Mr Zoran Ristić,
pukovnik, dipl. inž.
Vojnotehnička akademija VJ,
Beograd

KOČENO KRETANJE MASE POMOĆU HIDRAULIČNE KOČNICE

UDC: 62-592.2.001.575

Rezime:

U radu se razmatra matematički model kretanja pokretne mase u slučaju njenog kočenja pomoću hidraulične kočnice sa površinom protočnog otvora koja se linearno menja u zavisnosti od hoda klipa. Zakon promene površine otvora, dobijen tačnim analitičkim rešenjem, aproksimira se linearnim zakonom metodom najmanjih kvadrata. Za oba slučaja određeni su potrebni parametri hidraulične kočnice i izvršena uporedna analiza. Odstupanja proračunatih parametara kreću se u granicama koje su prihvatljive za praksu.

Ključne reči: hidraulična kočnica, površina otvora, ubrzanja, put kočenja, vreme kočenja, tečnost (ulje).

BRAKING OF MOVING MASSES BY MEANS OF HYDRAULIC BRAKES

Summary:

The paper deals with a mathematical model of the braking of moving masses by means of hydraulic brakes whose orifice surface linearly changes with respect to the piston stroke. The law of orifice surface change, obtained by an accurate analytical solution, is approximated by the linear law — the least square method. The necessary parameters of hydraulic brakes are determined and the comparative analysis is made for both cases. The deviations of calculated parameters are within the acceptable limits.

Key words: hydraulic brakes, orifice surface, acceleration, braking path, time of braking, liquid (oil).

Uvod

Hidraulična kočnica (HK) služi da apsorbuje kinetičku energiju pokretnih delova mašina i uređaja. Pri tome, zavisno od konstruktivnog rešenja protočnih otvora za proticanje tečnosti, omogućuju različitu promenu parametara kočenog kretanja (put, vreme, brzina kočenog kretanja).

U literaturi su u nekim radovima opisani slučajevi kočenja pokretne mase pomoću HK sa površinama pro-

točnih otvora koje se menjaju po različitim zakonima. Međutim, u teorijskom smislu posebno su važni zadaci određivanja parametara kočenog kretanja sa promenljivim površinama protočnih otvora, kao i izbor potrebnih parametara kretanja pri zadatom zakonu kočenja pokretne mase.

Ideja rada je da se, prema [1, 2, 3], teorijski prikažu neki od najvažnijih parametara HK koji mogu da posluže kao polazna osnova za analizu sličnih ili mogućih rešenja tipičnih za artiljerijska oruđa.

Opis problema i određivanje parametara kočenog kretanja

Za opisivanje problema kočenja, mase tela koja se kreće nekom brzinom kretanja, pomoću hidraulične kočnice (HK), u kojoj se površina otvora za proticanje tečnosti linearno menja u zavisnosti od hoda klipa, usvaja se model prema sl. 1.

Sl. 1 — Šema modela hidraulične kočnice

Telo mase (m) kreće se brzinom $\dot{x}_0$ i posle udara u klipnjaču sa klipom (2), koči se dejstvom kočnice (sl. 1). Delovanje spoljnih sila na pokretnu masu se zanemaruje.

Klip se pomera unutar cilindra (1), sabija tečnost kroz otvor za proticanje (3) pravougaonog preseka, istovremeno smanjujući njegov poprečan presek. Zanemaruje se trenje klipa i klipnjače, kao i kinetička energija točkova. Takođe je uzeto da udar mase u klipnjaču nije elastičan, a pad pritiska u protočnom otvoru zavisi od gubitka tečnosti, tj. brzine pomeranja pokretne mase.

Uz navedene pretpostavke diferencijalna jednačina kretanja pokretne mase ima oblik:

$$(m + m_0)\ddot{x} + F_k = 0 \quad (1)$$

gde je:

$$F_k = \frac{\zeta \rho A_0^3}{2 a_x^2} \dot{x}^2 \quad \text{— sila otpora HK}$$

$$A_0 = \frac{D^2 \pi}{4} \quad \text{— radna površina klipa,}$$

$$a_x = b(l - x) \quad \text{— promenljiva površina protočnog otvora u cilindru HK.}$$

Posle sređivanja izraza, jednačina kretanja (1) može se napisati u obliku:

$$\ddot{x} + k \frac{\dot{x}^2}{(l - x)^2} = 0 \quad (1)$$

gde su:

$$k = \zeta \frac{\rho}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 \frac{1}{m + m_0} \frac{D^6}{b^2} \quad (2)$$

$\zeta = 2$ do 22 — koeficijent otpora proticanju tečnosti,

ρ — gustina hidraulične tečnosti (ulja),

m_0 — masa klipa sa klipnjačom,

D — prečnik cilindra kočnice,

b — širina otvora,

l — dužina otvora,
 x — pomak klipa.

Integracijom (1) dobija se brzina kočenog kretanja:

$$\dot{x} = C e^{-\frac{k}{1-x}} \quad (3)$$

C — konstanta integracije određuje se iz početnih uslova da je za $t = x = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ i data je jednačinom:

$$C = \dot{x}_0 e^{\frac{k}{1}} \quad (4)$$

Posle sređivanja izraza (3) konačan oblik za brzinu kočenog kretanja je:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\frac{kx}{1(1-x)}} \quad (5)$$

Granične vrednosti funkcije prema (5) za $x \rightarrow 0$ i $x \rightarrow -\infty$ biće:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \dot{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \dot{x} = \dot{x}_0 e^{\frac{k}{1}} \quad (6)$$

Zavisnost $\dot{x}(x)$ ima horizontalnu asimptotu čija je kvalitativna promena data na sl. 2.

Sl. 2 — Promena brzine kočenog kretanja

Diferenciranjem jednačine (5) dobija se izraz za ubrzanje pri kočenom kretanju (usporenje) koji glasi:

$$\ddot{x} = -\frac{k \dot{x}_0^2}{(1-x)^2} e^{\frac{2kx}{1(1-x)}} \quad (7)$$

Ubrzanje $\ddot{x}(x)$ na intervalu $-\infty \leq x \leq l$ ima najveću vrednost u tački $x = l - k$ i jednako je:

$$\ddot{x}_m = -\frac{\dot{x}_0^2}{k} e^{\frac{2(k-1)}{1}} \quad (8)$$

Na početku kretanja za $(t=x=0)$ i $\ddot{x} = \ddot{x}_0$ prema (7) početna vrednost ubrzanja kočenog kretanja $\ddot{x}(x)$ biće:

$$\ddot{x}_0 = -\frac{k \dot{x}_0^2}{l^2} \quad (9)$$

Promena ubrzanja $\ddot{x}(x)$ prikazana je na sl. 3.

Sl. 3 — Promena ubrzanja kočenog kretanja

Veza osnovnih parametara HK prema (2) sa parametrima kočenog kretanja prema (5) i (8) uslovljena je veličinom k .

Za problem koji se razmatra veličina k određuje se iz uslova da ubrzanje $\ddot{x}_m$ ima najmanju vrednost.

Prema (8), iz uslova za ekstremnu vrednost $\frac{\partial \ddot{x}_m}{\partial k} = 0$, veličina k prema [1] iznosi $k = l/2$. Na osnovu toga,

vrednosti početnog i najmanjeg ubrzanja pri kočenom kretanju su:

$$\ddot{x}_0 = -0,5 \frac{\dot{x}_0^2}{1},$$

$$(\ddot{x}_m)_{\min} = -0,735 \frac{\dot{x}_0^2}{1} \quad (10)$$

Ako se dobijena vrednost za $k = 1/2$ uvrsti u (2), osnovni parametri HK posle sređivanja izraza imaju oblik:

$$\frac{D^6}{b^2} = \frac{l(m+m_0)}{\zeta_p \left(\frac{\pi}{4}\right)^3} \quad (11)$$

a širina otvora:

$$b = D^3 \sqrt{\frac{\zeta_p \left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{l(m+m_0)}} \quad (12)$$

Za HK razmatranog tipa karakteristično je da se mogu unapred definisati granične vrednosti maksimalnog pritiska tečnosti u cilindru i ubrzanja klipa.

Ako se ograniče vrednosti $|\ddot{x}_m|$ i p_m , onda se prema (10) i (12) nakon sređivanja izraza dobijaju sledeće relacije:

$$m+m_0 = \frac{D^2 \pi}{4 \ddot{x}_m} p_m,$$

$$l = 0,735 \frac{\dot{x}_0^2}{\ddot{x}_m} \quad (13)$$

$$S = D^3 \sqrt{\frac{\zeta_p \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 l}{(m+m_0)}}$$

gde je:

$S = b \, l$ — površina protočnog otvora.

Vreme kočenog kretanja određuje se prema (5), rešavanjem integrala oblika:

$$t = \frac{1}{x r_0} \int_0^1 e^{\frac{k}{1-x}} dx, \quad r_0 = e^{k/l} \quad (14)$$

Pošto je za rešenje integrala dobijena funkcija koja nema konačni analitički oblik (beskonačno veliko vreme kočenja u okolini tačke $x=1$), vreme kočenog kretanja određuje se kao vreme za koje brzina $\dot{x}_0$ opadne do veličine $\alpha \dot{x}_0$ (α odnos krajnje i početne brzine kočenog kretanja).

Za ovakav pristup proračuna vremena kočenog kretanja neophodno je da se odredi nova granica integracije u (14).

Prema [1] nova granica integracije je:

$$x^* = 1 - \frac{k}{\frac{k}{1} - \ln \alpha} \quad (15)$$

Za $k=1/2$ i $\dot{x}_0=0,1\dot{x}_0$ ($\alpha=0,1$) prema (15) sledi $x^*=0,82$ l. Relacija (14) dobija oblik:

$$t_{0,1} = \frac{1}{x_0 e^{0,5}} \int_0^{0,82} e^{\frac{0,5 l}{1-x}} dx \quad (16)$$

Ako se integral (16) reši metodom numeričke integracije (Simpsonova formula, $n=10$ intervala), za vreme kočenog kretanja dobija se:

$$t_{0,1} = 1,705 \frac{1}{x_0} \quad (17)$$

Definisanje zakona promene protočnih površina

Za određivanje parametara HK kod koje se površine protočnih otvora linearno menjaju sa hodom klipa

usvojen je metod prema [1]. Zakon promene površine protočnih otvora, dobijen analitičkim postupkom, izraziće se približnim rešenjem kojim se obezbeđuje kočenje klipa sa konstantnim ubrzanjem $|\ddot{x}_a|$. Pri $|\ddot{x}_a| = \text{const.}$ pređeni put kočenog kretanja je:

$$x = \dot{x}_0 t - \frac{\ddot{x}_a t^2}{2} \quad (18)$$

Deriviranjem (18) po vremenu i zamenom promenljivih, posle sređivanja izraza, dobija se zavisnost brzine $\dot{x}$ od hoda klipa x .

$$\dot{x} = \sqrt{\dot{x}_0^2 - 2\ddot{x}_a x} \quad (19)$$

Konačno se potrebni zakon promene površine otvora određuje uvrštavanjem (19) u (1) i glasi:

$$F(x) = \int \frac{k_k}{\dot{x}_a} \sqrt{\dot{x}_0^2 - 2\ddot{x}_a x} \quad (20)$$

gde je: $k_k = kb^2$.

Promena površine $F(x)$ data je na sl. 4.

Sada linearni zakon promene površina protočnih otvora $\Phi(x)$ treba definisati tako da su odstupanja u od-

Sl. 4 — Zakon promene površine protočnih otvora

nosu na zahtevanu promenu $F(x)$ najmanja. Za rešavanje ovog problema usvojena je metoda najmanjih kvadrata.

$$J = \int_0^y [F(x) - \Phi(x)]^2 dx \quad (21)$$

gde su:

$$y = \frac{\dot{x}_0^2}{2\ddot{x}_a} \quad \text{— gornja granica intervala integracije, a}$$

$$\Phi(x) = a_0 - a_1 x \quad \text{— usvojeni zakon linearne promene površina protočnih otvora.} \quad (22)$$

Koeficijenti a_0 i a_1 u (22) određuju se iz uslova minimuma integrala (21). Odgovarajućim programskim modelom dobijena su njihova rešenja:

$$a_0 = 1,066 \dot{x}_0 \sqrt{\frac{k_k}{\ddot{x}_a}},$$

$$a_1 = 1,066 \frac{\ddot{x}_a}{\dot{x}_0} \sqrt{\frac{k_k}{\ddot{x}_a}} \quad (23)$$

Ako je put kočenog kretanja pri tačnom i približnom rešenju isti, veličina maksimalnog ubrzanja x_{mk} pri kvadratnom približenju postiže se za:

$$x = l - \frac{k_k}{a_1^2} \quad (24)$$

i iznosi:

$$\ddot{x}_{mk} = - \frac{\dot{x}_0^2 a_1^2}{k} e^{2 \frac{(k_k - l k a_1^2)}{a_1^2 l k}} \quad (25)$$

gde je:

$$\frac{k_k}{a_1^2} = 0,39 \frac{\dot{x}_a}{\ddot{x}_a}, \quad l k = 0,66 \frac{\dot{x}_0^2}{\ddot{x}_a} \quad (26)$$

Uvrštavanjem (26) u (25) konačno se dobija:

$$\ddot{x}_{mk} = 1,12 |\ddot{x}_a| \quad (27)$$

Vreme kočenog kretanja (pada brzine $\dot{x}_0$ do $0,1\dot{x}_0$) pri kvadratnom približenju (14) iznosi:

$$t_k = \frac{1}{\dot{x}_0 r_1} \int_0^{x^*} e^{\frac{k_k}{a_1^2(l_k - x)}} dx \quad (28)$$

gde je:

$$x^* = 0,791, \frac{k_k}{a_1^2} = 0,58 l, \quad r_1 = e^{\frac{k_k}{a_1^2 l_k}}$$

Analognim postupkom rešavanja (28), kao u slučaju (16), dobija se:

$$t_k = 1,67 \frac{l}{\dot{x}_0} \quad (29)$$

Komentar proračunatih parametara

Uporednom analizom proračunatih parametara HK po tačnom i približnom rešenju dobija se:

— po tačnom rešenju najveće ubrzanje $\ddot{x}_{mt}$ kočenog kretanja dobije se za $x=0,5l$, a na osnovu (10) i (27) odnos ubrzanja biće:

$$\frac{\ddot{x}_{mk}}{\ddot{x}_{mt}} = 1,014$$

Ubrzanje $\ddot{x}_{mk}$ po približnom rešenju je za 1,40% veće u odnosu na tačno rešenje;

— iz odnosa proračunatih vremena kočenog kretanja:

$$t_t/t_k = 1,017$$

Vreme kočenja, odnosno pada brzine $\dot{x}_0$ do $0,1\dot{x}_0$ po tačnom rešenju je za 1,70% veće u odnosu na vreme po približnom rešenju;

— pri linearnom zakonu promene protočnih površina maksimalna ubrzanja kočenog kretanja za oba slučaja su:

$$\ddot{x}_{mt} = \ddot{x}_{mk}$$

Iz jednačine ubrzanja sledi da je dužina otvora:

$$l_t = 0,656 \frac{\dot{x}_0^2}{\ddot{x}_a} \quad (30)$$

Za upoređivanje vremena kočenog kretanja, prema (15), nove granice integracije su:

$$x_t^* = 0,538 \frac{\dot{x}_0^2}{\ddot{x}_a}, \quad i \quad x_k^* = 0,531 \frac{\dot{x}_0^2}{\ddot{x}_a}$$

Rešavanjem (14) analognim postupkom za oba slučaja određena su vremena kočenog kretanja t_t i t_k , a njihov odnos je:

$$\frac{t_k}{t_t} = 1,042$$

Dakle, vreme kočenog kretanja pri izabranom linearnom zakonu promene površine protočnih otvora po približnom rešenju je za 4,20% veće od dobijenog po tačnom rešenju.

Zaključak

Kočeno kretanje mase pomoću HK sa površinama protočnih otvora koje se linearno menjaju sa hodom klipa poseban je slučaj opšteg problema kočenja pokretne mase, što je interesantno i za problematiku protivtrazajućeg uređaja na oruđima.

Dato analitičko rešenje omogućuje da se ovaj slučaj detaljnije teorijski istraži i dobiju konačne relacije za izračunavanje parametara kočenog kretanja pokretne mase, koje treba proveriti i verifikovati u praksi.

Na osnovu uslova za ekstremne vrednosti ubrzanja, datim modelom rešenja mogu se odrediti relacije kojima su povezani najvažniji parametri i veličine HK (dimenzije elemenata HK, protočne površine).

Provedena uporedna analiza maksimalnog ubrzanja i vremena kočenog kretanja, koji su dobijeni tačnim i približnim rešenjem, pokazuje da su raz-

like manje od 2%, što se može smatrati prihvatljivim za inženjersku praksu.

Pri primeni datog modela na konkretna rešenja protivtrzajućeg uređaja na oruđima važno je da se utvrdi za koji dijapazon promene parametara kretanja trzajuće mase je opravdana primena HK sa linearnim zakonom promene protočnih površina.

L i t e r a t u r a:

- [1] Lunev, B. B.: O častnom slučae tormoženija, massi pri pomoči gidrodempfera, Mašinostroenie Moskva, 8/1981.
- [2] Cuhanova, E. A. i dr.: Rasčot gidrodempfera s učotom diapazona izmenenija massi, Mašinostroenie, Moskva, 1981.

- [3] Levitsky, H.: Rasčot upravljajuščih ustrojstv dljatormnoženija gidroprivoda mašin avtomatov, Mašinostroenie, 1971.