Dr Dragoljub M. Brkić,
dipl. inž.
Tehnički opitni centar KoV
VJ, Beograd

ANALIZA I PRIMENA DVOPARAMETAR- SKE VEJBULOVE RASPODELE ZASEČENE SA LEVE STRANE

UDC: 519.248:519.676

Rezime:

Polazeći od izraza za dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu, izvedeni su izrazi za osnovne funkcije ove raspodele zasečene sa leve strane. Takođe, izvedeni su izrazi za tačkaste ocene parametara i karakteristika ove raspodele. Valjanost i primena izvedenih izraza proveravana je pomoću računara na skupovima pseudoslučajnih brojeva koji su direktno generisani kao brojevi koji se podvrgavaju dvoparametarskoj Vejbulovoj raspodeli zasečenoj sa leve strane sa parametrima: l — parametar zaseka, b — parametar skale i c — parametar oblika, ili kao brojevi koji se podvrgavaju dvoparametarskoj Vejbulovoj raspodeli sa parametrima: b i c koji su odabrani tako da njihova vrednost bude veća ili jednaka parametru zaseka l . Veličina uzorka n i parametri l , b , c imali su usvojene i nepromenjene vrednosti u oba slučaja generisanja pseudoslučajnih brojeva. Ova provera je ponavljana na računaru više puta, a dobijeni rezultati su zadovoljavajući.

Ključne reči: zasečena Vejbulova raspodela, pouzdanost, parametri raspodele.

ANALYSIS AND APPLICATION OF THE TWO-PARAMETER WEIBULL DISTRIBUTION LIMITED ON THE LEFT

Summary:

Based on the two-parameter Weibull distribution expressions, the expressions of the primary functions of the two-parameter Weibull distribution limited on the left are derived as well as the expressions of its parameters and characteristics point evaluation. Validity and application of derived expressions were verified by a computer on the sets of pseudorandom numbers directly generated as numbers following the two-parameter Weibull distribution limited on the left with the parameters: l — limit parameter b — scale parameter and c — shape parameter, or as numbers following the two-parameter Weibull distribution with the parameters b and c chosen so that their value is greater or equal to the limit parameter l . The sample size of n and the parameters l , b and c had accepted and unchanged values in both cases of pseudorandom numbers generation. This computer checking was repeated for several times and the obtained results were satisfactory.

Key words: Weibull distribution limited on the left, reliability, distribution parameters.

Uvod

Neka jedna od važnih karakteristika proizvoda ima dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu sa parametrom oblika c i parametrom skale b . Pretpostavka je da za prijem ovog proizvo-

da odlučujuću ulogu ima vrednost ove posmatrane karakteristike. Tako, na primer, pojedinačni proizvod čija je vrednost ove karakteristike manja od unapred zahtevane vrednosti l , neće biti prihvaćen. Dakle, prihvataju se samo oni proizvodi čije su vrednosti ove

karakteristike jednake ili veće od 1. Vrednosti posmatrane karakteristike ovako odabranih proizvoda imaju dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu zasečenu sa leve strane. Vrednost parametra oblika c i parametra skale b ostaje nepromenjena posle »zasecanja«, ali se menjaju srednja vrednost $E(t)$ i standardna devijacija σ , kao i druge karakteristike raspodele (medijana, mod, ...). Polazeći od izraza za funkciju gustine dvoparametarske Vejbulove raspodele, izvedeni su izrazi za osnovne funkcije ove raspodele zasečene sa leve strane: $f_1(t)$ — funkcija gustine raspodele, $F_1(t)$ — funkcija raspodele, $R_1(t)$ — funkcija pouzdanosti i $z_1(t)$ — funkcija intenziteta otkaza. Takođe, izvedeni su izrazi za tačkaste ocene parametara i karakteristika ove raspodele. Za proveru valjanosti izvedenih izraza i ilustraciju njihove praktične primene korišćeni su skupovi pseudoslučajnih brojeva koji su direktno generisani kao brojevi koji se podvrgavaju zakonu dvoparametarske Vejbulove raspodele zasečene sa leve strane, sa parametrima raspodele: l — parametar zaseka, b — parametar skale i c — parametar oblika, ili kao brojevi koji se podvrgavaju zakonu dvoparametarske Vejbulove raspodele sa parametrima b i c i koji su odabrani tako da njihova vrednost bude veća ili jednaka parametru zaseka l . U ilustrativnom primeru prikazan je histogram i funkcija gustine raspodele $f_1(t)$ za skupove pseudoslučajnih brojeva dobijene na oba navedena načina.

Teorijska osnova

Funkcija gustine raspodele

Neka slučajna promenljiva t ima dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu sa parametrom skale b i parametrom oblika c . Pretpostavka je da je uvedeno ograničenje da slučajna promenljiva t ne sme imati vrednost manju od unapred utvrđene vrednosti $l > 0$. Funkcija gustine ove dvoparametarske

Vejbulove raspodele data je sledećim izrazom:

$$f(t) = \frac{c}{b} \left(\frac{t}{b} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{t}{b} \right)^c}; \quad c, b > 0, t \geq 0 \quad (1)$$

Neka je sa l , na slici 1, označena granica ispod koje se vrednosti slučajne promenljive t ne uzimaju u obzir,

Sl. 1 — Funkcija gustine dvoparametarske Vejbulove raspodele

tj. one se razmatraju kao da se nisu ni pojavile. Da bi ovako »zasečena« funkcija i dalje predstavljala funkciju gustine raspodele, potrebno je da površina P_1 (šrafirana površina na slici 1) bude jednaka jedinici.

Polazeći od izraza (1), ova površina se može odrediti na sledeći način:

$$P_1 = \int_l^{+\infty} f(t) dt = R(l) = e^{-\left(\frac{l}{b} \right)^c} \quad (2)$$

Deljenjem izraza (2) sa $\exp \left[-\left(\frac{l}{b} \right)^c \right]$ dobija se

$$\int_l^{+\infty} \frac{f(t)}{e^{-\left(\frac{l}{b} \right)^c}} dt = 1$$

Podintegralna funkcija

$$\frac{f(t)}{e^{-\left(\frac{1}{b}\right)^c}}$$

ispunjava sve uslove da može predstavljati funkciju gustine raspodele. Može se napisati u sledećem obliku:

$$f_1(t) = \frac{c}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{c-1} e^{-\left[\left(\frac{t}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]};$$

$$c, b > 0, t \geq 1 \quad (3)$$

Ova funkcija grafički je prikazana na slici 2.

Sl. 2 — Funkcija gustine dvoparametarske Vejbulove raspodele zasečene sa leve strane

Funkcija raspodele

Funkcija raspodele, $F_1(t)$, data je sledećim izrazom:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{t}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]};$$

$$c, b > 0, t \geq 1 \quad (4)$$

Funkcija pouzdanosti

Funkcija pouzdanosti data je sledećim izrazom:

$$R_1(t) = e^{-\left[\left(\frac{t}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]};$$

$$c, b > 0, t \geq 1 \quad (5)$$

Funkcija intenziteta otkaza

Polazeći od opšteg izraza za funkciju intenziteta otkaza:

$$z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

dobija se

$$z_1(t) = \frac{c}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{c-1}; c, b > 0, t \geq 1 \quad (6)$$

Matematičko očekivanje

Polazeći od definicione formule za matematičko očekivanje ili srednju vrednost slučajne promenljive t , koja je data sledećim izrazom:

$$E_1(t) = \int_1^{+\infty} t f_1(t) dt \quad (7)$$

dobija se

$$E_1(t) = b e^{\left(\frac{1}{b}\right)^c} \gamma_L \left(1 + \frac{1}{c}\right) \quad (8)$$

γ_L je nepotpuna Γ funkcija, koja je data sledećim izrazom:

$$\gamma_L = \int_L^{+\infty} s^{\left(1 + \frac{1}{c}\right)^{-1}} e^{-s} ds$$

gde je:

$$L = \left(\frac{1}{b}\right)^c$$

Varijansa i standardna devijacija

Polazeći od definicionih formula za početni moment l -tog reda dobijaju se izrazi za moment prvog i drugog reda:

$$m_1 = E_1(t) = b e^{\left(\frac{1}{b}\right)^c} \gamma_L \left(1 + \frac{1}{c}\right) \quad (9)$$

$$m_2 = E_1(t^2) = b^2 e^{\left(\frac{1}{b}\right)^c} \gamma_L \left(1 + \frac{2}{c}\right) \quad (10)$$

Varijansa $V(t)$ može se odrediti na osnovu ova dva momenta, pomoću sledećeg izraza:

$$V(t) = m_2 - m_1^2 = \sigma^2, \quad (11)$$

odakle se dobija

$$\sigma = b \left[e^{\left(\frac{1}{b}\right)^c} \gamma_L \left(1 + \frac{2}{c}\right) - e^{\frac{2}{c} \left(\frac{1}{b}\right)^c} \cdot \gamma_L^2 \left(1 + \frac{1}{c}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Generisanje pseudoslučajnih brojeva

Niz pseudoslučajnih brojeva koji imaju dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu zasečenu sa leve strane može se odrediti korišćenjem izraza (4). Tako, ako se izraz (4) reši po promenljivoj t , dobija se:

$$t_i = b \left[\left(\frac{1}{b}\right)^c - \ln(1 - F_i) \right]^{\frac{1}{c}}, \quad (13)$$

gde je $F_i = x_i$ pseudoslučajni broj koji pripada intervalu $(0, 1)$.

Vrednost broja x_i može se odrediti pomoću jednog od sledećih izraza [3, 4]:

$$x_{i+1} = [997x_i]_D; \quad i=0,1,2,\dots; \quad x_0=0,5284163 \quad (14)$$

ili

$$x_{i+1} = [9821x_i + 0,211327]_D; \quad i=0,1,2,\dots, \quad (15)$$

x_0 je proizvoljno odabrani broj, kao i korišćenjem generatora pseudoslučajnih brojeva računara.

U navedenim izrazima $[Q]_D$ označava decimalni deo od broja Q . Kada se u izrazu (13) stavi $l=0$, onda se pomoću tog izraza mogu generisati pseudoslučajni brojevi koji imaju dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu koja nije zasečena. Ako se iz ovako generisanog skupa pseudoslučajnih brojeva odaberu samo oni čije su vrednosti veće ili jednake parametru zaseka l , onda će ti brojevi imati dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu zasečenu sa leve strane.

Ocenjivanje parametara b i c metodom kvantila

Usvajanjem tačkastih vrednosti za funkciju raspodele $F_1(t) : F_1$ i F_2 , dobijaju se njima odgovarajuće vrednosti promenljive t : T_1 i T_2 (slika 3).

Sl. 3 — Funkcija raspodele $F_1(t)$ i kvantili T_1 i T_2

Polazeći od izraza (4) za funkciju raspodele, mogu se napisati sledeći izrazi:

$$F_1 = 1 - e^{-\left[\left(\frac{T_1}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]} ; \quad c, b > 0 \quad (16)$$

$$F_2 = 1 - e^{-\left[\left(\frac{T_2}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]}; c, b > 0 \quad (17)$$

U ovim izrazima, donja granica (zasek) l određuje se tako što se za njenu vrednost uzme najmanja vrednost $t_{\min}$ koju je uzela slučajna promenljiva t , tj.:

$$l \approx \hat{l} = t_{\min} \quad (18)$$

Rešavanjem jednačina (16) i (17) po b i c , dobijaju se rešenja za ove parametre u sledećem obliku:

$$\frac{\left(\frac{T_2}{1}\right)^c - 1}{\left(\frac{T_1}{1}\right)^c - 1} = \frac{\ln(1-F_2)}{\ln(1-F_1)} = K \quad (19)$$

$$b = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1^c + l^c}{- \ln(1-F_1)} \right)^{\frac{1}{c}} + \left(\frac{T_2^c + l^c}{- \ln(1-F_2)} \right)^{\frac{1}{c}} \right] \quad (20)$$

Rešavanjem ovih izraza po b i c dobijaju se tačkaste ocene ovih parametara $\hat{b}$ i $\hat{c}$.

Kvantili T_1 i T_2 su, u stvari, empirijski kvantili i mogu se odrediti pomoću histograma, tako što se integrali površina histograma od l do T_1 , odnosno T_2 , ispunjavajući, pri tom, uslove da površine budu jednake usvojenim vrednostima F_1 , odnosno F_2 , respektivno.

Medijana

Medijana je vrednost promenljive t , pri kojoj je funkcija raspodele $F(t) = 0,5$ ili je to vrednost levog kvantila t_p , pri vrednosti levog kvanta $p=0,5$.

Polazeći od izraza za levi kvantil:

$$T_F = b \left[\left(\frac{1}{b} \right)^c - \ln(1-F) \right]^{\frac{1}{c}} \quad (21)$$

i dajući vrednost funkciji raspodele $F=0,5$, dobija se izraz za medijanu:

$$T_{0,5} = b \left[\ln 2 + \left(\frac{1}{b} \right)^c \right]^{\frac{1}{c}} \quad (22)$$

Mod i amplituda funkcije gustine raspodele

Izjednačavanjem prvog izvoda funkcije gustine raspodele $f_1(t)$, date izrazom (3), sa nulom i rešavanjem te jednačine po t , dobija se

$$t = t_0 = b \left(1 - \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (23)$$

Pri vrednosti argumenta $t=t_0$, funkcija $f_1(t)$ dostiže maksimum, čija je amplituda data sledećim izrazom:

$$f_{lmax} = f_1(t_0) = \frac{c}{b} \left(\frac{t_0}{b} \right)^{c-1} e^{-\left[\left(\frac{t_0}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]} \quad (24)$$

Obeležimo mod sa T_1 , tj. vrednost promenljive t pri kojoj $f_1(t)$ dostiže maksimum, a sa A_1 amplitudu ovog maksimuma. S obzirom na parametar zaseka l , mod T_1 i amplituda A_1 dati su sledećim izrazima:

$$T_1 = \begin{cases} l; & \text{za } c \leq 1 \vee (c > 1 \wedge l > t_0) \\ t_0; & \text{za } c > 1 \wedge l \leq t_0 \end{cases} \quad (25)$$

$$A_1 = \begin{cases} \frac{c}{b} \left(\frac{1}{b} \right)^{c-1}; & \text{za } c \leq 1 \vee (c > 1 \wedge l > t_0) \\ \frac{c}{b} \left(\frac{t_0}{b} \right)^{c-1} e^{-\left[\left(\frac{t_0}{b}\right)^c - \left(\frac{1}{b}\right)^c\right]}; & \text{za } c > 1 \wedge l \leq t_0 \end{cases} \quad (26)$$

Ilustrativni primer

Usvajajući vrednosti parametara $l = 25$, $b = 100$ i $c = 2,5$ pomoću računara, generisana su sledeća dva sku-

ne, sa usvojenim vrednostima parametara raspodele.

Prvi skup pseudoslučajnih brojeva dobijen je direktnim generisanjem ovih brojeva primenom izraza (13), a

164,92	58,03	89,80	49,58	134,66	31,61	85,54	156,30	70,35	117,55
107,56	135,66	68,50	100,16	125,96	105,30	84,68	160,81	60,23	159,35
92,92	165,99	49,19	83,14	197,67	57,03	107,12	105,11	75,60	41,45
124,08	80,59	84,17	122,18	94,71	84,08	44,68	155,17	101,47	140,24
50,41	119,89	173,07	83,12	55,07	62,76	139,95	90,91	127,07	131,64
142,59	112,56	117,54	61,19	65,08	67,43	115,36	123,63	38,09	88,43
78,22	36,75	46,38	63,67	82,75	57,09	60,24	33,03	105,36	69,46
80,37	58,27	121,68	68,61	63,50	75,74	35,52	172,35	69,86	34,93
43,74	86,16	93,64	171,28	106,83	97,16	36,73	25,84	48,83	114,62
56,88	36,11	74,29	118,76	103,76	110,14	79,66	109,07	85,95	112,81
79,47	42,74	44,04	28,76	79,96	119,74	61,19	52,02	120,04	49,66
181,40	102,79	132,59	125,09	87,19	56,61	47,91	41,08	147,54	110,59
47,72	136,84	137,20	50,99	139,11	74,37	69,90	167,96	100,02	86,11
86,67	52,94	104,36	125,97	120,87	148,28	76,38	34,00	66,56	86,77
69,59	43,93	60,67	115,38	91,80	107,95	55,01	93,72	80,56	65,00
62,22	26,47	198,49	81,72	95,49	130,70	105,07	165,14	72,08	54,25
43,06	89,21	90,65	98,19	65,04	105,11	93,61	27,11	72,17	55,40
79,40	67,83	91,08	70,59	111,61	110,65	65,76	114,13	59,15	177,21
83,47	72,51	60,05	141,34	67,69	152,38	72,47	81,92	73,64	131,80
74,67	76,49	97,76	98,69	32,12	39,56	97,50	70,35	69,95	115,63

164,33	55,09	88,31	45,78	133,86	83,94	155,66	68,19	116,56	106,43
134,86	66,24	98,90	125,08	104,13	83,05	160,19	57,46	158,73	91,51
165,40	45,35	81,47	197,22	54,01	105,99	103,94	73,66	36,29	123,18
78,83	82,53	121,24	93,34	82,43	40,15	154,52	100,23	139,49	46,72
118,94	172,51	81,44	51,88	60,17	139,19	89,45	126,20	130,81	141,86
111,51	116,56	58,49	62,63	65,11	114,35	122,71	32,08	86,91	76,38
30,32	42,14	61,13	81,07	54,07	57,48	25,06	104,19	67,25	78,60
55,35	120,75	66,36	60,95	73,80	28,65	171,80	67,67	27,83	39,05
84,58	92,25	170,72	105,69	95,84	30,30	44,93	113,59	53,85	29,46
72,29	117,78	102,57	109,05	77,88	107,96	84,36	111,76	77,68	37,85
39,40	78,18	118,78	58,49	48,51	119,08	45,87	180,89	101,58	131,76
124,19	85,63	53,55	43,89	35,84	146,84	109,51	43,67	136,06	136,42
47,36	138,34	72,38	67,71	167,38	98,75	84,53	85,10	49,53	103,18
125,09	119,92	147,59	74,47	26,51	64,20	85,20	67,38	39,27	57,94
114,36	90,36	106,82	51,80	92,33	78,81	62,55	59,59	198,04	80,00
94,14	129,86	103,90	164,55	69,99	50,98	38,23	87,71	89,18	96,89
62,59	103,94	92,21	70,09	52,23	77,61	65,53	89,62	68,43	110,54
109,57	63,35	113,09	56,30	176,67	81,81	70,44	57,26	140,59	65,39
151,72	70,40	80,20	71,62	130,97	72,70	74,59	96,45	97,41	33,96
96,19	68,18	67,76	114,62	55,37	104,19	62,86	105,23	74,93	72,66

pa od po $n = 200$ pseudoslučajnih brojeva koji imaju dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu zasečenu sa leve stra-

drugi skup pomoću istog izraza u kojem je $l=0$ samo dok se vrši generisanje pseudoslučajnih brojeva, inače je l

veće od nule, i odabiranjem samo onih vrednosti koje su veće ili jednake parametru zaseka l . Usvajanje istog broja podataka ($n = 200$) za jedan i drugi skup učinjeno je radi boljeg upoređenja dobijenih rezultata. Koristeći računarski program, koji je za to specijalno urađen, dobijeni su histogrami i funkcije gustine raspodele $f_1(t)$ za oba skupa prethodno navedenih pseudoslu-

čajnih brojeva. Ovi histogrami i funkcije $f_1(t)$ prikazani su na slici 4 za prvi skup i na slici 5 za drugi skup pseudoslučajnih brojeva.

Na slikama su date i vrednosti ocenjenih parametara i drugih karakteristika ove raspodele. Ocena parametra oblika $\hat{c}$ dobijena je korišćenjem izraza (19), tako što su deset puta menjane

Sl. 4 — Grafički prikaz histograma i ocenjene funkcije gustine raspodele $F(t)^{\wedge}$

Sl. 5 — Grafički prikaz histograma i ocenjene funkcije gustine raspodele $F(t)^{\wedge}$ za drugi skup pseudoslučajnih brojeva

vrednosti za F_1 i F_2 : $F_1 \in [0,15; 0,35]$ i $F_2 \in [0,85; 0,99]$, metodom slučajnog izbora za F_1 i F_2 u odgovarajućim intervalima. Konačna ocena $\hat{c}$ dobijena je kao srednja vrednost od izračunatih vrednosti. Unošenjem vrednosti za $\hat{c}$ u izraz (20), kao i drugih, prethodno određenih vrednosti karakteristika, određivana je vrednost tačkaste ocene parametra skale b .

Zaključak

Poredeći grafike i dobijene rezultate na slikama 4 i 5, može se primetiti

da je podudarnost rezultata zadovoljavajuća za oba slučaja. To znači da odabrane vrednosti t_i koje su veće ili jednake parametru zaseka l imaju isti zakon raspodele kao i one koje su dobijene direktnim generisanjem pseudo-slučajnih brojeva primenom izraza (13) u kojem je $l > 0$. Takođe, može se premetiti da su vrednosti ocenjenih parametara raspodele $\hat{l}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$ približne teorijski usvojenim vrednostima l , b i c , respektivno, što ukazuje na valjanost izvedenih izraza za određivanje tačkastih ocena parametara ove raspodele.

Literatura:

- [1] P. Chapouille et R. De Pazzis,: Fiabilité des Systèmes, Masson, Paris 1968.
- [2] B. L. Van Der Waerden,: Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin 1965.

- [3] HP-65, Stat-Pac, U.S.A. March 1976.
- [4] HP-41C, Standard Applications Handbook, Hewlett-Packard, U.S.A. 1979.