Dr Dušan Regodić,
potpukovnik, dipl. inž.
Vojnotehnička akademija VJ,
Beograd

REVERZIBILNI PRORAČUN PUTANJE PROJEKTILA PRIMENOM MODELA SA ŠEST STEPENI SLOBODE KRETANJA

UDC: 531.552:533.665.015

Rezime:

U toku leta projektila, sa promenom napadnih uglova, menjaju se vrednosti Marfijevih koeficijenata H , P , M i T , u zavisnosti od promene masenih karakteristika i derivativa aerodinamičkih koeficijenata u funkciji promene brzine leta projektila. Osobina derivativa aerodinamičkih koeficijenata da su sporopromenljive funkcije pređenog puta, omogućila je u dosadašnjim numeričkim proračunima vlastito »zamrzavanje« na delu putanje. Ova osobina, uneta u numerički proračun, svakako generiše grešku pri numeričkim proračunima. U radu je data modifikacija numeričkog i programskog rešenja leta projektila sa šest stepeni slobode kretanja. Programsko rešenje za aerodinamičke koeficijente povezano je sa programskim rešenjem za šest stepeni slobode kretanja. Modifikovano programsko rešenje sa šest stepeni slobode kretanja obavlja reverzibilni proračun spoljnobalističkih karakteristika.

Ključne reči: brzina leta, aerodinamički koeficijenti, Marfijevi koeficijenti, stabilnost leta, šest stepeni slobode, domet, napadni ugao.

REVERSIBLE CALCULATION OF A PROJECTILE PATH APPLYING THE MODEL OF SIX DEGREES OF FREEDOM MOTION

Summary:

During a projectile flight, together with the change of angles of attack, the H , P , M and T values of Murphy's coefficients are changed depending on the change of mass characteristics and derivatives of aerodynamic coefficients in the function of the projectile flight velocity change. Characteristic »freezing« on one part of the flight in numerical calculations is due to the fact that aerodynamic coefficients derivatives are slowly-changing functions of the already covered path. This characteristic, when entered into numerical calculations, automatically generates an error during numerical calculations. The paper presents a modification of numerical and software solutions of projectile flight with 6 dof motion. The program solution for aerodynamic coefficients is connected with the program solution for 6 dof motion. The modified 6 dof motion software performs the reversible calculation of exterior ballistic characteristics.

Key words: flight velocity, aerodynamic coefficients, Murphy's coefficients, flight stability, six degrees of freedom, range, angle of attack.

Uvod

Cilj ovog rada jeste da dopuni i usavrši već razvijene standardne softvere za proračun leta projektila sa

šest stepeni slobode kretanja [1, 2, 5]. Jedan od načina usavršavanja tog modela je reverzibilni proračun elemenata putanje na osnovu trenutne promene napadnog ugla i brzine leta projek-

tila. Homogeni deo jednačine može se analizirati kao diferencijalna jednačina sa promenljivim koeficijentom. Uslovi žiroskopske i dinamičke stabilnosti ukazuju da je problem nemoguće pravilno rešiti bez poznavanja Marfi-jevih koeficijenata.

Potprogram SAK je u dosadašnjem rešenju [1, 2, 3] preuzimao izlaznu datoteku derivativa aerodinamičkih koeficijenata u strujnom koordinatnom sistemu iz odvojenog programskog rešenja AERODRD1 kao funkcije Mahovih brojeva. Neophodno je povezati programsko rešenje AERODRD1 za proračun aerodinamičkih koeficijenata u obliku potprograma, koje u toku proračuna elemenata putanje poziva aerodinamičku biblioteku ADLIB. Na osnovu poznatih geometrijskih karakteristika projektila definisanih u ulaznoj datoteci, trenutnih vrednosti brzine V , napadnog ugla α , ugla klizanja β i trenutne temperature vazduha T na odgovarajućoj visini leta obavlja se reverzibilan proračun spoljnobalističkih karakteristika.

U radu se polazi od standardnih rešenja za masu, centar mase, položaj osa i momenata inercije.

Osnovne jednačine

Model kretanja projektila sa šest stepeni slobode čine četiri vektorske jednačine:

— izvod vektora položaja projektila

$$\frac{d_r \vec{r}}{dt} = \vec{V}_k \quad (1)$$

— vektorska jednačina relativnog kretanja centra mase

$$m \frac{d_r \vec{V}_k}{dt} = \Sigma \vec{R} \quad (2)$$

— kretanje oko centra mase

$$\frac{d \vec{H}^g}{dt} = \vec{M} \quad (3)$$

— veze između ugaonih brzina i izvoda uglova

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_E + \dot{\lambda} + \dot{\varphi} + \dot{\Psi} + \dot{\Theta} + \dot{\Phi} \quad (4)$$

Kretanje projektila u odnosu na Zemlju je relativno, a uticaj rotacije Zemlje ugaonom brzinom Ω_E unosi projektilu prenosno kretanje. Brzina kretanja projektila u odnosu na Zemlju V_K predstavlja relativnu brzinu, a izvodi njenih komponenti po vremenu predstavljaju komponente relativnog ubrzanja. Rezultantu spoljnih sila koje deluju na projektil čine: gravitaciona sila Zemlje, aerodinamička sila, prenosna inercijalna sila, reaktivna sila i Koriolisova sila. U praksi se zbir gravitacione i prenosne inercijalne sile smatra silom Zemljine teže ubrzanja $\vec{g}$. Kinetički i rezultujući moment spoljnih sila računa se za centar mase projektila. Rezultujući moment čine zbir aerodinamičkog momenta i momenta reaktivne sile u odnosu na centar mase. Sila Zemljine teže i inercijalna Koriolisova sila deluju u centru mase projektila i ne stvaraju momente za centar mase.

Aerobalistički koordinatni sistem koristi se za analizu leta projektila malog dometa (do 20 km). Zanimaruje se rotacija geodetskog koordinatnog sistema u odnosu na Zemlju i ugaona brzina Zemlje u odnosu na ugaonu brzinu projektila u geodetskom koordinatnom sistemu. Ne zanemaruje se Koriolisova sila i sila Zemljine teže. Projektovanjem ovih vektorskih jednačina leta na aerobalistički koordinatni sistem, uz pretpostavku da je tenzor inercije redukovan ($I_Y = I_Z$), dobija se:

— izvod vektorskih položaja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = L_{OB} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = L_{LB} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

— šest skalarnih jednačina:

$$\dot{u}_k = q w_k - r v_k + \frac{(X + F_x)}{m} - g \sin \Theta - a_{cx}$$

$$\dot{v}_k = p w_k - r u_k + \frac{(Y + F_y)}{m} - a_{cy}$$

$$\dot{w}_k = -p v_k + q u_k + \frac{(Z + F_z)}{m} +$$

$$+ g \cos \Theta - a_{cz}$$

$$\dot{p} = \frac{(L + L^F)}{I_x}$$

$$\dot{q} = p_b r + \frac{(-I_x p r + M + M^F)}{I_y}$$

$$\dot{r} = -p_b r + \frac{(I_x p q + N + N^F)}{I_y}$$

— tri jednačine izvoda uglova stava

$$\dot{\Phi} = p + r \operatorname{tg} \Theta$$

$$\dot{\Theta} = q$$

(7)

$$\dot{\Psi} = \frac{r}{\cos \Theta}$$

gde su:

$$V_k = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}^T - \text{komponente relativne brzine projektila,}$$

$$\Omega^b = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T - \text{komponente ugaone brzine,}$$

$$R = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T - \text{komponente aerodinamičke sile,}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T - \text{komponente reaktivne sile,}$$

$$M^a = \begin{bmatrix} L & M & N \end{bmatrix}^T - \text{komponente aerodinamičkog momenta,}$$

$$M^F = \begin{bmatrix} L^F & M^F & N^F \end{bmatrix}^T - \text{komponente reaktivnog momenta,}$$

$$H = \begin{bmatrix} I_x p & I_y q & I_z r \end{bmatrix}^T - \text{komponente kinetičkog momenta.}$$

Ovim diferencijalnim jednačinama neophodno je pridružiti algebarsku jednačinu

$$p_b = r \operatorname{tg} \Theta, \quad (8)$$

i komponente Koriolisovog ubrzanja u aerobalističkom koordinatnom sistemu

$$a = \begin{bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ a_{cz} \end{bmatrix} = 2\Omega_E^b \cdot V_k \quad (9)$$

Za rotirajući projektil malih dometa vektor stanja sadrži dvanaest komponenti:

$$\left[x, y, z, u_k, v_k, w_k, p, q, r, \Phi, \Theta, \Psi \right]$$

Stabilnost leta projektila

Stabilnost projektila [1, 2, 6, 8] predstavlja sposobnost tela da njegova uzdužna osa simetrije u dovoljnoj meri prati pravac brzine translacije, koja je tangenta u svakoj tački na trajektoriji centra mase. Matematički gledano, projektil treba da poseduje takve osobine da neutrališe poremeća-

je koji izazivaju ovu nesaglasnost. Stabilnost se razmatra uvođenjem kvantitativnih kriterijuma Ljapunova u odnosu na jedan slučaj odabranog neporemećenog kretanja. Statičku stabilnost karakteriše ravnoteža sila i momenata u svakom trenutku leta projektila. Kao kvantitativni pokazatelj može se uzeti stepen preopterećenja. Dinamička stabilnost ceni se na osnovu kvantitativnih kriterijuma Ljapunova: maksimalne vrednosti amplitude poremećene veličine u odnosu na nominalnu, vremena prigušenja-trajanja prelaznog procesa, periodičnosti i aperiodičnosti, itd.

Kod klasičnih projektila stabilizacija se ostvaruje pomoću mogućnosti projektila da rotira velikom ugaonom brzinom, čime se obezbeđuje oscilatorni karakter promene veličina stanja poremećenog kretanja. Promene amplitude oscilatornog kretanja vezane su za problem dinamičke stabilnosti, i zavise od momenata i sila koje deluju na projektil, u prvom redu od prigušnog i Magnusovog momenta. Pri proučavanju dinamičke stabilnosti uvodi se kompleksna bočna brzina ζ i kompleksni bočni ugao ξ :

$$\zeta = \tilde{v} + i\tilde{w}$$

$$\xi = \tilde{\beta} + i\tilde{\alpha}$$

Uglovi $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ su mali, pa se može uspostaviti veza između kompleksne bočne brzine i kompleksnog bočnog ugla:

$$\xi = \frac{\tilde{v} + i\tilde{w}}{V} = \frac{\zeta}{V}$$

Diferencijalna jednačina po kompleksnoj bočnoj brzini je:

$$\zeta'' + (H + iP)\zeta' - (M + iPT)\zeta = iA + iE + G \quad (10)$$

Leva strana jednačine predstavlja homogeni, a desna nehomogeni (prinudni) deo, gde je:

$$H = -C_{z\sigma} + \frac{C_{mq} + C_{m\sigma}}{r_y^{*2}} \quad \text{— Marfijev koeficijent,}$$

$$r_y^{*2} = \frac{r_y}{d} \quad \text{— bezdimenzioni poluprečnik,}$$

$$P = \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{p \cdot d}{V} \quad \text{— Marfijev koeficijent,}$$

$$M = \frac{\gamma(C_{m\sigma} - C_{m\sigma} \cdot \frac{v'}{V}) - C_{mq} C_{z\sigma}}{r_y^{*2}} \quad \text{— Marfijev koeficijent,}$$

$$T = -C_{z\sigma} + \frac{\gamma C_{np\sigma}}{r_x^{*2}} \quad \text{— Marfijev koeficijent,}$$

$$A = \frac{V(C_{m0} + iC_{n0})}{r_y^{*2}} \quad \text{— aerodinamička nesimetrija,}$$

$$E = \frac{M^F + iN^F}{m\dot{v}} \cdot \frac{1}{r_x^{*2}} - i \left[\frac{(F_y + F_z)d}{m\dot{v}} \right] \quad \text{— poprečni reaktivni moment,}$$

$$G = i \frac{gd \cos \Theta}{V} \left[\frac{v'}{V} + \frac{C_{mq}}{r_y^{*2}} + iP \right] \quad \text{— moment nastao zbog ubrzanja Zemljine teže.}$$

Izbor kompleksne poprečne brzine projektila, kao parametra čija se stabilnost ispituje, omogućava izvođenje kriterijuma stabilnosti. Rešenje diferencijalne jednačine sastoji se od homogenog i partikularnog integrala. Homogena diferencijalna jednačina imaće oblik:

$$\zeta'' + (H - iP)\zeta' - (M + iPT)\zeta = 0 \quad (11)$$

Rešenje homogene diferencijalne jednačine određuje se preko karakteristične jednačine:

$$r^2 + (H - iP)r - (M + iPT) = 0 \quad (12)$$

Rešenje homogene diferencijalne jednačine imaće oblik:

$$\zeta_h = Z_1 e^{i\Phi_1} + Z_2 e^{i\Phi_2} \quad (13)$$

gde je:

$$Z_j = Z_{j0} e^{\lambda_j s^*}, \quad j = 1, 2$$

$$\Phi_j = \Phi_{j0} + \Phi_{ji} s^*, \quad j = 1, 2$$

$$r_j = \lambda_j + i\Phi_j = \frac{1}{2} [-H + iP \pm \sqrt{4M + H^2 - P^2 + 2iP(2T - H)}], \quad j = 1, 2$$

$$r_j = \frac{1}{2} \left[-H \pm \sqrt{1 - \frac{1}{Sg}} \right] + i \frac{P}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{Sg}} \right], \quad j = 1, 2$$

Da bi $\sqrt{1 - \frac{1}{Sg}}$ imalo realno re-

šenje, neophodno je zadovoljiti uslov $P^2 - 4M > 0$. Na osnovu te pretpostavke mogu se odrediti približni izrazi za frekvenciju i prigušenje:

$$\Phi_j = \frac{1}{2} \left[P \pm \sqrt{P^2 - 4M} \right], \quad j = 1, 2$$

$$\lambda_j = -\frac{1}{2} \left[H \pm \frac{P(2T - H)}{\Phi_1 - \Phi_2} \right], \quad j = 1, 2$$

Uvođenjem oznake:

$$\frac{1}{Sg} = \frac{4M + H^2}{P^2} \cong \frac{4M}{P^2} \quad (14)$$

gde je $4M \geq H^2$, zadržava se samo uticajni član $4M$. Da bi kompleksna diferencijalna jednačina imala rešenje, neophodno je da je:

$$\frac{1}{Sg} = \frac{4M}{P^2} < 1 \quad (15)$$

Uvođenjem oznake

$$Sd = \frac{2(T + C_x^*)}{H + 2C_x^*}$$

dobija se uslov dinamičke stabilnosti projektila

$$\frac{1}{Sg} < Sd(2 - Sd) \quad (16)$$

a jednačina granične krive stabilnosti definisana je izrazom

$$\frac{1}{Sg} = Sd(2 - Sd) \quad (17)$$

i prikazana na slici 1.

Programsko rešenje metode sa šest stepeni slobode kretanja

Program je namenjen za detaljan spoljnobalistički proračun i simulaciju leta rotirajućeg projektila sa i bez reaktivne sile. Tenzor inercije je simetričan, masa je konstantna ili promenljiva, a atmosfera standardna sa i bez vetra. Prema jednoj opciji program proračunava karakteristične parametre stabilnosti leta projektila, a integracija diferencijalnih jednačina obavlja se metodom Runge-Kuta sa četiri približenja.

Tačnost proračuna zavisi od: koraka integracije, tačnosti i broja derivativa aerodinamičkih koeficijenata, definisane brzine vetra i reaktivne sile.

Na slici 2 prikazan je algoritam metode sa šest stepeni slobode kretanja. Programsko rešenje sa implemen-tiranom aerodinamikom napravljeno

Sl. 1 — Granična kriva stabilnosti

Sl. 2 — Algoritam putanje projektila sa šest stepeni slobode kretanja

je u programskom jeziku FORTRAN na personalnom računaru, detaljno je prikazano u [2, 3], a sastoji se od sledećih celina:

1. Program LET6SSK — glavni program,
2. Datoteka ULAZ — ulazni podaci za proračun i simulaciju leta,
3. Datoteka CONFIG — ulazni podaci za konfiguraciju projektila,
4. Datoteka IZLAZ1 — izlazni podaci za elemente putanje,
5. Datoteka IZLAZ2 — izlazni podaci za stabilnost leta projektila.

Analiza rezultata proračuna

Na slici 3 grafički je prikazan dolet projektila 122 mm za različite polazne uglove.

Na slici 4 dat je uporedni prikaz promene dometa sa promenom polaznog ugla za projektil 122 mm za početnu brzinu $V_0 = 690$ m/s.

Na slici 5 dat je uporedni prikaz promene ordinata sa promenom polaznog ugla za projektil 122 mm za početnu brzinu $V_0 = 690$ m/s.

Na slici 6 dat je uporedni prikaz promene padne brzine sa promenom polaznog ugla za projektil 122 mm za početnu brzinu $V_0 = 690$ m/s.

Na slici 7 prikazana je promena napadnog ugla u zavisnosti od promene ugla klizanja α (β) duž putanje za projektil 122 mm. Napadni ugao projektila u momentu izlaska iz cevi nastaje kao posledica delovanja ističućih barutnih gasova i vibracije cevi. Tokom složenog kretanja oko težišta napadni ugao se smanjuje, da bi se posle kraćeg vremena amortizovao. Posle $t=4$ s vrednost $\alpha=0,1^\circ$ dok je u području temena $\alpha = 0,9^\circ$.

Na slici 8 prikazana je promena napadnog ugla u zavisnosti od promene ugla klizanja α (β) za pređeni put od jedne nutacije $X = 500$ d projektila 122 mm. Sa slike se vidi da postoji potpuna amortizacija vrednosti ovih uglova u vremenu jedne pune nutacije.

Na slici 9 prikazana je promena napadnog ugla i ugla klizanja duž putanje projektila 122 mm. Primarno dejstvo na daljnje kretanje projektila ima promena pravca brzine, koja je u početku znatno manja od uticaja početnih uslova. Na projektil destabilizirajuće deluje moment sile uzgona, Magnusov moment i prigušni

Sl. 3 — Promena dometa pri različitim polaznim uglovima

Sl. 4 — Uporedni prikaz dometa X6-DOF i X3 SSK pri različitim polaznim uglovima

Sl. 5 — Uporedni prikaz ordinata Y6-DOF i Y3 SSK pri različitim polaznim uglovima

Sl. 6 — Uporedni prikaz padne brzine V_c (6-DOF) i V_c (3SSK) pri različitim polaznim uglovima

Sl. 7 — Promena $\alpha(\beta)$ duž putanje

Sl. 8 — Promena $\alpha(\beta)$ za put $X=500$ d

Sl. 9 — Promena $\beta(t)$ duž putanje

moment. Moment prigušenja poprečne oscilacije i Magnusov moment utiču na smanjenje i povećanje amplitude oscilovanja. Ako se amplituda smanjuje kretanje je stabilno, a ako se povećava kretanje je nestabilno. Preterano velike vrednosti koeficijenta žiroskopske stabilnosti S_g čine projektil prestabilnim, što može dovesti do pojave nestabilnosti na zakrivljenom delu putanje.

Na slici 10 prikazana je promena $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ za vreme $t=3,7$ s — 89,3 s. Obezbeđenje statičke stabilnosti samo je potreban ali ne i dovoljan uslov za stabilan let projektila. Zadovoljenjem žiroskopske stabilnosti ispunjen je uslov da prostorni napadni ugao σ ima oscilatoran karakter. Dinamička stabilnost po bočnoj brzini realizuje se kada se amplitude oscilacija približa-

vaju nekoj asimptotskoj vrednosti. Taj uslov je ispunjen ako su vrednosti koeficijenata prigušenja manji od nule.

Sa slike 10 vidi se da na početnom delu putanje kod stabilnih projektila dolazi do amortizacije nutacionog kretanja koje se zadržava u malim granicama sa određenom brzinom precesije. Na krivolinijskom delu putanje brzina menja pravac koji bi osa projektila morala da prati, ali kod projektila stabilisanih rotacijom oko uzdužne ose usled inercije dolazi do opiranja. Projektil stabilniji na početnom delu putanje više će se opirati na krivolinijskom delu putanje. Karakter kretanja na krivolinijskom delu putanje uslovljen je dejstvom sila i momenata na projektil.

Sl. 10 — Promena $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ za vreme $t=3,7$ —89,3 s

Zaključak

Spoljnobalistički proračun elementarnata putanje sa šest stepeni slobode kretanja i stabilnosti leta projektila na svom putu od usta cevi do padne

tačke vrlo je blizak realnim uslovima. Pri verifikaciji postavljenog modela pošlo se od konfiguracije projektila 122 mm [2, 3, 5]. U grupi potprograma umesto izlazne datoteke SAK, implementiran je potprogram za prora-

čun aerodinamičkih koeficijenata i njihovih derivativa AERODRD1. Paralelno se obavlja reverzibilni proračun aerodinamičkih koeficijenata i spoljnoba-lističkih karakteristika. Na osnovu upoređenja eksperimentalnih i teorijskih rezultata izvršena je: korekcija aksijalnog koeficijenta za 1,8 %, povećanje numeričke vrednosti koeficijenta momenta propinjanja za 8 %, i smanjenje koeficijenta normalne sile za 8 %.

Na osnovu sprovedene analize posmatrani model je pokazao izuzetno dobru statičku i dinamičku stabilnost na početnom i zakrivljenom delu putanje. Maksimalna vrednost ugla klanja u području temena iznosi $\beta = -6,2^\circ$ posle vremena $t = 40$ s, da bi se zatim te vrednosti amortizovale na putanji prema padnoj tački.

Teorijski model leta projektila sa šest stepeni slobode verifikovan je kroz brojne numeričke eksperimente sa savremenim artiljerijskim projektima kalibra 122 mm, 152 mm i 40 mm.

Literatura:

- [1] Janković, S.: CAD of the unguided missiles, 11 th International Symposium on Ballistics, Brussels, May 09—11, 1989, pp: 749—758.
- [2] Regodić, D.: Prilog numeričkoj analizi dvodimenzionalnog strujanja oko osnosimetričnog tela, VTA VJ Beograd, doktorski rad, 1997.
- [3] Regodić, D.: Analiza stabilnosti i tačnosti matematičkog modela dinamike projektila, Međunarodni naučno-stručni skup Vazduhoplovstvo '97, Sekcija Aerodinamika i projektovanje, str. 94—100, Beograd, 1997.
- [4] Regodić, D.: Uticaj vrste strujanja na ukupni aerodinamički koeficijent, VTG-1, Beograd, 1995.
- [5] Regodić, D., Perme B.: Određivanje aerodinamičkih karakteristika pri različitim napadnim uglovima, XXII Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Vrnjačka Banja, 1997.
- [6] ***: 11 th International symposium on ballistics. Zbornik radova, Brussels-Belgium, May 09—11, 1989.
- [7] ***: 15 th International symposium on ballistics, Zbornik radova, Jerusalem-Israel, May 21—24, 1995.
- [8] ***: International standard ISO 1151 »Terms and symbols for flight dynamics« — part I—IV.