Mr Nenad Dodić,
dipl. inž.
Vojnotehnički institut VJ,
Beograd

OCENJIVANJE PARAMETARA SERVOSISTEMA METODOM NAJVEĆE VERODOSTOJNOSTI

UDC: 681.583.2.012

Rezime:

U ovom radu opisano je rešavanje problema ocenjivanja parametara servosistema koji se ne mogu posredno ili neposredno meriti, već ih treba oceniti na osnovu dinamičkog ponašanja sistema. Data je specijalna varijanta metode najveće verodostojnosti, koja je diskretna, rekurentna i iterativna. Metoda se primenjuje na izmerene vremenske serije ulaza i izlaza sistema. U prisustvu šuma daje nepristrasne ocene, praktično minimalne varijanse. Upotreba i efikasnost metode ilustrovani su sa dva primera iz prakse.

Ključne reči: servosistem, identifikacija sistema, ocenjivanje parametara, najveća verodostojnost.

ESTIMATION OF SERVOSYSTEM PARAMETERS USING MAXIMUM LIKELYHOOD METHOD

Summary:

The problem of estimation of servosystem parameters that cannot be measured is solved. Unknown parameters are estimated using system response measurements. A special discrete, recursive and iterative form of maximum likelihood method is presented. The method is applied to measured time series of system input and output. It gives minimum variance unbiased estimates in the presence of noise. The use and efficiency of the given method are illustrated through two practical examples.

Key words: servosystem, system identification, parameter estimation, maximum likelihood.

Uvod

U poslednjih pedesetak godina u svetu tehnike se stari, empirijski pristup projektovanju sistema sve više zamenjuje egzaktnim postupcima: analitičkim, grafičkim, grafoanalitičkim i numeričkim. Već dvadesetak godina se sa pojavom jeftinih, a moćnih personalnih računara, prednost daje numeričkim metodama u tolikoj meri da se čini da će računarski podržano projektovanje, zasnovano na numeričkim metodama i grafičkom prikazivanju

podataka, odneti apsolutnu prevagu nad svim ostalim načinima rada.

Ovakav trend je, osim u oblasti projektovanja novih sistema, izražen i u oblastima analize i ispitivanja postojećih sistema. U ovim oblastima računarska simulacija je moćno oruđe, koje valja koristiti pri radu sa sistemima složene unutrašnje strukture, sistemima sa izraženim nelinearnim ponašanjem, kao i radi provere valjanosti novih konstruktivnih rešenja, pre njihovog fizičkog ostvarenja.

Broj i karakter parametara matematičkog modela zavisi od tipa modela i njegove strukture. Retko se svi parametri sistema mogu izračunati na osnovu tehničkih podataka komponenta sistema ili neposredno ili posredno izmeriti. U tom slučaju, za njihovo određivanje moraju se primeniti posebne metode na izmerene sekvence ulaza i izlaza sistema. One se, obično, nazivaju metode ocenjivanja (estimacije) parametara.

Matematički modeli se ne mogu koristiti u navedenim oblastima ako njihovi parametri nisu poznati. U ovom radu govori se o određivanju (ocenjivanju) parametara koji se ne mogu meriti. Za određivanje parametara koristi se poseban oblik metode najveće verodostojnosti, koju je autor razradio i uspešno koristio u praksi [1]. Ovaj oblik predstavlja modifikaciju metode najveće verodostojnosti date u [2].

Matematički model servosistema

Servosistemi su obično nelinearni i kontinualni. U praksi je uobičajeno da se nelinearnosti linearizuju u okolini posmatrane tačke, tj. da se servosistemi opisuju linearnim kontinualnim matematičkim modelima. Ukoliko se matematički model sistema koristi u procesu digitalnog upravljanja ili u procesu računarske simulacije sistema, onda model može biti i diskretan — takav da je njegov izlaz u diskretnim vremenskim trenucima ($t_k = k\Delta t$, $k=0, 1, \dots$) dovoljno blizak izlazu posmatranog sistema. Naime, računar »vidi« spoljni svet samo u diskretnim vremenskim trenucima i »smatra« da se u međuvremenu ne događa ništa interesantno, tj. ništa što bitno odstupa od »viđenog«. Pravilnim izborom perioda odabiranja Δt treba obezbediti da se to zaista i dešava, tj. da bude zadovoljena poznata Šenonova teorema.

Dakle, ima smisla diskretnim matematičkim modelom opisivati spoljašnju dinamiku sistema, iako je on kontinualan, kao većina tehničkih sistema, ali i skoro svi procesi u prirodi. Kao što će dati primeri pokazati, diskretni modeli mogu poslužiti za određivanje strukturnih parametara kontinualnih sistema. U nastavku se razmatra određivanje parametara sledećeg diskretnog matematičkog modela:

$$y(k) = x_i(k) + \xi(k) \quad (1)$$

$$x_i(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) \quad (2)$$

$$\xi(k) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} n(k) \quad (3)$$

gde su:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \quad (4)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \quad (5)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_q z^{-q} \quad (6)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_r z^{-r} \quad (7)$$

pri tome je $n \geq m$, $r \geq q$, $u(k) = u(k\Delta t)$ — ulaz sistema (u trenutku $t = k\Delta t$) — deterministički izlaz sistema, $\xi(k)$ — aditivni šum izlaza, $y(k)$ — izlaz zagađen šumom. Operator vremenskog pomeranja obeležen je sa z : $z^{-i}x(k) = x(k-i)$, $i=0, 1, \dots$. Promenljiva $n(k)$ je beli Gausov šum. Njegovim filtriranjem (3) dobija se šum izlaza $\xi(k)$ koji predstavlja obojeni gausovski šum, tj. gausovski šum praktično ograničenog frekvencijskog spektra. $\xi(k)$ se može tumačiti kao šum sistema, kao šum merenja ili kao zbir ovih šumova, a u stvari je zastupnik slučajnih procesa, bilo u sistemu, bilo u lancu za merenje ulaza i izlaza sistema.

Model (1—3) obično se zove Boks-Dženkinsov model. Često je interesantan samo deterministički deo modela — jednačina (2), odnosno samo ocena $\hat{a}_i$, $\hat{b}_j$ parametara a_i , b_j , $i=1, 2, \dots, n$,

$j=0, 1, \dots, m$. Ukoliko se sistem posmatra kao stohastički, onda treba odrediti i ocene $\hat{c}_i, \hat{d}_j$ parametara $c_i, d_j, i=1, 2, \dots, q, j=1, 2, \dots, r$ modela šuma (3). Ukoliko se u prisustvu šuma žele dobiti nepristrasne ocene parametara a_i, b_j (tj. ocene čije je matematičko očekivanje jednako stvarnim vrednostima parametara) približno minimalne varijanse, onda je preporučljivo istovremeno ocenjivati i parametre modela determinističkog dela sistema i modela šuma, na način objašnjen u nastavku.

Metoda najveće verodostojnosti

Potrebno je odrediti parametre modela (1—3) tako da izlaz (odziv) tog modela minimalno odstupa od izlaza posmatranog sistema, koristeći izmerene vremenske serije ulaza $u(t)$ i izlaza $y(t)$ na vremenskom intervalu $(0, \Delta tT)$:

$$y(T) = (y(1) \ y(2) \ \dots \ y(T))^T \quad (8)$$

$$u(T) = (u(1) \ u(2) \ \dots \ u(T))^T \quad (9)$$

Vremenske serije predstavljene su kao vektori (matrice-kolone). Sa "T" je označena transpozicija vektora (matrice). Iz jednačine (1—3) sledi takozvani inverzni model šuma:

$$n(k) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} y(k) - \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} u(k) \quad (10)$$

Neka je $N(T)$ vremenska sekvenca belog šuma, koji u toku merenja ulaza i izlaza napada sistem:

$$N(T) = (n(1) \ n(2) \ \dots \ n(T))^T \quad (11)$$

Inverzni model šuma može se napisati u obliku:

$$N(T) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} y(T) - \frac{B(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} u(T) \quad (12)$$

S obzirom na to da je n gausovski beli šum, to je kovarijansna matrica za $N(T)$ jednaka: $V_{NN} = \sigma^2 I$, gde je I jednačina $T \times T$ matrica, a σ^2 je varijansa šuma n . Gustina raspodela verovatnoća $p(N)$ je:

$$p(N) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} N^T N \right)}{(2\pi)^{T/2} \sqrt{\det V_{NN}}} \quad (13)$$

Logaritmovanjem $p(N)$, s obzirom na (12), dobija se:

$$\begin{aligned} \ln p(N) = & -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{C}{D} y - \frac{BC}{AD} u \right]^T \left[\frac{C}{D} y - \frac{BC}{AD} u \right] \\ = & L(a, c, \sigma^2) \end{aligned} \quad (14)$$

Zbog kraćeg pisanja u prethodnom izrazu izostavljen je argument z^{-1} uz A, B, C, D , kao i argument T uz y i u . Funkcija L naziva se funkcija najveće verodostojnosti; a a i c su vektori parametara:

$$a = (a_1 \ \dots \ a_n \ b_0 \ \dots \ b_m)^T$$

$$c = (c_1 \ \dots \ c_q \ d_1 \ \dots \ d_r)^T$$

Ako se u funkciji najveće verodostojnosti vektori parametara zamene njihovim ocenama, tj. umesto a, c koriste $\hat{a}, \hat{c}$:

$$\hat{a} = (\hat{a}_1 \ \dots \ \hat{a}_n \ \hat{b}_0 \ \dots \ \hat{b}_m)^T$$

$$\hat{c} = (\hat{c}_1 \ \dots \ \hat{c}_q \ \hat{d}_1 \ \dots \ \hat{d}_r)^T$$

dobija se $L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)$. Ako je $\hat{c}$ poznato i fiksno, funkcija $L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)$ imaće najveću vrednost kada je $\hat{a} = a$, što znači da se maksimizacijom $L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)$ po $\hat{a}$, tj. iz uslova:

$$\frac{\partial L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)}{\partial \hat{a}} = 0 \quad (15)$$

dobija uslovno optimalna ocena (ona bi zaista bila optimalna kada bi bilo $\hat{c} = c$). Neka je $\hat{a}$ poznato. Maksimizacijom $L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)$ po $\hat{c}$, tj. iz uslova:

$$\frac{\partial L(\hat{a}, \hat{c}, \sigma^2)}{\partial \hat{c}} = 0 \quad (16)$$

dobija se uslovno optimalna ocena $\hat{c}$ (ona bi zaista bila optimalna kada bi bilo $\hat{a} = a$). Rešenje izraza (15) po $\hat{a}$ je [1]:

$$\hat{a} = \left\{ \sum_{k=1}^T \hat{x}_i^*(k) [z^*(k)]^T \right\}^{-1} \left[\sum_{k=1}^T \hat{x}_i^*(k) y(k) \right] \quad (17)$$

gde su:

$$\hat{x}_i^*(k) = \begin{bmatrix} -\hat{x}_i^*(k-1) \\ -\hat{x}_i^*(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{x}_i^*(k-n) \\ u^*(k) \\ \vdots \\ u^*(k-m) \end{bmatrix} \quad z^*(k) = \begin{bmatrix} -y^*(k-1) \\ -y^*(k-2) \\ \vdots \\ -y^*(k-n) \\ u^*(k) \\ \vdots \\ u^*(k-m) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{x}_i^*(k) = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} u^*(k) \quad (19)$$

$$u^*(k) = \frac{\hat{C}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})\hat{D}(z^{-1})} u(k) \quad (20)$$

$$y^*(k) = \frac{\hat{C}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})\hat{D}(z^{-1})} y(k) \quad (21)$$

$$\hat{A}(z^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_n z^{-n} \quad (22)$$

$$\hat{B}(z^{-1}) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \dots + \hat{b}_m z^{-m} \quad (23)$$

$$\hat{C}(z^{-1}) = 1 + \hat{c}_1 z^{-1} + \dots + \hat{c}_q z^{-q} \quad (24)$$

$$\hat{D}(z^{-1}) = 1 + \hat{d}_1 z^{-1} + \dots + \hat{d}_r z^{-r} \quad (25)$$

"-1" označava inverziju matrice. Rešenje izraza (16) po $\hat{c}$ je [1]:

$$\hat{c} = \left\{ \sum_{k=1}^T \hat{m}(k) [\hat{n}(k)]^T \right\}^{-1} \left[\sum_{k=1}^T \hat{m}(k) \hat{\xi}(k) \right] \quad (26)$$

gde su:

$$\hat{n}(k) = \begin{bmatrix} -\hat{\xi}(k-1) \\ -\hat{\xi}(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{\xi}(k-q) \\ \hat{n}(k) \\ \vdots \\ \hat{n}(k-r) \end{bmatrix} \quad \hat{m}(k) = \begin{bmatrix} -\hat{\xi}^*(k-1) \\ -\hat{\xi}^*(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{\xi}^*(k-q) \\ \hat{n}^*(k) \\ \vdots \\ \hat{n}^*(k-r) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\hat{\xi}^*(k) = \frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} \hat{\xi}(k) \quad (28)$$

$$\hat{n}^*(k) = \frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} \hat{n}(k) \quad (29)$$

U prethodnim izrazima pojavljuju se ocene $\hat{\xi}$, $\hat{n}$ umesto ξ , n , zato što stvarne vrednosti ovih šumova nisu poznate, niti se šumovi mogu izmeriti, $\hat{n}$ se dobija korišćenjem inverznog modela šuma (10), s tim što se umesto vrednosti nepoznatih parametara koriste njihove ocene. Izraz (17) ima sledeći rekurentni ekvivalent [1]:

$$\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} - K_k \{ [z^*(k)]^T \hat{a}_{k-1} - y^*(k) \} \quad (30)$$

$$H_k = H_{k-1} - K_k [z^*(k)]^T H_{k-1} \quad (31)$$

$$K_k = H_{k-1} \hat{x}_i^*(k) \{ \sigma^2 + [z^*(k)]^T H_{k-1} \hat{x}_i^*(k) \}^{-1} \quad (32)$$

Izraz (26) ima sledeći rekurentni ekvivalent:

$$\hat{c}_k = \hat{c}_{k-1} - K_k \{ [n(k)]^T \hat{c}_{k-1} - \hat{\xi}(k) \} \quad (33)$$

$$H_k^n = H_{k-1}^n - K_k^n [n(k)]^T H_{k-1}^n \quad (34)$$

$$K_k^n = H_{k-1}^n m(k) [\hat{\sigma}^2 + n^T(k) H_{k-1}^n m(k)]^{-1} \quad (35)$$

$\hat{\sigma}^2$ je ocena varijanse σ^2 belog šuma n .

Da bi se dobile ocene $\hat{a}$, $\hat{c}$ parametara modela sistema (1—3) koje su nepristrasne i imaju približno minimalnu varijansu, potrebno je simultano i iterativno računati izraze (17) i (26), odnosno (30—35), polazeći od nekih usvojenih početnih vrednosti za $\hat{a}$, $\hat{c}$, a ukoliko se koriste izrazi (32—37), moraju se usvojiti i početna ocena varijanse $\hat{\sigma}^2$ i početne matrice H i H^n .

Mada na prvi pogled korišćenje izraza (17) i (26) izgleda jednostavnije i pouzdanije od korišćenja (30—35) (ne koriste se početne vrednosti za $\hat{\sigma}^2$, H i H^n , koriste se dva umesto šest izraza), preporučuje se korišćenje izraza (30—35) iz sledećih razloga:

— izbegava se inverzija matrice, koja po pravilu izaziva numeričke probleme,

— manji je broj računskih operacija,

— manjom modifikacijom metode, ako se koristi (30—35), postupak određivanja nepoznatih parametara može se odvijati u realnom vremenu, bez potrebe memorisanja $y(T)$, $u(T)$.

Postupak određivanja parametara

Na slici 1 prikazan je blok-dijagram postupka određivanja parametara modela (1—3) servosistema, korišćenjem rekurentnih relacija (30—35). Prikazani postupak se ponavlja za $k=1, 2, \dots, T$. Kada se dođe do $k=T$, izvršena je jedna iteracija.

Da bi postupak određivanja parametara otpočeo, potrebno je obezbediti početne ocene parametara $\hat{a}_i$, $\hat{b}_j$,

odnosno $\hat{a}$, korišćenjem nekog jednostavnog postupka, npr. metodom instrumentalnih promenljivih [2], [1], metodom Čidambare [3] ili, ako je sistem niskog reda, jednostavno probanjem:

Sl. 1 — Metoda najveće verodostojnosti

pretpostave se vrednosti parametara, pa se onda za te parametre i izmerenu seriju ulaza $u(T)$ izračuna odziv modela sistema $\hat{x}_i(T) = [\hat{B}(z^{-1})/\hat{A}(z^{-1})]u(T)$ i uporedi sa izmerenim odzivom $y(T)$ — postupak se ponavlja za različite vrednosti parametara, sve dok se ne postigne zadovoljavajuća sličnost između izračunatog i izmerenog odziva. Potrebno je još usvojiti početnu vrednost ocene varijanse σ^2 u skladu sa šumom, uočenom u izmerenom odzivu $y(T)$. Izbor početne σ^2 nije kritičan — može se usvojiti vrednost $\sigma^2 = 1 \cdot 10^{-5} |y|_{\max}$, gde je $|y|_{\max}$ maksimalna izmerena vrednost izlaza. Početne vrednosti $\hat{c} = 0$, $\hat{H} = \hat{H}_n = 10^9 I$, gde je I jedinična matrica, po pravilu daju dobre rezultate. Broj iteracija N_{it} treba unapred usvojiti (npr. $N_{it} = 6$).

Nakon toga sledi postupak:

— u trenutku $k=0$ vektori $\hat{z}^*(0)$, $\hat{x}_i^*(0)$, $\hat{n}(0)$, $\hat{m}(0)$ se popunjavaju nul-tim elementima;

— u trenucima $k=1, 2, \dots, n+r+q$ se računanjem izraza (19—21), (36—39), (28) i (29) vrši inicijalizacija (popunjavanje nenultim elementima) vektora $\hat{z}^*$, $\hat{x}_i^*$, $\hat{n}$, $\hat{m}$, korišćenjem:

$$\hat{n}(k) = \frac{\hat{C}(z^{-1})}{\hat{D}(z^{-1})} y(k) - \frac{\hat{B}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})\hat{D}(z^{-1})} u(k) \quad (36)$$

$$\hat{x}_i(k) = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} u(k) \quad (37)$$

$$\hat{x}_i^*(k) = \frac{\hat{C}(z^{-1})}{\hat{D}(z^{-1})\hat{A}(z^{-1})} \hat{x}_i(k) \quad (38)$$

$$\hat{\xi}(k) = y(k) - \hat{x}_i(k) \quad (39)$$

— u trenucima $k=n+r+q+1, \dots, T$ izračunavaju se $\hat{z}^*$, $\hat{x}_i^*$, $\hat{n}$, $\hat{m}$

korišćenjem izraza (19—21), (36—39), (28), (29) i računaju rekurentne relacije (30—35). Ukoliko je $k=T/N_{it}$, memorišu se vrednosti matrica H i H^n ;

— tačke 1, 2 i 3 predstavljaju jednu iteraciju. Nakon završene iteracije, u trenutku $k=T$, vrši se smena $\hat{a} \leftarrow \hat{a}_T$, $\hat{c} \leftarrow \hat{c}_T$. U narednoj iteraciji počinje se sa onim vrednostima matrica H i H^n , koje su memorisane u trenutku $k=T/N_{it}$. Tačke 1, 2, 3 se ponavljaju, osim ukoliko se radi o zadnjoj iteraciji. U tom slučaju je postupak određivanja parametara završen.

Pri računanju $\hat{z}^*$, $\hat{x}_i^*$, $\hat{n}$, $\hat{m}$ u tačkama 2 i 3 koriste se početne ocene parametara $\hat{a}$, $\hat{c}$, a ne $\hat{a}_k$, $\hat{c}_k$ dobijene korišćenjem rekurentnih relacija (30—35).

Primeri

Električni servosistem

Treba odrediti linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda koja verno odslikava spoljašnju dinamiku električnog servosistema za rotaciju protivavionskog topa, čija je struktura poznata. Blok-dijagram servosistema prikazan je na slici 2. Parametri elektromotora i spoljnog opterećenja nisu poznati. Diferencijalna jednačina servosistema ima oblik:

$$p^2 U_{tg}(t) + \alpha_1 p U_{tg}(t) + \alpha_0 U_{tg}(t) = \beta_0 U(t) + \beta_1 p U(t) \quad (40)$$

gde je p operator diferenciranja: $p^i x = d^i x / dt^i$, $i=1, 2, \dots$. Izvodi u (40) zamenjuju se konačnim razlikama [4], odnosno operator p se zamenjuje operatorom z : $p = (1 - z^{-1})/\Delta t$. Dobija se jednačina:

$$U_{tg}(k) + a_1 U_{tg}(k-1) + a_2 U_{tg}(k-2) = b_0 U(k) + b_1 U(k-1) \quad (41)$$

Sl. 2 — Blok-dijagram električnog servosistema

čije parametre treba odrediti tako da odziv modela (41), pri dejstvu proizvoljnog ulaza, bude što bliži odzivu pomenutog servosistema. U radu [3] date su pretpostavke za merenje odziva servosistema, radi određivanja njegovih parametara. U skladu s tim izmereno je 19 odziva servosistema na obojeni šum (filtrirani beli šum) frekventnog opsega od 0 do 23 rad/s, maksimalne amplitude 3 volta, sa periodom odabiranja $\Delta t = 0,005$ s i u trajanju $T\Delta t = 5$ s, tj. u 1000 tačaka. Jedna vremenska serija ulaza prikazana je na slici 3, a odgovarajući odziv na slici 4 (označeno sa » U_{tg} «). Izmerena je i frekventna karakteristika — Bodeov di-

jagram na slici 5 (označeno sa »mereno«), kao i nekoliko odskočnih odziva — jedan od njih prikazan je na slici 6 (oznaka » U_{tg} «).

Kao polazni parametri za metodu najveće verodostojnosti usvajaju se parametri modela (40):

$\hat{\alpha}_0 = 63,80$; $\hat{\alpha}_1 = 7,57$; $\hat{\beta}_0 = 241,10$; $\hat{\beta}_1 = 4,10$
dobijeni metodom Čidambare [3], odnosno odgovarajući parametri modela (41):

$\hat{a}_1 = 1,9605$; $\hat{a}_2 = 0,9620$;
 $\hat{b}_0 = -0,0256$; $\hat{b}_1 = -0,0197$

Sl. 3 — Ulaz električnog servosistema

Sl. 4 — Odziv električnog servosistema

Usvaja se model šuma drugog reda ($q=2, r=1$) sa nultim početnim ocenama parametara. Za početnu ocenu varijanse šuma usvaja se $\hat{\sigma}^2=0,0015 \text{ V}^2$. Postupak određivanja parametara servosistema, opisan u prethodnim poglavljima, ponovljen je na svih devetnaest odziva na šum. Dobijene ocene $\hat{a}_i, \hat{b}_j$ konvertovane su u $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$. Srednje vrednosti i standardna odstupanja ovih ocena su:

$$\begin{array}{cc} \overline{\hat{\alpha}}_0 = 50,6503 & \overline{\hat{\alpha}}_1 = 6,39853 \end{array} \quad (42)$$

$$\sigma_{\alpha_0} = 3,0133 \quad \sigma_{\alpha_1} = 0,24224 \quad (43)$$

$$\begin{array}{cc} \overline{\hat{\beta}}_0 = 194,805 & \overline{\hat{\beta}}_1 = 13,2426 \end{array} \quad (44)$$

$$\sigma_{\beta_0} = 12,674 \quad \sigma_{\beta_1} = 1,7056 \quad (45)$$

Na slikama 4 i 6 prikazani su vremenski odzivi modela (40) sa parametrima (42), (44) — oznaka » U_{tgM} «, zajedno sa izmerenim odzivima servosistema (oznaka » U_{tg} «). Na slici 5 prikazana je frekventna karakteristika istog modela (oznaka »model«), zajedno sa

izmerenom frekventnom karakteristikom (»mereno«). Očigledno je veliko slaganje sa odgovarajućim izmerenim veličinama. Razlika je jedino u »testiranim« nepravilnim oscilacijama u izmerenim odzivima i skoku frekventne karakteristike na učestanosti od 50 rad/s koji su posledica mrtvog hoda reduktora i nepravilnosti u izradi zupčanika. Ove pojave su pri određivanju parametara razmatrane kao šum sistema. Takođe, uočljivo je da ocene parametara dobijene metodom najveće verodostojnosti imaju mala rasturanja (43), (45).

U radovima [3] i [5] prikazani su rezultati određivanja parametara modela (40) servosistema posmatranog u ovom primeru metodom Chidambare i metodom aproksimacije frekventne karakteristike kompleksnom racionalnom funkcijom, a u radu [5] prikazani su isti rezultati dobijeni metodama najmanjih kvadrata i instrumenta- lnih promenljivih. Poređenjem rezultata može se zaključiti da opisana varijanta metode najveće verodostojnosti daje tačnije rezultate od navedenih metoda.

Sl. 5 — Frekventna karakteristika električnog servosistema

Sl. 6 — Odskočni odziv električnog servosistema

Moment inercije obrtne platforme

Treba odrediti moment inercije J_p obrtne platforme borbenog sredstva, koju pokreće jednosmerni elektromo-

tor upravljen strujom u rotoru, sa stalnim magnetom u pobudnom kolu. Diferencijalna jednačina ponašanja motora je:

$$\tau_m p \omega_m(t) + \omega_m(t) = K i_m(t) \quad (46)$$

gde je ω_m ugaona brzina motora, a i_m struja u rotoru. Ukupni moment inercija pokretnih delova sveden na vratilo motora je [6]:

$$J_{mu} = \frac{\tau_m K_m}{K} = J_m + J_{rm} + \frac{J_p}{i_r^2} \quad (47)$$

Poznate su sledeće vrednosti: moment inercije motora $J_m = 0,016 \text{ kgm}^2$, moment inercije reduktora sveden na vratilo motora $J_{rm} = 0,0268 \text{ kgm}^2$, prenosni odnos reduktora $i_r = 211,51$ i elektromehanička konstanta motora $K_m = 0,549 \text{ Nm/A}$. Da bi se iz (47) odredio moment inercije J_p , treba znati vrednosti parametara τ_{mi}/K modela (46). Smenom operatora $p = (1 - z^{-1})/\Delta t$ u (46), dobija se:

$$(1 + a_1 z^{-1}) \omega_m(k) = b_0 i_m(k) \quad (48)$$

pri čemu važi veza:

$$t_m = -\frac{a_1 \Delta t}{a_1 + 1}, \quad K = \frac{b_0}{a_1 + 1} \quad (49)$$

Na ulaz elektronike motora doveden je odskočni test-signal i izmerene su vremenske serije struje i ugaone brzine motora. Na osnovu njih grubo su određeni vremenska konstanta i pojačanje motora $\tau_m \cong 0,7 \text{ s}$, $K \cong 6,0 \text{ rad/(sA)}$, a na osnovu njih početne ocene $\hat{a}_1 = -0,99291$, $\hat{b}_0 = 0,04255$ za metodu najveće verodostojnosti, koja je primenjena na 18 odziva motora na pseudo-slučajnu pobudu, merenih sa periodom $\Delta t = 0,005 \text{ s}$. Na slici 7 prikazana je izmerena struja u rotoru, a na slici 8 (oznaka »1«) izmerena ugaona brzina motora. Usvojen je model šuma drugog reda ($q=2$, $r=1$) sa nultim početnim ocenama parametara. Dobijene su sledeće srednje vrednosti i standardna odstupanja parametara modela (48):

Sl. 7 — Ulaz elektromotora

Sl. 8 — Odziv elektromotora

$$\bar{a}_1 = -0,991249, \quad \bar{b}_0 = 0,0454709 \quad (50)$$

$$\sigma_{a1} = 0,001572, \quad \sigma_{b0} = 0,0031568$$

Srednje vrednosti i standardna odstupanja ocena parametara motora su:

$$\bar{\tau}_m = 0,533677 \text{ s}, \quad \bar{K} = 5,85042 \text{ rad/(sA)}$$

$$\sigma_{\tau m} = 0,090835 \text{ s}, \quad \sigma_K = 0,108364 \text{ rad/(sA)}$$

Srednja vrednost i standardno odstupanje ocene momenta inercije platforme su:

$$\bar{J}_p = 1856,0 \text{ kgm}^2, \quad \sigma_{Jp} = 183 \text{ kgm}^2$$

što se dobro slaže s vrednošću $J_p = 1838 \text{ kgm}^2$ dobijenom merenjem slobodnih oscilacija platforme povezane oprugom s krutim osloncem. Na slici 8 prikazani su odzivi motora (oznaka »1«) i modela (48) sa vrednostima parametara (50) — oznaka »2«, na ulaz sa slike 7.

Zaključak

Iz prikazanih primera vidi se da se predložena varijanta metode najveće verodostojnosti može uspešno koristiti za određivanje parametara referentnih modela tipa »crne kutije«, kao i za određivanje strukturnih parametara različitih tipova servosistema. Metoda daje nepristrasne ocene parametara servosistema, koje su praktično minimalne varijanse, čak i u prisustvu

osetnih šumova sistema i šumova merenja. Naravno, matematička očekivanja ovih šumova moraju biti jednaka nuli, što se podrazumeva kod praktično svih metoda ocenjivanja nepoznatih parametara. Ukoliko to nije slučaj, u sistemu ili procesu merenja postoji takozvani prednapon (ofset), koji se može otkloniti podešavanjem sistema ili obradom izmerenih vremenskih serija. Nedostatak ove metode jeste da zahteva početne ocene parametara ispitivanog servosistema, koje se moraju obezbediti nekom jednostavnijom metodom ili postupkom. To je cena kojom se plaća visoka tačnost metode. Sa matematičkog stanovišta metoda je relativno složena, ali je pogodna za programiranje i njena realizacija na savremenim personalnim računarima ne predstavlja poseban problem.

Literatura:

- [1] Dodić, N.: Estimacija parametara jednog elektrohidrauličnog servosistema za pokretanje platforme borbenog sredstva — magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 1990.
- [2] Young, P.: Recursive Estimation and Time Series Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [3] Dodić, N.: Savremeni pristup estimaciji parametara servosistema, Vojnotehnički glasnik, br. 6, 1993, str. 609—620.
- [4] Simonović, V.: Numeričke metode, Mašinski fakultet, Beograd, 1979.
- [5] Dodić, N.: Estimacija parametara servosistema u sistemima za upravljanje vatrom klasične PVO — elaborat, VTI VJ, reg. br. VTI-02-0083, Beograd, 1991.
- [6] Jezdimirović, M., Dodić, N.: Određivanje momenta inercije obrtne platforme borbenog sredstva, Naučno-tehnički pregled, god. XLI, 1991, br. 10, str. 3—12.
- [7] Dodić, N.: Diferenciranje signala metodom najmanjih kvadrata, Vojnotehnički glasnik, br. 2, 1994, str. 153—158.