Dr Slavko Tomović,
dipl. inž.
Tehnički opitni centar KoV,
Beograd

PROGNOZIRANJE STANJA TEHNIČKIH PROIZVODA KORIŠĆENJEM LINIJE REGRESIJE I KOEFICIJENTA VARIJACIJE

UDC: 519.246/.248

Rezime:

U procesu razvoja, proizvodnje i korišćenja tehničkih proizvoda važno mesto ima kontrola i predviđanje (prognoza) karakteristika kvaliteta i pouzdanosti. U ovom članku razmatran je mogući prilaz, zasnovan na pretpostavci da se promena parametra stanja proizvoda može izraziti matematičkom funkcijom. Za to se može koristiti dvoparametarska stepena funkcija kao linija regresije. Dat je metod za ocenu parametara ovakve funkcije. U slučaju kada se Vejbulova raspodela može primeniti na vreme rada do otkaza kao slučajnu veličinu, metoda koeficijenta varijacije korišćena je za ocenu parametra oblika te raspodele. Metodologija je ilustrovana praktičnim primerom i može se analogno primeniti i u slučajevima kada egzistira neki drugi model funkcije koja izražava promenu parametra stanja proizvoda.

Ključne reči: prognoziranje stanja proizvoda, funkcija regresije, standardna devijacija, vreme do otkaza, koeficijent varijacije, stepena funkcija, Vejbulova raspodela.

FORECASTING OF A TECHNICAL PRODUCT STATE USING THE REGRESSION FUNCTION AND THE VARIATION COEFFICIENT

Summary:

In the process of the development, manufacture and use of technical products an important place has the control and forecast (prediction) of the quality and reliability characteristics. This paper gives an approach which is based on the assumption that the change of a state parameter of the product can be expressed by a mathematical function. For this purpose the two-parameter power function as the regression function can be used. In addition, the method for estimating the parameters of this function is presented. In the case when the Weibull distribution can be used for the time to failure as a random value, the method of the variation coefficient is used for estimating the shape parameter of this distribution. This methodology is illustrated by a practical example and can be used as well in the cases when here are some other models of the function which represents the change of a product state parameter.

Key words: product, state forecasting, regression function, standard deviation, time to failure, variation coefficient, power function, Weibull distribution, shape parameter product state parameter.

Uvod

Teorija prognoziranja i matematičkog modelovanja dobila je široku primenu u svim oblastima života i ra-

da, posebno u industriji i eksploataciji tehničkih proizvoda.

Prognoziranje je neophodan preduslov za optimizaciju bilo koje aktivnosti u sferi proizvodnje, korišćenja i

održavanja proizvoda. Radi toga razrađuju se osnove opšte teorije prognoziranja.

Osnovni zadatak prognoziranja jeste iznalaženje optimalnih promena prognoziranih karakteristika i parametara sa ciljem da se postigne maksimalan efekat po nekom unapred utvrđenom kriterijumu (ekonomskom, tehničkom, tehnološkom, ekološkom itd.). Tri osnovne etape u ukupnom ciklusu prognoziranja su: retrospekcija, dijagnostika i prognoza.

U prvoj etapi prati se ponašanje parametara stanja proizvoda u prošlosti, proučava se i razrađuje matematički model promene stanja, određuju se karakteristični parametri stanja elemenata i sklopova i definišu kriterijumi za dozvoljeno odstupanje parametara, kao i kriterijumi za definisanje otkaza.

U etapi dijagnostike utvrđuju se početne vrednosti parametara stanja i dozvoljena, granična vrednost odstupanja parametara u odnosu na referentnu ili nazivnu vrednost. U ovoj etapi istovremeno se mere parametri i određuje metoda prognoziranja.

Treća etapa obuhvata prognoziranje toka promena vrednosti parametara u budućnosti i njihov uticaj na ukupno stanje procesa u trenutku dijagnostike.

Tehničko stanje proizvoda određuje se sveukupnošću parametara i fizičkih veličina koji karakterišu sposobnost propisanog funkcionisanja proizvoda od čijih vrednosti zavise aktivnosti u oblasti održavanja, remonta, planiranja rezervnih delova i troškova u procesu tehničkog opsluživanja tokom veka proizvoda.

Ovaj članak posvećen je inženjerskom prognoziranju tehničkog stanja proizvoda korišćenjem odabranog modela funkcije regresije (trenda) za po-

smatrani parametar stanja i koeficijenta varijacije kao statističkog pokazatelja.

Prognoziranje stanja tehničkih proizvoda

Pod linijom regresije (ili trenda) podrazumeva se kriva koja odražava promenu vrednosti neke funkcije u vremenu. Ova linija može se predstaviti linearnom, stepenom ili nekom drugom funkcijom.

Pretpostavlja se da se promena stanja proizvoda pokorava takvoj vremenskoj zavisnosti sve do vremena kada se dostiže granična vrednost i nastupa otkaz proizvoda. Na primer, sistem četkice-kolektor, kod kolektorske električne mašine, u toku rada stalno se haba, što na kraju dovodi do prestanka rada (do otkaza) mašine. Trošenje četkica (izraženo u milimetrima), može se pratiti u vremenu i izraziti funkcijom:

$$dl = f(t) \quad (1)$$

koja je prikazana na slici 1.

Sl. 1 — Promena parametra stanja u vremenu

Istrošenost četkica dl sve više se povećava i u trenutku t_g dostiže vrednost dl_g (granično) kada nastupa ot-

kaz mašine, odnosno opasnost nastanka težeg kvara.

S obzirom na to da se teži da ovo vreme bude što duže (vreme rada bez otkaza), onda se takva karakteristika deklariše i kao svojstvo kvaliteta. Kupac je zainteresovan da proveriti ovu karakteristiku, pa će u određenim slučajevima izvršiti potrebna ispitivanja, kako bi što brže i jeftinije došao do podataka. U normalnim uslovima korišćenja proizvoda bilo bi neekonomično da se ispitivanje vrši sve do nastupanja otkaza. Osim toga, to bi bilo i neracionalno, jer bi se dugo čekalo na podatke (utoliko duže ukoliko je pouzdanost veća).

Korišćenjem funkcije (1) ovo vreme može se skratiti. Ispitivanja se sprovode u nekom realnom vremenu t_r , a onda se poznavanjem funkcije (1) izračunava (prognozira) vreme rada do otkaza t_g (granično vreme):

$$t_g = f(t_r, dl_g) \quad (2)$$

Teorijski elementi ove metode dati su u jednačinama (2) i (3).

Na primer, ako je trošenje četki-
ca prikazano stepenom funkcijom oblika:

$$dl = at^b \quad (3)$$

u kojem su a i b poznate konstante, a t je vreme rada, onda moment otkaza karakteriše vrednost parametra stanja:

$$dl_g = at_g^b \quad (4)$$

Iz izraza (3) može se izračunati vreme rada do otkaza:

$$t_g = \left(\frac{dl_g}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (5)$$

Analogno ovom jednostavnom primeru i kod drugih proizvoda mogu se posmatrati neki parametri stanja, npr. kapacitet električnog akumulatora,

frekvencija neke veličine, greška regulatora, promena snage, pritiska, temperature, otpornost izolacije, potrošnja goriva i ulja, intenzitet svetla, razni zazori u mašinstvu, habanje elementa prenosa, temperatura, elektromagnetske smetnje, nivo buke, elektronsko pojačanje, perzistencija katodne cevi, itd.

Od konkretnog proizvoda zavisi koja će se fizička komponenta i veličina pratiti u radu. Za dati referentni parametar stanja (y) treba naći, analogno izrazu (1), funkciju:

$$y = f(t) \quad (6)$$

U praksi najčešće ova funkcija nije poznata pa se mora zameniti nekom drugom funkcijom poznatog oblika. Generalno, može se pretpostaviti da je to polinom [1]:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (7)$$

Koeficijenti $a_0, a_1, \dots, a_n$ mogu se odrediti po metodi najmanjih kvadrata koja pretpostavlja da dati skup tačaka (y, t) najbolje povezuje ona linija $y = f(t)$ za koju matematičko očekivanje

$$M[(y - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \dots - a_n t^n)^2] \quad (8)$$

ima minimum, a to je slučaj kada su njeni parcijalni izvodi po parametrima a_i jednaki nuli. Na taj način može se dobiti $(n+1)$ jednačina i iz takvog sistema izračunati svi koeficijenti ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$).

U praksi je obično zadovoljavajući linearni slučaj:

$$y = a_0 + a_1 t \quad (9)$$

ili stepena funkcija:

$$y = at^b \quad (10)$$

gde su a i b bilo koji konstantni koeficijenti. Koeficijenti a i b mogu se odrediti, takođe, metodom najmanjih kvadrata. Radi toga izraz (10) prethod-

no treba logaritmovanjem transformisati u oblik:

$$\ln y = \ln a + b \ln t \quad (11)$$

Konačni izrazi za izračunavanje koeficijenta a i b su:

$$\ln a = (\ln y)_{sr} - b(\ln t)_{sr} \quad (12a)$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^m [\ln t_k - (\ln t)_{sr}] [\ln y_k - (\ln y)_{sr}]}{\sum_{k=1}^m [\ln t_k - (\ln t)_{sr}]^2} \quad (12b)$$

Ovde su

$$(\ln y)_{sr} = \frac{\sum_{k=1}^m \ln y_k}{m}, \quad (\ln t)_{sr} = \frac{\sum_{k=1}^m \ln t_k}{m} \quad (13)$$

Praktično odabere se n ispitnih primeraka proizvoda i izvrše merenja vremena rada, koje se podeli u 5 do 8 intervala. Unutar ovakvih intervala vremena posmatraju se odgovarajuće vrednosti parametra stanja. Za svaki interval izračuna se srednja vrednost vremena rada i odgovarajuća srednja vrednost parametra koji se prikazuju kao y_i i t_i (za interval i). Na svakom ispitnom primerku izvrši se samo jedno merenje, a ako je izvršeno više merenja uzima se srednja vrednost za taj primerak.

Pošto se prema izrazima (12a) i (12b) izračunaju koeficijenti a i b za svaki ispitni primerak izračuna se prognozirano vreme rada do otkaza preko izraza:

$$t_{gi} = t_i \left(\frac{y_g}{y_i} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (14)$$

gde je:

t_{gi} — vreme rada do otkaza i -tog primerka ($i = 1$ do n),

t_i — vreme kada je izmerena vrednost y_i ,

y_g — granična vrednost parametra pri kojoj nastupa otkaz, odnosno nepropisni rad.

Srednje vreme rada do otkaza izračunava se iz izraza:

$$T_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{gi} \quad (15)$$

Ako se pretpostavi da se vreme rada do otkaza, kao slučajna veličina, pokorava dvoparametarskom Vejbulovom zakonu raspodele, tada je funkcija pouzdanosti:

$$R(t) = \exp[-\gamma t^\beta] \quad (16)$$

Za ovu raspodelu parametri γ i β mogu se izračunati iz statističkih podataka za vremena rada do otkaza i to preko koeficijenta varijacije koji se definiše kao količnik standardne devijacije σ i srednje vrednosti slučajne veličine t :

$$v = \frac{\sigma}{T_{sr}} \quad (17)$$

Srednja vrednost T_{sr} definisana je izrazom (15), a standardna devijacija σ izrazom:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_{gi} - T_{sr})^2} \quad (18)$$

gde je:

t_{gi} — prognozirano vreme rada do otkaza i -tog primerka.

Za dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu koeficijent varijacije zavisi od parametra oblika β i iznosi:

$$v = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_{gi}}{T_{sr}} - 1\right)^2} \quad (19)$$

Izrazi

$$\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (20)$$

su vrednosti gama-funkcije koja se definiše kao:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (21)$$

Vrednosti gama-funkcija mogu se odrediti iz tablica.

Za Vejbulovu raspodelu srednje vreme rada od otkaza može se dati u obliku:

$$T_{sr} = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (22)$$

pa se iz tog izraza može izračunati parametar razmere γ .

Ako se imaju u vidu izrazi (17) i (19), onda se preko koeficijenta vari-

jacije v može odrediti parametar β ekstrapolacijom pomoću tabela za vrednosti gama-funkcije.

U tabeli 1 date su neke vrednosti ove funkcije.

Ako se za vrednost parametra oblika 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 2,1; 2,3; 2,5; 2,7; 2,9 po izrazu (19) izračunaju odgovarajući koeficijenti varijacije, može se formirati niz parova: (1,1; 0,91022), (1,3; 0,77572), (1,5; 0,67897), (1,7; 0,60548), (1,9; 0,54745), (2,1; 0,50029), (2,3; 0,46108), (2,5; 0,42791), (2,7; 0,39942), (2,9; 0,37466).

Iz ovog niza metodom najmanjih kvadrata mogu se odrediti parametri m i α stepene funkcije:

$$\beta = m v^{\alpha} \quad (23)$$

Ovom funkcijom može se približno, iz poznate vrednosti za koeficijent varijacije v , izračunati vrednost parametra oblika β . Prikazanom nizu od-

Tabela 1

X	$\Gamma(X)$	X	$\Gamma(X)$	X	$\Gamma(X)$
1,00	1,00000	1,10	0,95135	1,55	0,88887
1,01	0,99433	1,15	0,93304	1,60	0,89352
1,02	0,98884	1,20	0,91817	1,65	0,90012
1,03	0,98355	1,25	0,90640	1,70	0,90864
1,04	0,97844	1,30	0,89747	1,75	0,91906
1,05	0,97350	1,35	0,89115	1,80	0,93138
1,06	0,96874	1,40	0,88726	1,85	0,94561
1,07	0,96415	1,45	0,88566	1,90	0,96177
1,08	0,95973	1,50	0,88623	1,95	0,97988
1,09	0,95546			2,00	1,00000

govaraju, za dijapazon β od 1,1 do 2,9 $m \approx 0,985$; i $\alpha \approx -1,096$.

Sa ovim vrednostima izraz (23) poprima oblik:

$$\beta = 0,985 v^{-1,096} \quad (24)$$

U dijapazonu β od 1,10 do 2,9 dobijaju se preko izraza vrednosti β sa greškom manjom od 0,73%.

jacije on zavisi od potrebne relativne tačnosti i statističkog poverenja. Za slučaj Vejbulove raspodele u tabeli 2 može se odabrati broj primeraka. Tabela 2 [3] važi za slučaj velikog osnovnog skupa, a za manji skup mogu se izvršiti korekcije pomoću dijagrama na slici 2.

Krive 100, 200, 300, 500, 750, 1000, 2000, 3000, 5000, karakterišu opšti broj primeraka osnovnog skupa.

Tabela 2

Relativna tačnost	Koeficijent varijacije												
	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
poverenje 0,80													
0,05	50	60	70	90	108	125	140	160	180	225	275	285	300
0,10	14	18	23	27	31	39	46	51	56	61	67	74	80
0,15	7	9	11	13	16	19	22	25	28	30	32	40	45
0,20	5	6	8	9	10	12	14	15	18	20	22	25	27
poverenje 0,90													
0,05	100	152	180	220	265	300	360	420	460	510	550	570	600
0,10	30	37	46	57	70	80	92	100	125	150	167	185	200
0,15	15	19	24	28	34	39	45	51	59	67	73	81	90
0,20	10	12	15	19	20	25	29	32	37	40	45	50	55
poverenje 0,90													
0,05	172	218	270	340	430	500	560	640	720	820	900	940	1000
0,10	47	59	74	93	115	135	155	178	208	227	242	270	300
0,15	24	30	37	45	53	61	72	82	98	112	120	139	150
0,20	15	19	23	29	33	39	45	50	57	65	72	79	90

Za prognoziranje po ovoj metodi na početku se treba odlučiti za broj ispitnih primeraka. Za datu raspodelu i procenjenu vrednost koeficijenta vari-

Pri prognoziranju po opisanoj metodi redosled postupaka je sledeći:

1. Odabere se parametar stanja koji odgovara bitnoj funkciji proizvo-

da i odredi se granično odstupanje (ili degradacija) y_g .

2. Zavisno od namene analize odabere se željena tačnost i poverenje.

Sl. 2 — Dijagram za korekciju broja ispitivanih primeraka (rezultata eksperimenata) u zavisnosti od broja elemenata osnovnog skupa

Tačnost se bira u opsegu od 0,05 do 0,25, a poverenje od 0,95 do 0,80 [2, 3]. Za grube i prethodne analize bira se niže vrednosti za poverenje i manje tačnosti.

3. Iz tabele 2 i sa slike 2 odabere se broj ispitnih primeraka za datu tačnost i poverenje. Pri tome se mora proceniti koeficijent varijacije posmatranog parametra stanja. U tabeli 2 predviđene su vrednosti koeficijenata varijacije od 0,4 do 1,00 što odgovara Vejbulovom zakonu raspodele.

Srednja vrednost i standardna devijacija ispitivanog parametra stanja obično se određuju na osnovu informacija o radu elemenata istih ili sličnih sistema. Ako informacije nema, treba ili izmeniti broj ispitnih primeraka ili, ako je to moguće, prihvatiti drugu tačnost i poverenje.

Kada su u pitanju elektrotehnički proizvodi može se, radi lakše procene, koristiti MILHDBK-217 E koji za razne proizvode sadrži podatke o intenzitetima otkaza. Iz tih podataka može se proceniti t_{sr} , što znatno olakšava prilaz.

4. Odredi se koeficijent varijacije iz izraza (19), a pomoću tabela za gamma-funkciju, ili preko izraza (24) odredi se parametar β , a zatim i parametar γ preko izraza (22).

Primer:

Dat je statistički niz vrednosti parametra $y(t)$ — habanje kolektora za $n=25$ primeraka univerzalnih električnih motora iste serije. Granična (dopuštena) vrednost trošenja je 2 mm. Niz je dat u rastućem poretku vremena (tabela 3).

Treba odrediti karakteristike dinamike ovog parametra, eksponent stepene funkcije, srednju brzinu promene parametra, srednje vreme rada do otkaza, kao i parametre Vejbulove raspodele vremena rada do otkaza.

Parametar stanja $y(t)$ za svaki motor izmeren je samo jedanput.

Rešenje: ukupan vremenski period podeli se na 6 intervala. Za svaki interval izračuna se srednja vrednost parametra i srednje vreme rada (tabela 4.).

Po tačkama (y_j, t_j) ($j=1$ do 6) provodi se eksperimentalna kriva promene parametara. Izračunaju se koeficijenti stepene funkcije a i b :

$$b = \frac{\sum_{j=1}^6 (\ln t_j - X) (\ln y_j - Z)}{\sum_{j=1}^6 (\ln t_j - X)^2} = 1,27$$

Tabela 3

Redni broj	Vreme t_i (h)	Parametar Y_i (mm)
1.	5,0	0,01
2.	23	0,04
3.	38	0,03
4.	38	0,07
5.	56	0,06
6.	90	0,06
7.	130	0,34
8.	135	0,23
9.	145	0,27
10.	145	0,39
11.	147	0,39
12.	200	0,29
13.	245	0,32
14.	245	0,53
15.	262	0,51
16.	269	0,10
17.	377	1,23
18.	525	1,76
19.	607	2,18
20.	648	0,62
21.	810	3,09
22.	931	3,65
23.	974	3,85
24.	1005	1,36
25.	1058	4,25

$$a = \exp(Z - bx) = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ mm/h}$$

$$X = -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \ln t_j = 5,42$$

$$Z = -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \ln y_j = -0,73$$

Sa ovako određenim parametrima a i b izvrše se sva ostala izračunavanja, koja su prikazana u tabeli 5.

U tabeli 6 data su izračunata prognozirana vremena rada do otkaza po izrazu (14). Na osnovu ovih parametara izračunava se:

$$T_{sr} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} t_i \left[\frac{y_g}{y_i(t_i)} \right]^{\frac{1}{b}} = 838,61 \text{ h}$$

i koeficijent varijacije:

$$v = \sqrt{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \left(\frac{t_{gi}}{T_{sr}} - 1 \right)^2} = 0,626$$

Preko izraza (20) izračunava se vrednost parametra oblika Vejbulove raspodele:

$$\beta = 0,985 \cdot 0,626^{-1,096} = 1,646$$

a pomoću izraza (22) parametar razmere:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left[\frac{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}{T_{sr}} \right]^{\beta} \\ &= \left[\frac{0,89443}{838,61} \right]^{\frac{1}{1,645}} = 1,29 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (24)$$

Tabela 4

	Vremenski intervali					
	1	2	3	4	5	6
Opseg (h)	0 — 60	60 — 145,5	145,5 — 245,5	245,5 — 400	400 — 900	900 — 1100
t_j (h)	32	125	184,25	288,25	647,5	992
y_j (mm)	0,042	0,225	0,3475	0,5925	1,9125	3,2775

Tabela 5

Broj inter- vala	Vreme (h)	$\ln t_j$	Habanje (mm)	$\ln y_j$	$\ln t_{j-x}$	$\ln y_{j-z}$	$(\ln t_{j-x})$ $(\ln y_{j-z})$	$(\ln t_j -$ $- X)^2$
1.	32	3,4657	0,0420	-3,1701	-1,9588	-2,4357	4,7710	3,8369
2.	125	4,8283	0,2250	-1,4917	-0,5962	-0,7573	0,4515	0,3555
3.	184,25	5,2163	0,3475	-1,0570	-0,2082	-0,3226	0,0672	0,0433
4.	228,25	5,6638	0,5925	-0,5234	0,2393	0,2110	0,0505	0,0573
5.	647,50	6,4731	1,9125	0,6484	1,0486	1,3828	1,4500	1,0996
6.	992	6,8997	3,2775	1,1871	1,4752	1,9215	2,8346	2,1762

Tabela 6

Red. br.	Vreme do otkaza t_{ei} (h)	Red. br.	Vreme do otkaza t_{ei} (h)	Red. br.	Vreme do otkaza t_{ei} (h)	Red. br.	Vreme do otkaza t_{ei} (h)
1.	322,44	8.	567,22	15.	700,25	22.	1361,06
2.	498,61	9.	575,32	16.	739,57	23.	1418,42
3.	523,72	10.	580,09	17.	767,33	24.	1627,64
4.	524,41	11.	580,52	18.	882,57	25.	2837,00
5.	530,52	12.	581,95	19.	913,09		
6.	531,64	13.	584,86	20.	1032,93		
7.	552,54	14.	696,17	21.	1035,21		

Zaključak

U oblasti proizvodnje i tehničkog opsluživanja proizvoda primenjuju se radikalne mere za optimizaciju procesa i postizanje maksimalne efikasnosti. Posebno važno mesto među ovim merama zauzima optimalno upravljanje pouzdanošću proizvoda. Radi toga se pristupa prognozi stanja tehničkog stanja proizvoda. Sa tačke gledišta prognozi stanja najveći značaj ima modeliranje funkcije koja karakteriše izmenu parametra stanja $f(t)$. Kao kriterijum za izbor funkcije (linearne, stepene, eksponencijalne i dr.) služi bliskost vrednosti aproksimirajuće funkcije sa stvarno realizovanim vrednostima parametra stanja.

Literatura:

- [1] Tomović, S.: Metode skraćenih ispitivanja pouzdanosti teh. sistema, NTP, xxx, 1980. br. 6.
- [2] Petrić, J., Jevtić, M., Stojanović, V.: Analiza pouzdanosti, Beograd, Savremena administracija, 1979.

U velikom broju praktičnih primera, kao aproksimirajuća funkcija, može se koristiti stepena funkcija $y=at^b$ koja omogućava dosta elastično aproksimiranje jer ima dva parametra. Primena ovog matematičkog modela, uz pretpostavku da važi dvoparametarski Vejbulov zakon raspodele vremena rada do otkaza, omogućava efikasnu matematičko-analitičku osnovu za prognozi stanja tehničkog stanja proizvoda.

Metodologija je ilustrovana na praktičnom primeru, a može se analogno primeniti i za druge modele aproksimirajuće funkcije.

- [3] Mihlin, V. M.: Prognozirovanie tehničeskoga sostojanija mašin, Moskva, Kolos, 1976.