Dr Slavko Tomović,
dipl. inž.
Tehnički opitni centar KoV
VJ, Beograd

OCENA PARAMETRA OBLIKA VEJBULOVOG ZAKONA RASPODELE PREKO KOEFICIJENTA VARIJACIJE

UDC: 519.248:519.213

Rezime:

Data je metoda za procenjivanje parametara funkcije pouzdanosti, kada je u pitanju dvoparametarska Vejbulova raspodela koja se često koristi kao model sa širokim mogućnostima za aproksimaciju stvarne raspodele. Metoda koristi koeficijent varijacije koji zavisi samo od parametra oblika β . Umesto zaobilaznog računa preko vrednosti gama funkcija, predložen je brz način za izračunavanje preko stepene funkcije koja aproksimira vezu parametra β i koeficijenta varijacije. Pri tome se postiže veoma zadovoljavajuća tačnost što je ilustrovano praktičnim primerom.

Ključne reči: funkcija pouzdanosti, koeficijent varijacije, standardna devijacija, srednja vrednost, parametri distribucije, gama funkcija, slučajna promenljiva.

ESTIMATION OF THE TWO-PARAMETER WEIBULL DISTRIBUTION PARAMETERS USING THE COEFFICIENT OF VARIATION

Summary:

This paper presents a method for estimating the reliability function parameters when reliability function is the 2-parameter Weibull regression. This model is often used in a reliability analysis in wide variety of situations to approximate successfully many empirical distributions, especially for the purpose of accelerated exte tests. The method supposes that calculation of estimator for β can be performed by fusing the ratio of standard deviation to mean voluo of the random variable. This ratio depends only on the parameter β and that dependence can be presented by an approximative function. The application of this method is illustrated by an example.

Key words: reliability function, coeficient of variation, standard deviation, mean value, distribution parameters, gama function, random variable.

Uvod

Pri statističkim analizama, posebno iz pouzdanosti tehničkih proizvoda, važnu ulogu ima zakon raspodele slučajne veličine koja se statistički posmatra. U opštem slučaju ovaj zakon se ne poznaje, pa se na osnovu ispitivanja mora proceniti na osnovu statističkih podataka.

Postoje i takvi zakoni raspodele koji pokrivaju šire područje raznih raspodela, naime, koji se u tom području preklapaju sa drugim raspodelama. Takav je i Vejbulov zakon raspodele. Posmatraće se slučaj dvo-parametarske Vejbulove raspodele, na primer vremena rada do otkaza nekog proizvoda za koji funkcija pouzdanosti (verovatnoća da će proizvod bez otkaza i propisno o-

bavljati svoju namenu duže od vremena t) ima oblik

$$R(t) = \exp(-\gamma t^\beta) \quad (1)$$

gde je:

β — parametar oblika,

γ — parametar razmere.

Za razne vrednosti parametra oblika vremenski oblik funkcije $R(t)=f(t)$ može da poprimi oblike gama-raspodele, normalne raspodele, a za $\gamma=1$ svodi se na eksponencijalnu raspodelu. Zbog svoje »elastičnosti« vrlo je pogodna za mnoge praktične slučajeve, a naročito da zameni nepoznatu stvarnu raspodelu. Sem toga, u slučaju proizvoda koji relativno brzo stare ili se intenzivno habaju ova raspodela se dobro primenjuje.

Pokazatelji koji karakterišu slučajnu veličinu jesu srednja vrednost, standardna devijacija i koeficijent varijacije. Definisani su izrazima

$$T_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \quad (2)$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - T_{sr})^2} \quad (3)$$

$$v_t = \frac{\sigma_t}{T_{sr}} \quad (4)$$

gde su T_{sr} , σ_t i v_t srednja vrednost, standardna devijacija i koeficijent varijacije vremena rada do otkaza respektivno, a t_i je vreme do otkaza.

T_{sr} i σ_t imaju dimenziju slučajne veličine t_i , a v_t je bezdimenzionalna veličina. Njena vrednost se kreće od 0 do 1 i karakteristična je za razne raspodele. Tako je do vrednosti 0,33 obično u pitanju normalna raspodela, od 0,4 do 1 Vejbulova, a za $v=1$ eksponencijalna raspodela [2]. Kada je u pitanju neprekidna slučajna veličina (kao što je vreme t_i), koeficijent varijacije u slučaju

dvoparametarske Vejbulove raspodele ima oblik

$$v = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2} - 1} \quad (5)$$

gde je sa Γ predstavljen indeks gama-funkcije.

Određivanje parametra oblika Vejbulove dvoparametarske raspodele

Za uspešnu statističku analizu neophodno je poznavati parametre raspodele. Za Vejbulovu raspodelu to su parametri β i γ . Ovi parametri mogu se na razne načine oceniti preko statističkih podataka [3] npr. po metodi maksimalnog poverenja, metodom momenata, na osnovu empirijske funkcije raspodele, itd. Postoje razni prilazi u ovoj metodologiji [1].

Razmatraće se jednostavna i direktna metoda koeficijenta varijacije. Iz izraza (5) vidi se da za slučaj dvoparametarske raspodele koeficijent varijacije vremena rada do otkaza zavisi samo od parametra oblika β .

Preko vrednosti gama-funkcije $\Gamma(1+1/\beta)$ i $\Gamma(1+2/\beta)$ može se indirektno, pomoću tabela za vrednosti gama-funkcije, izračunati za poznatu vrednost koeficijenta varijacije v ona vrednost za β za koji je zadovoljen izraz (5). To nije jednostavan put, a ni praktičan za primenu računara. Zbog toga će biti prikazan jedan približan metod koji sa dovoljnom tačnošću dovodi brzo do rešenja, i posebno je upotrebljiv za ugradnju u primenjeni statistički softver. Pretpostaviće se da se umesto izraza (5) može prikazati koeficijent varijacije preko neke druge funkcije. Neka je to stepena funkcija oblika

$$\beta = a v^b \quad (6)$$

gde su a i b konstante. Ove konstante se na osnovu više poznatih vrednosti za β i v mogu odrediti po metodi najmanjih kvadrata. Za tu svrhu prethodno će se izraz (6) logaritmovanjem transformisati u oblik

$$\ln \beta = \ln a + b \ln v \quad (7)$$

$$\delta = \left| \frac{\beta^* - \beta}{\beta} \right| \cdot 100 \quad (11)$$

dobija se procentualna greška. Vrednosti za β^* i grešku δ date su u tabeli 1. Vidi se da je za dijapazon β iz tabele 1 maksimalna greška manja od 0,73%, što je veoma dobra tačnost ako se uz-

Tabela 1

v	0,91022	0,77572	0,67897	0,60548	0,54745	0,50029	0,46108	0,42791	0,39942	0,37466
β	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
β^*	1,092	1,301	1,506	1,707	1,906	2,104	2,301	2,497	2,69	2,89
$\delta \%$	0,730	0,087	0,378	0,417	0,336	0,200	0,048	0,107	0,252	0,383

U tabeli 1 dato je 10 vrednosti za β i njima odgovarajućih vrednosti za v , po izrazu (5).

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (\ln v_i - X) (\ln \beta_i - Y)}{\sum_{i=1}^N (\ln v_i - X)^2} \quad (8)$$

$$a = \exp(Y - bX) \quad (9)$$

ovde su

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^N \ln \beta_i}{N} \text{ i } X = \frac{\sum_{i=1}^N \ln v_i}{N}$$

Za vrednosti niza β_i , v_i , prema tabeli 1, dobija se

$$a \approx 0,985$$

$$b = -1,096$$

Na osnovu ovakvih podataka izraz (6) dobija oblik

$$\beta = 0,985 v^{-1,096}$$

Ako se za razne vrednosti v iz tabele 1 izračuna 10 vrednosti β^* i na osnovu njih greška δ

me statistička tačnost koja potiče od drugih faktora.

U praksi se ova greška može čak i umanjiti ako se parametri a i b odrede za neki uži dijapazon (na primer za β od 1,05 do 0,5).

U praksi se odabere n ispitnih primeraka proizvoda i na osnovu normalnih ili skraćenih [1] ispitivanja odredi statistički niz vremena rada do otkaza. Na osnovu statističkih podataka odrede se srednja vrednost T_{sr} i standardna devijacija, po izrazima (2) i (3), i na osnovu njih koeficijent varijacije v^t po izrazu (4).

Sada se po izrazu (10) izračuna ocena parametra β Vejbulove raspodele vremena rada do otkaza. Ako ovako izračunato β izlazi izvan područja β iz tabele 1 onda se po opisanoj metodologiji nađu za drugo područje β (koje obuhvata i približnu ocenu) nove konstante a i b i onda se odredi preciznija vrednost ocenjenog parametra.

Kada se po opisanoj metodi odredi vrednost parametra oblika β lako se izračuna i vrednost parametra razmere γ iz izraza za srednje vreme rada do otkaza. Za Vejbulovu dvoparametarsku

raspodelu za koju važi izraz za funkciju pouzdanosti (1) izraz glasi

Iz izraza (12) parametar razmere se računa kao

$$T_{sr} = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (12)$$

$$\gamma = \left[\frac{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}{T_{sr}} \right]^{\beta} \quad (13)$$

Tabela 2

p	Γ (p)	p	Γ (p)	p	Γ (p)	p	Γ (p)	p	Γ (p)
1,01	0,99433	1,21	0,91558	1,41	0,88676	1,61	0,89468	1,81	0,93408
1,02	0,98884	1,22	0,91311	1,42	0,88636	1,62	0,89592	1,82	0,93685
1,03	0,98355	1,23	0,91075	1,43	0,88604	1,63	0,89724	1,83	0,93969
1,04	0,97844	1,24	0,90852	1,44	0,88581	1,64	0,89864	1,84	0,94261
1,05	0,97350	1,25	0,90640	1,45	0,88566	1,65	0,90012	1,85	0,94561
1,06	0,96874	1,26	0,90440	1,46	0,88560	1,66	0,90167	1,86	0,94868
1,07	0,96415	1,27	0,90250	1,47	0,88503	1,67	0,90330	1,87	0,95184
1,08	0,95973	1,28	0,90072	1,48	0,88575	1,68	0,90500	1,88	0,95507
1,09	0,95546	1,29	0,89904	1,49	0,88595	1,69	0,90678	1,89	0,95838
1,10	0,95135	1,30	0,89747	1,50	0,88623	1,70	0,90864	1,90	0,96177
1,11	0,94740	1,31	0,89600	1,51	0,88659	1,71	0,91057	1,91	0,96523
1,12	0,94359	1,32	0,89464	1,52	0,88704	1,72	0,91258	1,92	0,96877
1,13	0,93993	1,33	0,89338	1,53	0,88757	1,73	0,91467	1,93	0,97240
1,14	0,93642	1,34	0,89222	1,54	0,88817	1,74	0,91683	1,94	0,97640
1,15	0,93304	1,35	0,89115	1,55	0,88887	1,75	0,91906	1,95	0,97988
1,16	0,92980	1,36	0,89018	1,56	0,88964	1,76	0,92137	1,96	0,98374
1,17	0,92670	1,37	0,88931	1,57	0,89049	1,77	0,92376	1,97	0,98768
1,18	0,92373	1,38	0,88854	1,58	0,89142	1,78	0,92623	1,98	0,99171
1,19	0,92089	1,39	0,88785	1,59	0,89243	1,79	0,92877	1,99	0,99581
1,20	0,91817	1,40	0,88726	1,60	0,89352	1,80	0,93138	2,00	1,00000

Za izračunavanje po izrazu (13) treba poznavati vrednosti gama-funkcije $\Gamma(1+1/\beta)$. Pošto se ove vrednosti ne daju tako često u statističkoj literaturi, u tabeli 2 su date vrednosti gama-funkcije $\Gamma(p)$ za vrednosti parametra p na 2 decimale od 1,00 do 2,00.

Poznato je da za gama-funkciju važi relacija

$$\Gamma(1+p) = p\Gamma(p) \quad (14)$$

pomoću koje se mogu lako izračunati vrednosti funkcije za parametre p izvan onih koje su date u tabeli 2.

Praktičan primer:

Dato je 25 vremena rada do otkaza nekog proizvoda prikazanih u tabeli 3. Prema podacima iz tabele izračunavaju se po izrazima (2, 3, 4) sledeće vrednosti:

$$T_{sr} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} t_i = 350,22 \text{ h}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{24} \sum_{i=1}^{25} (t_i - T_{sr})^2} = 252,74 \text{ h}$$

$$\nu_t = \frac{\sigma_t}{T_{sr}} = 0,72165$$

Prema ovoj vrednosti za ν_t izračuna se po izrazu (10) ocena za parametar oblika β Vejbulove raspodele

$$\beta = 0,985 \cdot 0,72165^{-1,096} = 1,408$$

Preko izraza (13) izračuna se i vrednost ocene parametra razmere γ

$$\begin{aligned} \gamma &= \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1,408}\right)}{350,22} \right]^{1,408} = \\ &= \left(\frac{0,91062}{350,22} \right)^{1,408} = 2,3 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Zaključak

S obzirom na značaj određivanja zakona raspodele i njenih parametara pri analizama u oblasti pouzdanosti tehničkih proizvoda proučavaju se metode za brzo proračunavanje ovih parametara sa potrebnom tačnošću. Kao

Tabela 3

R. br.	Ti [h]	R. br.	Ti [h]	R. br.	Ti [h]	R. br.	Ti [h]	R. br.	Ti [h]
1	475,56	6	117,32	11	190,44	16	448,85	21	338,39
2	420,86	7	380,18	12	304,78	17	23,27	22	418,87
3	1093,65	8	169,75	13	141,50	18	154,42	23	366,01
4	386,95	9	738,74	14	860,22	19	217,33	24	141,74
5	113,94	10	566,17	15	331,47	20	129,04	25	226,01

prvi zadatak postavlja se određivanje zakona raspodele slučajne veličine. Pod pretpostavkom da važi dvo-parametarski Vejbulov zakon raspodele znatno se pojednostavljuje prilaz. Ova pretpostavka ima opravdanje u osobinama Vejbulove raspodele, zbog čega se u praksi sve više uvažava.

Da bi se proračuni za procenu parametara Vejbulove raspodele pojedno-

stavili uvedena je stepena funkcija za aproksimaciju relacije koja povezuje parametar oblika β i koeficijent varijacije v . Data aproksimacija, pored svoje

jednostavnosti, omogućava i malu relativnu grešku. Predložen način veoma je pogodan za upotrebu u primenjenim statističkim softverima.

L i t e r a t u r a:

[1] Tomović, S.: Nove metode za procenjivanje parametara funkcije pouzdanosti sistema, Beograd, Naučno-tehnički pregled, Vol XXXII, br. 2 1982.

[2] Mihlin, V. M.: Prognozirovanije tehničkog sastojanja mašina, Moskva, Kolos, 1978.

[3] Petrić, J., Jevtić, M., Stojanović, V.: Analiza pouzdanosti, Beograd, Savremena administracija, 1979.