktorna zahteva: tražene tačnosti, numeričke stabilnosti i vremena procesiranja. Dodatni uslov kod real-time simulacija u sistemima za upravljanje vatrom jeste da se korak jednostavno određuje i kontroliše kako se ne bi trošilo nepotrebno vreme. U radu je korišćena metoda »kvazi optimalne kontrole koraka numeričke integracije«. Po ovoj metodi, korak se određuje na osnovu maksimalnih sopstvenih vrednosti matrice od dela transformisanih jednačina koje opisuju kretanje centra mase projektila i na osnovu zahtevane tačnosti.

Polazne jednačine matematičkog modela kretanja projektila koji je kruto telo

Polazne ili osnovne jednačine kretanja projektila, kada se usvoji da je on kruto telo kome se centar mase kreće, a ono samo se kreće oko centra mase u odnosu na Zemlju koja miruje, mogu imati vektorsku formu [1].

Dinamičke jednačine translacije centra mase i rotacije oko centra mase su:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R}^A + \vec{F} + \vec{G} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}^A + \vec{M}^F \quad (2)$$

Kinematske jednačine su:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (3)$$

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \quad (4)$$

gde je:

m	— masa projektila,
I	— tenzor inercije,
$\vec{V}$	— brzina centra mase projektila,
$\vec{\omega}$	— ugaona brzina projektila,
$\vec{R}^A$	— aerodinamička sila
$\vec{M}^A$	— aerodinamički momenat,
$\vec{F}$	— reaktivna sila,
$\vec{M}^F$	— reaktivni momenat,
$\vec{G}$	— sila Zemljine teže,
$\vec{r}$	— vektor položaja centra mase.

Pored zakona promene količine i momenta količine kretanja u [2] je dato još šest različitih zakona mehanike

koji mogu poslužiti kao osnove algoritma nad kojim se vrše simboličke i algebarske operacije, pošto se vektorske jednačine (1 do 4) moraju prevesti u sistem koji se može procesirati.

U proizvoljnom koordinatnom sistemu $N(P; x_n, y_n, z_n)$ koji rotira ugaonom brzinom $\vec{\Omega}_n$ u odnosu na inercijalni koordinatni sistem, matični oblik vektorskih jednačina (1 do 4) biće:

$$m(\dot{V}_N + \tilde{\Omega}_{nN} V_N) = R_N^A + F_N + G_N \quad (5)$$

$$I_N \dot{\omega}_N + (\dot{I}_N + \tilde{\Omega}_{nN} I_N) \omega_N = M_N^A + M_N^F \quad (6)$$

$$\dot{r} = L_{ON} V_N \quad (7)$$

$$\dot{s} = R^{-1} \omega_N \quad (8)$$

gde je:

$\tilde{\Omega}_{nN}$ — kososimetrična matrica ugao-nih brzina $[p \ q \ r]^T$,

L_{ON} — matrica transformacije iz $N(P; x_n, y_n, z_n)$ u $O(O; x_o, y_o, z_o)$,

R^{-1} — inverzna matrica koja povezuje ugaone brzine i izvode uglova,

s — stav projektila; položaj uzdužne ose simetrije u prostoru dat je uglovima $s = [\Phi \ \Theta \ \Psi]^T$.

Koordinatni ili skalarni oblik jednačina dobija se kada se dati sistem matičnih jednačina projektuje na ose odgovarajućeg koordinatnog sistema.

Za matematičko modeliranje prostornog kretanja neupravljivih i nevođenih projektila malog dometa (do 20 km) koriste se osnovni $O(x_o, y_o, z_o)$, geodetski $G(P; x_g, y_g, z_g)$ i aerobalistički $B(P; x, \tilde{y}, \tilde{z})$ koordinatni sistemi.

Osnovni koordinatni sistem $O(O; x_o, y_o, z_o)$ ima početak na mestu lansiranja. Osa- x_o je horizontalna u pravcu

cilja, osa- y_o je vertikalna i usmerena na više, a z_o -osa čini desni trijedar sa prve dve ose. Kretanje u osnovnom koordinatnom sistemu posmatra se kao apsolutno.

Geodetski koordinatni sistem $G(P; x_g, y_g, z_g)$ ima početak u centru mase projektila P. Osa- z_g je vertikalna nadole, x_g -osa i y_g -osa čine horizontalnu ravan kroz centar mase projektila. Za vreme leta projektila malog dometa geodetski koordinatni sistem ne rotira.

Aerobalistički koordinatni sistem $B(P; x, \tilde{y}, \tilde{z})$ ima početak u centru mase projektila P. Osa- x je uzdužna osa projektila (obično glavna uzdužna osa inercije), osa- $\tilde{z}$ je u vertikalnoj ravni upravna na osu x , dok osa- $\tilde{y}$ čini desni trijedar sa prethodne dve ose, (slika 1). Svi koordinatni sistemi dati su prema literaturi [1].

Sl. 1 — Položaj projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem

Dinamičke jednačine sila i momenata mogu biti date u aerobalističkom koordinatnom sistemu $B(P; x, \tilde{y}, \tilde{z})$, kinematske jednačine rotacije oko centra mase u geodetskom sistemu

koordinata $G(P; x_g, y_g, z_g)$, a kinematske jednačine translacije centra mase u osnovnom koordinatnom sistemu $O(O; x_o, y_o, z_o)$.

Prilikom izvođenja koordinatnih ili skalarnih jednačina podrazumeva se da je: projektil kruto telo koje ima šest stepeni slobode kretanja; zanemarena rotacija i zakrivljenost Zemlje; projektil rotira u letu, tj. ima osnosimetričan elipsoid inercije (redukovani tenzor inercije $I_N = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$).

Koordinatni ili skalarni oblik jednačina (5 do 8) za projekte male dometa u aerobalističkom koordinatnom sistemu glasi:

$$\dot{u}_k = -\tilde{q} \tilde{w}_k + \tilde{r} \tilde{v}_k + X/m - g \sin \Theta,$$

$$\dot{\tilde{v}}_k = p_b \tilde{w}_k - \tilde{r} u_k + \tilde{Y}/m,$$

$$\dot{\tilde{w}}_k = -p_b \tilde{v}_k + \tilde{q} u_k + \tilde{Z}/m + g \cos \Theta,$$

$$\dot{p} = L/I_x,$$

$$\dot{\tilde{q}} = p_b \tilde{r} + (-I_x p \tilde{r} + \tilde{M})/I_y, \quad (9)$$

$$\dot{\tilde{r}} = -p_b \tilde{q} + (I_x p \tilde{q} + \tilde{N})/I_z,$$

$$\dot{x}_o = u \cos \Theta \cos \Psi - \tilde{v} \sin \Psi + \tilde{w} \sin \Theta \cos \Psi$$

$$\dot{y}_o = u \sin \Theta - \tilde{w} \cos \Theta$$

$$\dot{z}_o = u \cos \Theta \sin \Psi + \tilde{v} \cos \Psi + \tilde{w} \sin \Theta \sin \Psi$$

$$\dot{\Phi} = p + \tilde{r} \tan \Theta,$$

$$\dot{\Theta} = \tilde{q},$$

$$\dot{\Psi} = \tilde{r} / \cos \Theta.$$

Ovom sistemu pridružena je algebarska jednačina:

$$p_b = -\tilde{r} \tan \Theta.$$

U jednačinama (9) su:

$[u \tilde{v}_k \tilde{w}_k]^T$ — komponente brzine leta projektila,

$[p \tilde{q} \tilde{r}]^T$ — komponente ugaone brzine projektila,

$[X \tilde{Y} \tilde{Z}]^T$ — komponente aerodinamičke sile,

$[L \tilde{M} \tilde{N}]^T$ — komponente aerodinamičkog momenta,

$[\Phi \Theta \Psi]^T$ — uglovi položaja uzdužne ose simetrije projektila,

p_b — komponenta ugaone brzine aerobalističkog koordinatnog sistema.

Komponente aerodinamičke sile i aerodinamičkog momenta date su sledećim jednačinama:

$$X = \frac{\rho V^2}{2} S \left[c_{x0} + c_{x\alpha^2} (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) \right],$$

$$\tilde{Y} = \frac{\rho V^2}{2} S \left[c_{Y\alpha} \tilde{\alpha} - c_{N\alpha} \tilde{\beta} \right],$$

$$\tilde{Z} = \frac{\rho V^2}{2} S \left[-c_{Y\alpha} \tilde{\beta} - c_{N\alpha} \tilde{\alpha} \right],$$

$$L = \frac{\rho V^2}{2} S \cdot d c_l, \quad (10)$$

$$\tilde{M} = \frac{\rho V^2}{2} S d \left[c_{m\alpha} \tilde{\alpha} + c_{n\alpha} \tilde{\beta} + c_{m\alpha} \dot{\tilde{\alpha}}^* + c_{mq} \tilde{q}^* \right],$$

$$\tilde{N} = \frac{\rho V^2}{2} S d \left[-c_{m\alpha} \tilde{\beta} + c_{n\alpha} \tilde{\alpha} - c_{m\alpha} \dot{\tilde{\beta}}^* + c_{mq} \tilde{r}^* \right],$$

gde je:

$C_{x0}, \dots, C_{m\alpha}, \dots, C_{mq}$ — derivati koeficijenta koji su funkcija Mahovog broja M_a ,

(*) — ugaone brzine koje se deluju množenjem sa $d/(2V)$ ili sa d/V ,

ρ — gustina vazduha,

S — površina poprečnog preseka projektila.

Napadni ugao $\tilde{\alpha}$, ugao klizanja $\tilde{\beta}$ i njihovi izvodi određeni su iz sledećih izraza:

$$\tilde{\alpha} = \arctg(\tilde{w}/u) \quad \tilde{\beta} = \arcsin(\tilde{v}/V)$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \frac{\dot{\tilde{w}}u - \tilde{w}\dot{u}}{u^2 + \tilde{w}^2} \quad \dot{\tilde{\beta}} = \frac{\dot{\tilde{v}}V - \tilde{v}\dot{V}}{V\sqrt{V^2 - \tilde{v}^2}}$$

U ovim izrazima su:

$$\begin{bmatrix} u \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \\ \tilde{v}_k \\ \tilde{w}_k \end{bmatrix} - L_{BG} \begin{bmatrix} V_{wx} \\ V_{wy} \\ V_{wz} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{\tilde{v}}_k \\ \dot{\tilde{w}}_k \end{bmatrix} + \tilde{\Omega} L_{BG} \begin{bmatrix} V_{wx} \\ V_{wy} \\ V_{wz} \end{bmatrix},$$

$$V = \sqrt{u^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}$$

gde je:

L_{BG} — matrica transformacije iz geodetskog u balistički koordinatni sistem.

Veličina koraka numeričke integracije za sistem jednačina (9) odre-

đuje se iz uslova da korak mora biti manji od desetog dela puta perioda nutacije projektila [3].

Transformisane jednačine matematičkog modela kretanja projektila

U posebnom slučaju sistem jednačina (9) može se modifikovati uvođenjem izvesnih pojednostavljenja da bi se smanjio nivo njihove složenosti. Ovom modifikacijom javljaju se inherentne greške, ali se zato vreme procesiranja bitno smanjuje izborom pogodne numeričke metode i/ili načina rešavanja sistema diferencijalnih jednačina.

Pod pojmom transformisani podrazumeva se matematički model sistema koji je strukturno pojednostavljen, a može biti i nižeg reda u odnosu na polazni opšti ili referentni model. Transformisani model treba da zadovolji unapred postavljene kriterijume u pogledu tačnosti aproksimacije polaznog matematičkog modela. Ovi kriterijumi određeni su ciljevima konkretnog zadatka, odnosno primenom modela koji mora zadovoljiti zahtev sistema koji se projektuje.

Transformacija jednačina (9) realizuje se pod pretpostavkom da atmosfera miruje. Pretpostavka da nema vetra implicira da je brzina projektila u odnosu na Zemlju jednaka aerodinamičkoj brzini, pa se u tom slučaju mogu uspostaviti veze između uglova $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \gamma, \kappa, \Theta, \Psi$.

Komponente aerodinamičke brzine u aerobalističkom koordinatnom sistemu $B(P; x, \tilde{y}, \tilde{z})$; su:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \tilde{\beta} \cos \tilde{\alpha}, \\ \tilde{v} &= V \sin \tilde{\beta}, \\ \tilde{w} &= V \cos \tilde{\beta} \sin \tilde{\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Neupravljivi i nevođeni projektili konstruišu se tako da lete sa malim uglom koji zaklapa osa simetrije u odnosu na pravac aerodinamičke brzine ($\tilde{\delta} < 10^\circ$). U tom slučaju su i uglovi $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ takođe mali, pa se (11) u tom smislu transformiše u

$$\begin{aligned} u &= V, \\ \tilde{v} &= V\tilde{\beta}, \\ \tilde{w} &= V\tilde{\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Derivacije komponenti vektora brzine (11) su:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{V}, \\ \dot{\tilde{v}} &= V\dot{\tilde{\beta}} + \tilde{v}\dot{\tilde{\beta}}, \\ \dot{\tilde{w}} &= V\dot{\tilde{\alpha}} + \tilde{w}\dot{\tilde{\alpha}}. \end{aligned} \quad (13)$$

U uslovima kada nema vetra $\vec{V}_w = 0$, veze između uglova $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, γ , κ , Θ , Ψ dobijaju se iz:

$$\begin{bmatrix} V \cos \gamma \cos \kappa \\ V \cos \gamma \sin \kappa \\ -V \sin \gamma \end{bmatrix} = L_{BG}^T \begin{bmatrix} V \\ V\tilde{\beta} \\ V\tilde{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

gde je:

L_{BG} — matrica transformacija iz geodetskog u aerobalistički koordinatni sistem, ima oblik

$$L_{BG} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ \sin \Theta \cos \Psi & \sin \Theta \sin \Psi & \cos \Theta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Nakon supstitucije množenja matrica i eliminacije V dobijaju se relacije između uglova

$$\Theta = \tilde{\alpha} + \gamma,$$

$$\Psi = \kappa - \tilde{\beta} / \cos \gamma. \quad (16)$$

Kinematičke jednačine veza između projekcija ugaone brzine i izvoda uglova, kada su mali uglovi, transformišu se tako da se mogu zanemariti male veličine drugog i višeg reda [3]. Jednačina iz (9)

$$\dot{\tilde{r}} = \dot{\Psi} \cos \Theta \quad (17)$$

korišćenjem relacija (16), transformiše se u:

$$\dot{\tilde{r}} = \dot{\kappa} \cos \gamma - \tilde{\beta} \quad (18)$$

Za prvu jednačinu iz (16) očigledno je da nakon diferenciranja postaje

$$\dot{\Theta} = \dot{\gamma} + \dot{\tilde{\alpha}} \quad (19)$$

U (9) poprečne brzine leta $\tilde{v}$ i $\tilde{w}$ male su veličine u odnosu na brzinu leta V , a takođe su male i ugaone brzine oko poprečnih osa $\tilde{q}$ i $\tilde{r}$ u odnosu na ugaonu brzinu projektila p oko uzdužne ose. Za uglove propinjanja ose projektila $\Theta < 80^\circ$ i komponenta p_b je mala veličina istog reda, a za položene putanje kad je Θ mali ugao, p_b je mala veličina drugog reda. Kako se zanemaruju male veličine drugog i višeg reda, iz daljeg razmatranja izostavljaju se p_b i njegovi proizvodi.

Ako se zanemare proizvodi malih veličina višeg reda u odnosu na γ i $\kappa \cos \gamma$ nakon supstitucije i eliminacija dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{V}/V &= X/mV + \tilde{\beta}\dot{\tilde{Y}}/mV + \tilde{\alpha}\dot{\tilde{Z}}/mV - g \sin \gamma / V, \\ \dot{\kappa} \cos \gamma &= \dot{\tilde{Y}}/mV - \dot{\tilde{V}}\tilde{\beta}/V, \\ \dot{\gamma} &= -\dot{\tilde{Z}}/mV - g \cos \gamma / V + \dot{\tilde{V}}\tilde{\alpha}/V. \end{aligned} \quad (20)$$

Nakon uvođenja izraza za sile $X, \tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{V}/V &= \frac{\rho V}{2m} S \left[c_{x0} + (c_{x\alpha 2} - c_{N\alpha}) (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) \right] - \frac{g \sin \gamma}{V} \\ \dot{x} \cos \gamma &= \frac{\rho V}{2m} S \left[c_{Y\alpha} \tilde{\alpha} - (c_{N\alpha} + c_{x0}) \tilde{\beta} \right] \\ \dot{\gamma} &= \frac{\rho V}{2m} S \left[c_{Y\alpha} \tilde{\beta} + (c_{N\alpha} + c_{x0}) \tilde{\alpha} \right] - \frac{g \cos \gamma}{V} \end{aligned} \quad (21)$$

Komponente aerodinamičke brzine, projektovane na ose geodetskog koordinatnog sistema, dobijaju se iz

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= V \cos \gamma \cos \kappa, \\ \dot{y}_g &= V \cos \gamma \sin \kappa, \\ \dot{z}_g &= -V \sin \gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

Jednačine (21) i (22) mogu se transformisati ako se uvede »bezdimezionalni put« s^* .

$$s^* = s/d = \frac{1}{d} \int_{t_0}^t V dt$$

Izvod po s^* označava se sa $(\cdot)$. Veza između izvoda brzine po vremenu i izvoda po »bezdimezionalnom putu« je:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{ds^*} \frac{ds^*}{dt} = \frac{dV}{ds^*} \frac{d}{dt} \\ \left(\frac{s}{d} \right) &= \frac{dV}{ds^*} \frac{V}{d} = V' \frac{V}{d}, \end{aligned}$$

Za aerodinamičke koeficijente važi sledeća relacija:

$$\left(\quad \right)^* = \frac{\rho d}{2m} S \left(\quad \right).$$

Matrica transformacije iz geodetskog u osnovni koordinatni sistem L_{OG} je oblika:

$$L_{OG} = L_x(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preoblikovanjem izraza za $\dot{p}$ iz (9), transformisani matematički model kretanja projektila dobija sledeći oblik:

$$\frac{V'}{V} = c_{x0}^* + (c_{x\alpha 2}^* - c_{N\alpha}^*) (\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2) - \frac{g d \sin \gamma}{V^2}, \quad (23)$$

$$\gamma' = c_{Y\alpha}^* \tilde{\beta} + (c_{N\alpha}^* + c_{x0}^*) \tilde{\alpha} - \frac{g d \cos \gamma}{V^2} \quad (24)$$

$$\kappa' \cos \gamma = c_{Y\alpha}^* \tilde{\alpha} - (c_{N\alpha}^* + c_{x0}^*) \tilde{\beta}, \quad (25)$$

$$x'_0 = d \cos \gamma \cos \kappa, \quad (26)$$

$$y'_0 = d \sin \gamma, \quad (27)$$

$$z'_0 = d \cos \gamma \sin \kappa, \quad (28)$$

$$p' = c_{ip}^* (\tilde{r}_x)^{-2} p^* \frac{V}{d} \quad (29)$$

$$t = \frac{d}{V} \quad (30)$$

Metod za integraciju transformisanih jednačina

Integracijom jednačina koje određuju kretanje centra mase projektila (23 do 30) treba da se dobiju funkcije $V(s^*)$, $\gamma(s^*)$ i $\kappa(s^*)$. Za tu integraciju potrebno je poznavati $\alpha(s^*)$ i $\beta(s^*)$. Ovi uglovi mogu se odrediti iz kompleksne nehomogene diferencijalne jednačine kretanja ose projektila u odnosu na pravac brzine izvedene po napadnom uglu za nezavisno promenljivu s^* . Ta jednačina, za projekte bez reaktivne sile, glasi [1]:

$$\tilde{\xi}'' + (H - iP) \tilde{\xi}' - (M + iPT) \tilde{\xi} = G_1 \quad (31)$$

gde je:

$\xi = \tilde{\beta} + i\tilde{\alpha}$ — kompleksni napadni ugao,

$$P = \frac{I_x}{I_y} \frac{pd}{V},$$

$$H = c_{N\alpha}^* - 2c_D^* - (c_{mq}^* + c_{m\alpha}^*) (\tilde{r}_y)^{-2},$$

$$T = c_{N\alpha}^* - c_D^* + c_{mp\alpha}^* (\tilde{r}_x)^{-2},$$

$$\vec{M} = [c_{m\alpha}^* + c_{m\alpha}^* \quad c_D^* - c_{mq}^* \quad c_{N\alpha}^*] (\tilde{r}_y)^{-2},$$

$$G_1 = -i \frac{d g \cos \gamma}{V^2} \left[-c_D^* + iP + c_{mq}^* (\tilde{r}_y)^{-2} \right]$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, \quad \tilde{r}_x = \frac{r_x}{d},$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}, \quad \tilde{r}_y = \frac{r_y}{d}.$$

Promena kompleksnog napadnog ugla $\tilde{\xi}$ može se geometrijski interpretirati kao kretanje tačke prodora uzdužne ose projektila u ravni upravnoj na vektor brzine na jediničnom rastojanju od centra mase, (slika 2).

Oblik te krive za jedan određeni projektil zavisice od početnih poremećaja i parametara kretanja. Koeficijenti H , T i M eksplicitno su nezavisni

Sl. 2 — Položaj projektila u odnosu na ravan normalnu na vektor brzine

od V . Oni se menjaju samo ako se menjaju aerodinamički koeficijenti sa promenom Mahovog broja. Kako se P i G_1 takođe lagano menjaju duž putanje, moguća je primena metode »zamrzavanja koeficijenata«. Ona se primenjuje kada se koeficijenti diferencijalne jednačine menjaju znatno sporije od zavisno promenljive, u ovom slučaju $\tilde{\xi}$, pa se smatraju konstantnim dok se ne odredi rešenje, a onda se u rešenju koeficijenti ponovo smatraju promenljivim.

Opšte rešenje kompleksne nehomogene diferencijalne jednačine jeste zbir homogenog i partikularnog rešenja $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_h + \tilde{\xi}_p$. Na homogeno rešenje utiču početni poremećaji, a na partikularno rešenje gravitaciono ubrzanje.

Homogeno rešenje predstavljeno je sumom dva oblika oscilovanja [1]:

$$\tilde{\xi}_h = K_1 \exp(i\Phi_1) + K_2 \exp(i\Phi_2) \quad (32)$$

gde je:

$$K_j = K_{j0} \exp(\lambda_j s^*), \quad (j=1,2),$$

$$\Phi_j = \Phi_{j0} + \Phi'_j s^*.$$

Partikularni integral može se odrediti iz izraza:

$$\tilde{\xi}_p = - \frac{G_1}{M + iT} \quad (33)$$

Primenom metode »zamrzavanja koeficijenata« [1] kompleksna diferencijalna jednačina (31) ima korene karakteristične jednačine po napadnom uglu:

$$\lambda_j + i\Phi'_j = \frac{1}{2} \left(-H \pm \frac{2T - H}{\sqrt{1 - \frac{1}{s_g}}} \right) + i \frac{P}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{s_g}} \right) \quad (34)$$

gde je:

$$s_g = \frac{P^2}{4M} - \text{žiroskopski faktor stabilnosti.}$$

Ako se integrali jednačina (23), u drugom integralu na desnoj strani nalazi se $\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 = \tilde{\delta}^2$, što je ujedno kvadrat modula kompleksnog broja $\tilde{\xi} = \tilde{\beta} + i\tilde{\alpha}$. Kako je $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_h + \tilde{\xi}_p$, pa ako se zanemare dvostruki proizvodi činioca kompleksnih brojeva $\tilde{\xi}_h$, i $\tilde{\xi}_p$, zbir kvadrata modula postaje $|\tilde{\xi}|^2 = |\tilde{\xi}_h|^2 + |\tilde{\xi}_p|^2$, što daje $|\tilde{\xi}|^2 = \tilde{\delta}^2$. Rastavljanje na ovaj način moguće je zato što se nutacija amortizuje pre nego što projektil stigne do temena putanje [4]. Jednačina (23) postaje:

$$\Delta(\ln V) = \int_{s_1^*}^{s_2^*} \left(c_{x_0}^* - \frac{g d \sin \gamma}{V^2} + c_{x_{N\alpha 2}}^* |\tilde{\xi}_p|^2 + c_{x_{N\alpha 2}}^* |\tilde{\xi}_h|^2 \right) ds^*. \quad (35)$$

Prva dva člana na desnoj strani mogu se spojiti u jedan, pošto se $\tilde{\xi}_p(s^*)$ i parametri kretanja centra mase $V(s^*)$, $\gamma(s^*)$ i $\kappa(s^*)$ sporo menjaju duž putanje. Taj integral može se odrediti numeričkom integracijom sa dovoljno velikim korakom.

Poslednji član na desnoj strani biće korektivni integral u procesu numeričke integracije prvog i drugog člana. Određuje se u zatvorenom obliku, služeći se rešenjem diferencijalne jednačine kretanja centra mase (31) po metodi »zamrzavanja koeficijenata« u intervalu od s_1^* do s_2^* . Inače, korektivni član predstavlja uticaj indukovanog otpora, u intervalu od s_1^* do s_2^* na pad brzine ΔV .

Korektivni integral je oblika [4]:

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} |\tilde{\xi}_h|^2 ds^* = \sum K_{j1}^2 \frac{\exp(2\lambda_j \Delta s^*) - 1}{2\lambda_j} + 2K_{11}K_{21} \left[\exp[(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta s^*] \frac{\sin \Delta \Phi_2(s_2^*)}{P\sqrt{1-1/s_g}} - \frac{\sin \Delta \Phi_1(s_1^*)}{P\sqrt{1-1/s_g}} \right]. \quad (36)$$

Moduli K_{j1} i K_{j2} mogu se transformisati tako da se dobiju pogodne rekurentne relacije za njihovo izračunavanje u svakom koraku numeričke integracije.

Da bi se dobila rešenja jednačina za uglove $\gamma(s^*)$ i $\kappa(s^*)$ potrebno je jednačinu (25) pomnožiti sa imaginarnom jedinicom i sabrati sa (24), pa se dobija:

$$\begin{aligned} \gamma' + i \kappa' \cos \gamma &= c_{y\alpha}^* (\tilde{\beta} + i\tilde{\alpha}) - \\ &- c_1^* i(\tilde{\beta} + i\tilde{\alpha}) - \frac{g d \cos \gamma}{V^2}, \\ c_1^* &= c_{x_0}^* + c_{N\alpha}^* \end{aligned}$$

kako je

$$\tilde{\xi} = \tilde{\beta} + i\tilde{\alpha} \quad \text{i} \quad \tilde{\xi} = \tilde{\xi}_h + \tilde{\xi}_p$$

ova jednačina poprima oblik:

$$\begin{aligned} \gamma' + i \kappa' \cos \gamma &= \tilde{\xi}_p (c_{y\alpha}^* - i c_1^*) - \\ &- \frac{g d \cos \gamma}{V^2} + \tilde{\xi}_h (c_{y\alpha}^* - i c_1^*). \end{aligned} \quad (37)$$

I u ovom slučaju mogu se spojiti integrali, pa se nakon integracije dobija:

$$\begin{aligned} \Delta \gamma &= \int_{s_1^*}^{s_2^*} \left(c_{y\alpha}^* \tilde{\xi}_p - \frac{g d \cos \gamma}{V^2} \right) ds^* + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ (c_{y\alpha}^* - i c_1^*) \int_{s_1^*}^{s_2^*} \tilde{\xi}_h ds^* \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Delta x = \int_{s_1^*}^{s_2^*} -c_{N\alpha}^* \frac{1}{\cos \gamma} \tilde{\xi}_p ds^* + \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \operatorname{Im} \left\{ (c_{Y\alpha}^* - ic_1^*) \int_{s_1^*}^{s_2^*} \tilde{\xi}_h ds^* \right\}$$

U ovim jednačinama Re i Im predstavljaju realni i imaginarni deo korektivnog integrala koji se prvo integriše, a zatim rastavi.

Kompleksni integral od $\tilde{\xi}_h$ dobija se iz opšteg rešenja homogene diferencijalne jednačine (31), pa se nakon integracije dobija:

$$\int_{s_1^*}^{s_2^*} \tilde{\xi}_h ds^* = \sum_{j=1,2} K_{j0} \exp(i\Phi_{j0} + r_j s_1^*) \cdot \frac{1}{r_j} \cdot (\exp(r_j \Delta s^*) - 1) \quad (39)$$

gde je:

$r_j = \lambda_j + \Phi_j$ za $(j=1,2)$ — koren karakteristične jednačine (34).

Proces rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja neupravljivih i nevođenih projektila (23 do 25) realizuje se tako što se izabranom numeričkom metodom izračunaju vrednosti zavisno promenljivih u intervalu Δs^* . Zatim se koriguju vrednosti brzine V i uglova γ i κ koji određuju njen pravac. Korigovane vrednosti su osnova za sledeći korak numeričke integracije. Korekcija se realizuje tako što se prvo odrede prosečne vrednosti parametara kretanja centra mase u intervalu Δs^* . Zatim se odrede koeficijenti za usvojeno »zamrznuto« stanje. Ti koeficijenti daju kompleksne korene karakteristične jednačine r_{jSR} . S tim kore-

nima se po rekurentnoj formuli određuju promenljivi vektori nutacionog kretanja na početku i na kraju intervala. Time su određene sve potrebne veličine za proračun kompleksnog integrala korekcije.

Određivanje koraka numeričke integracije

Metoda »kvazioptimalne kontrole koraka numeričke integracije« sistema diferencijalnih jednačina dinamike leta na osnovu razmatranja svojstvenih vrednosti i lokalne greške data je u literaturi [5].

Ovom metodom određuje se korak oblika $h = \frac{C}{|\lambda|_{\max}}$ gde je:

C — konstanta koja je u intervalu numeričke stabilnosti, a određuje se na osnovu relativne lokalne greške;

$|\lambda|_{\max}$ — sopstvena (karakteristična) vrednost matrice sistema diferencijalnih jednačina kretanja centra mase.

Za transformisani model leta projektila korak integracije se može odrediti na sledeći način:

$$h = \frac{C}{\left| M \frac{\partial c_{x0}^*}{\partial M} + c_{x0}^* \right|} \quad (40)$$

Konstanta C mora biti u intervalu numeričke stabilnosti. Za metodu Runge-Kutta četvrtog reda on iznosi $(-2,78,0)$, odnosno treba da bude $h|\lambda|_{\max} \leq 2,78$ [5]. Za praktičnu upotrebu C treba da bude u intervalu od 0,1 do 0,4 što daje lokalnu relativnu grešku numeričke metode od $0,8 \cdot 10^{-6}$ do $0,1 \cdot 10^{-3}$ respektivno [5].

Testiranje modela i analiza rezultata

Kriterijum za ocenu kvaliteta transformisanih jednačina je maksimalna vrednost odgovarajuće funkcije greške — odstupanje parametara transformisanog modela od odgovarajućih parametara referentnog modela. Referentni model je kruto telo sa šest stepeni slobode kretanja u aerobalističkom koordinatnom sistemu. Veličina dozvoljenog odstupanja parametara transformisanog od referentnog modela određena je na osnovu publikovanih grešaka realizovanih sistema za upravljanje vatrom. Analizirane su posebno greške sistema za posredno gađanje i greške sistema za neposredno gađanje.

Proračun elemenata putanje izvršen je za hipotetički projektil M40 čije su osnovne karakteristike:

$$D=0,040 \text{ m}$$

$$I_x=0,000206 \text{ kgm}^2$$

$$I_y=0,002377 \text{ kgm}^2$$

$$m=0,960 \text{ kg}$$

$$V=985 \text{ m/s}$$

$$p=6296,989 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{q}_0=1,034811 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{r}_0=7,726234 \text{ rad/s}$$

Polazni ugao Θ menja se od $0,25$ do 35° . Gornja vrednost polaznog ugla odgovara granici maksimalnog dometa. Ovaj projektil je izabran za testi-

ranje transformisanog modela zato što njegov maksimalni domet odgovara pretpostavci o malom dometu (ispod 20 km) i što je njegov napadni ugao $\tilde{\delta} < 10^\circ$.

U [6] date su karakteristike realizovanih sistema za upravljanje vatrom oruđa vatrene podrške. Ovi sistemi najčešće se koriste za posredno gađanje. Ekstremno najnepovoljnije vrednosti grešaka uzete su kao kriterijum za poređenje dva modela, a to su:

— tačnost elemenata gađanja po daljini $\pm 10 \text{ m}$, odnosno $\pm 1 \text{ mrad}$ od ugla elevacije;

— tačnost po pravcu $0,5$ do 1 mrad ;

— tačnost proračunatog vremena leta treba da bude $0,1$ do $0,15 \text{ s}$;

— vreme proračuna putanje treba da bude 2% od vremena leta projektila.

Maksimalno odstupanje dometa transformisanog modela iznosi $8,2 \text{ m}$. Odstupanje pravca u smeru z-ose iznosi $3,91 \text{ m}$ ili $0,31 \text{ mrad}$. Razlika u proračunu vremena leta iznosi $0,033 \text{ sekunde}$. Vrednosti ostalih veličina V , γ , α praktično se poklapaju.

Razlika između vremena proračuna elemenata putanje referentnog i transformisanog modela na personalnom računaru iznosi $325,23 \text{ sekunde}$. Vreme proračuna elemenata putanje, primenom transformisanog modela, može se smanjiti izborom koraka, tako da u ekstremnom slučaju ukupno vreme iznosi $0,6 \text{ sekundi}$.

Tabela 1

Elementi kretanja projektila

	Domet	Devijacija	Vreme leta	PC — Vreme proračuna
Kruto telo	12413,9	400,55	53,192	327,53
Transform. model	12422,1	404,46	53,225	2,30

Projektni zahtevi kod sistema za upravljanje vatrom, oruđa namenjenih za neposredno gađanje, daleko su rigorozniji od zahteva definisanih kod sistema za vatrenu podršku, a to su:

- tačnost modela treba da bude od 0,1 do 0,2 mrad po pravcu i po uglu elevacije;

- greška proračuna vremena leta treba da bude manja od 10 ms;

- vreme proračuna elemenata gađanja treba da bude manje od 0,3 s.

Maksimalna greška dometa iznosi 3,2 m, što zadovoljava postavljeni kriterijum koji određuje za koliko se promeni domet ako se ugao elevacije promeni za vrednost od 0,1 do 0,2 mrad. U konkretnom slučaju dozvoljeno odstupanje je 15 m. Greška proračuna bočnog odstupanja (greška po pravcu) po definisanom kriterijumu iznosi 0,1 do 0,2 mrad. U konkretnom slučaju za daljinu od 3100 m maksimalno odstupanje pravca može biti oko 0,6 m. Za transformisani model ovo odstupanje iznosi 0,05 m. Maksimalna greška izračunatog vremena leta je 4 ms.

Merenje vremena na personalnom računaru ostvareno je pomoću sata tekućeg vremena. Ovaj način merenja vremena dovoljno je tačan ako vreme izvršavanja programskog segmenta nije veće od nekoliko sekundi. Da bi se precizno izmerilo vreme odvijanja neke brze pojave, ili obavilo merenje satom slabijeg kvaliteta, potrebno je produžiti vreme merenja ponavljajući pojavu koja se meri N-puta. Broj ponavljanja može se izračunati iz $N > 2r/QT$, gde je:

r — rezolucija sata,

Q — relativna greška,

T — vreme trajanja pojave.

Oba modela su testirana na računaru PC386/387 sa taktom od 25 MHz.

Mogućnost implementacije transformisanog modela

Pored izbora modela, načina integracije i veličine koraka integracije za proračun elemenata prostornog kretanja projektila, na mogućnost implementacije modela dominantno utiče izbor adekvatnog hardvera.

Problem implementacije algoritma transformisanog modela analiziran je za oba tipa gađanja. Za analizu mogućnosti implementacije aktuelne su tri operacije (sabiranje, množenje i deljenje) [7]. Broj operacija je redukovano jer su izbačena sva množenja i dodeljivanja s nulom. Sva računanja početnih elemenata su prethodno obavljena. Za transformisani model leta potrebno je po jednom koraku integracije izvršiti 507 sabiranja, 143 deljenja i 296 množenja.

Mikroprocesorski APX 86/20 16 bitni sistem, sastavljen je od mikroprocesora i aritmetičkog koprocera Intel 8086/8087 [7]. Ovaj mikroprocesor nalazi se u sistemu za vatrenu podršku MILIPAC. Vreme izvođenja osnovnih »floating-point« aritmetičkih operacija uz takt od 5 MHz je:

- sabiranje (oduzimanje FADD (FSUB) 17, μ s

- množenje FMUL 19,4 μ s

- deljenje FDIV 39,6 μ s

Za sisteme vatrene podrške novije konstrukcije (MILIPAC, MARCONI) vreme proračuna iznosi 2% od vremena leta. Za starije konstrukcije vreme proračuna je od 10 do 15 s. Sistem APX 86/20 proračunava elemente za 20,024 ms po jednom koraku integracije. U ovom slučaju transformisani model zadovoljava postavljene kriterijume samo za maksimalne elevacije.

Implementacija na digitalnom signal-procesoru za oba tipa gađanja je

moguća. Prvi signal-procesori bili su namenjeni digitalnoj obradi signala. Osnovni problem prvih digitalnih signala je aritmetika »fiksno zareza« koju prevazilaze brzi »floating-point« čipovi. U tabeli 2. dati su rezultati testova za brze floating-point čipove raznih proizvođača.

mentacije tih matematičkih modela na savremenim balističkim računarima.

Zaključak

Predstavljen je transformisani matematički model nastao na osnovu up-

Tabela 2

Karakteristike FP DSP

Proizvođač	Motorola	Texas instruments	AT&T
Procesor	DSP96002	320C30	DSP32C
Clock rate	33 MHz	33 MHz	50 MHz
Instrukcijski ciklus	60 ns	60 ns	80 ns
FP deijenje	0,42 μ s	2,1 μ s	2,08 μ s
Kompleksni FFT u 1024 tačke	1,13 ms	3,43 ms	2,80 ms

Sa ovim čipovima vreme proračuna za transformisani model iznosi:

DSP96002	0,2198 ms
320C30	1,1033 ms
DSP32C	1,0504 ms

Poređenjem sa mikroprocesorskim sistemom »floating-point«, signal procesori su za više od reda veličine brži, a DSP96002 čak za dva reda veličine. Digitalni signal-procesori sa »floating-point« aritmetikom rešavaju problem implementacije algoritma transformisanog modela leta projektila.

Novije kombinacije mikroprocesorskih sistema Intel 386/387, 486 i NS 32016/32081 sa osnovnim operacijama ispod 10 μ s, znatno ubrzavaju računanje i ispunjavaju postavljene kriterijume.

U [2] dato je više načina kako se može skratiti vreme proračuna parametara putanje. Svakako bi bilo korisno analizirati i mogućnost imple-

roščavanja modela leta projektila kao krutog tela sa šest stepeni slobode kretanja. U ovom modelu izvršeno je razdvajanje sistema diferencijalnih jednačina prostornog kretanja projektila na dva podsistema sa bitno različitim frekvencijama. Jedan je translacija centra mase, a drugi je rotacija oko centra mase. Pored podele sistema diferencijalnih jednačina izvršena je i delimična linearizacija primerena uslovima leta široke klase neupravljivih i nevođenih projektila malog dometa.

Diferencijalne jednačine transformisanog modela zadovoljavaju sve postavljene kriterijume za implementaciju u sistem za upravljanje vatrom posrednog i neposrednog gađanja. Analizirani su savremeni mikroprocesorski sistemi i digitalni signal-procesori na kojima je moguća implementacija transformisanog modela.

L i t e r a t u r a :

- [1] Janković S., Čuk D.: Mehanika leta, predavanja na VVTŠ i Mašinskom fakultetu, Beograd, 1989.
- [2] Petrović R. D.: Istraživanja efekta asimetrije u dinamici brzo i sporo rotirajućih projektila, doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.
- [3] Janković S.: Spoljna balistika, VIZ, Beograd, 1977.
- [4] Janković S.: Putanja rotirajućih projektila, Naučno-tehnički pregled, Vol. 22, 1972., br. 9, str. 3.
- [5] Maj De Cock: Quasi-optimum control of the step size in the numerical integrations of the system of equations in exterior ballistics based on conditerations of eigenvalues and error bounds, IX Symposium of ballistics, Brussels, 1989.
- [6] Gajić M.: Sistemi za upravljanje vatrom oruđa vatrene podrške, Vojnotehnički institut, Beograd, 1987.
- [7] Tanjga R.: Prilog stohastičkoj sintezi zakona vođenje samovođenih raketa, Doktorska disertacija, Vojnotehnička akademija, Beograd, 1992.