Dr Svetomir Minić,
pukovnik, dipl. inž.
Generalštab VJ, Beograd

MATEMATIČKI PRILAZ UPRAVLJANJU ODRŽAVANJEM TEHNIČKIH SISTEMA

UDC: 62-7.001.573:65.01

Rezime:

U radu je prikazan savremeni matematički prilaz rešavanju problema optimalnog upravljanja procesom preventivnog održavanja složenih tehničkih sistema, koji se koristi u svetu. Prikazani su matematički model pregleda stanja sistema za „iznenadne“ otkaze i model preventivnog održavanja prema stanju za „postepene“ otkaze. Dati su hipotetički primeri primene modela.

Ključne reči: tehnički sistem, upravljanje procesom održavanja, optimalni matematički modeli.

THE MATHEMATICAL APPROACH TO THE TECHNICAL SYSTEMS MAINTENANCE MANAGEMENT

Summary:

In this paper, the up-to-date mathematical approach to the problem of optimal management of complex technical system preventive maintenance process is presented. The hard-time mathematical preventive maintenance model for sudden failures and the on-condition based preventive maintenance model have been shown. The hypothetical examples of models application are given as well.

Key words: technical system, maintenance process management, optimal mathematical models.

Uvod

Velika raznolikost i složenost tehničkih sistema, kao i veliki broj klasa zadataka u kojima se traže najbolja rešenja, čine probleme teorijskog razmatranja određivanja najboljih rešenja izuzetno složenim i raznovrsnim. Osnovni pravci razvoja teorije optimalnog upravljanja stanjem sistema su formalni i matematički. Otuda se često toj teoriji dodaje epitet „matematička“, jer se kod realnih sistema i realnih problema prepliću pojmovi, definicije, teoreme i postupci koji se mogu

opisati matematičkim jezikom, tj. jednačinama, funkcijama, brojevima.

Kod „sistemskog prilaza upravljanju“ svaki složeni sistem se posmatra kao integrisana celina sačinjena od raznovrsnih i specijalizovanih struktura, procesa i funkcija. Elementi sistema su međusobno zavisni, pa se proučavanje složenog sistema može realizovati njegovim „dekomponovanjem“ na sastavne elemente.

Osnovni problem upravljanja jeste naći najbolje – optimalno rešenje. Zadatak optimizacije je da se izvrši izbor najbolje varijante (najboljeg rešenja) iz

niza povoljnih varijanti, u smislu usvojenog kriterijuma. U matematičkom smislu optimizacija se uvek svodi na traženje ekstremuma kriterijumske funkcije, a realizuje se primenom različitih metoda, u zavisnosti od tipa relacija u matematičkom modelu, kriterijumske funkcije i ograničenja [6].

Održavanje tehničkih sistema može se rešavati na različite načine, u više varijanti, prema više koncepcija i modela održavanja koji predstavljaju uprošćene šeme procesa održavanja. Postupak optimalnog upravljanja održavanjem svodi se na optimizaciju definisanog matematičkog modela. Optimizuje se, dakle, model pojednostavljene šeme procesa održavanja, a ne fizička suština sistema održavanja, kao stohastičkog procesa [3].

I pored aproksimativnog karaktera, modeli održavanja počivaju na pokazateljima pouzdanosti i odgovarajućim kriterijumima optimizacije na osnovu kojih se, rešavanjem matematičkog modela, dobija optimalno rešenje za odlučivanje o trenutku kada treba sprovesti postupke preventivnog održavanja kako bi se sprečila ili odložila pojava stanja sistema „u otkazu“.

Za upravljanje održavanjem složenih tehničkih sistema najveći praktični značaj imaju dve koncepcije preventivnog održavanja na kojima se temelje odgovarajući matematički modeli. Prvu koncepciju čini preventivno održavanje po vremenu (Hard Time Limit Maintenance) koje se prvenstveno zasniva na informacijama o pouzdanosti, tj. na empirijski utvrđenim raspodelama verovatnoća vremena do pojave stanja sistema „u otkazu“. U tom slučaju postupci preventivnog održavanja se planiraju tako da se obezbedi zahtevani nivo pouzdanosti posmatranog sistema ili propisivanjem preventivnih zamena posle

određenog perioda rada. Drugu koncepciju čini POPS – preventivno održavanje prema stanju (On-Condition Based Maintenance) – koje se, pored informacija o pouzdanosti, zasniva na stalnom i sistematskom praćenju rada posmatranog tehničkog sistema, odnosno na praćenju i osmatranju izabranih i unapred određenih parametara stanja i pokazatelja koji sa sigurnošću govore o stanju sistema i njegovih elemenata [1].

Procesi diskretne i kontinualne promene parametara stanja u funkciji vremena korišćenja tehničkog sistema, kao posledica različitih uticaja stohastičkog karaktera koji dovode do „iznenadnih“ ili „postepenih“ otkaza, opredeljuju da se optimalno upravljanje održavanjem tehničkih sistema realizuje metodologijom održavanja prema pouzdanosti (OPP), korišćenjem navedenih koncepcija održavanja.

U radu su opisani aktuelni matematički modeli koji interpretiraju optimalni proces održavanja i predstavljaju teorijsku osnovu za njihovu razradu, radi simulacije na elektronskom računaru, odnosno praktične primene na složenim tehničkim sistemima za upravljanje procesom promene stanja sistema i održavanja.

Korišćene oznake [2]:

S – strategija pregleda stanja tehničkog sistema,

S_n – strategija pregleda stanja sa n provera stanja,

σ – skup svih strategija pregleda stanja,

t_k – planirani moment k -tog pregleda stanja,

$R(S, F)$ – srednji troškovi ciklusa, za strategiju S i za raspodelu rada sistema F ,

$L(S, F)$ – srednja dužina ciklusa,

$Q(S, F)$ – intenzitet troškova,

PF_2 – gustina raspodele drugog reda,

p – uslovna verovatnoća otkaza sistema između dva pregleda stanja,
 $q = 1 - p$ – koeficijent,
 L – Laplasov transformator.

Upravljanje preventivnim održavanjem tehničkih sistema pri iznenadnim otkazima

HARD TIME model pregleda stanja sistema

Korišćenje tehničkog sistema započinje u momentu $t = 0$. Posle toga detalji o stanju sistema mogu se saznati samo pomoću kontrole, odnosno pregleda stanja. Svaki pregled stanja zahteva određeno vreme (t) i troškove c_1 , pri čemu je $0 < c_1 < \infty$. Rad sistema je slučajna velična X , a funkcija raspodele $F(t) = P(X \leq t)$. Ako od momenta pojave otkaza sistema do momenta njegovog otkrivanja, pri pregledu stanja, protekne vreme t , tada se troškovi opisuju funkcijom $v(t)$, za koju se pretpostavlja da je neprekidna i strogo monotona za $t > 0$, odnosno za $v(t) = 0, t < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$, slika 1 [2].

Postoje dva slučaja pregleda stanja sistema:

- pregled stanja bez sprovođenja postupaka održavanja (obnavljanja);
- pregled stanja sa sprovođenjem postupaka održavanja.

U prvom slučaju pregled stanja se završava otkrivanjem otkaza, a u drugom slučaju sistem se obnavlja, tj. sprovode se postupci održavanja. U drugom slučaju proces pregleda stanja i održavanja traje duže vreme. Za oba slučaja biće razmotrene varijante kada je raspodela vremena rada poznata, delimično poznata i potpuno nepoznata. Zadatak je da se

odredi optimalna strategija pregleda stanja.

Sl. 1 – Grafička interpretacija modela pregleda stanja tehničkog sistema

Pod strategijom pregleda stanja tehničkog sistema podrazumeva se element skupa σ , gde je za $T < \infty$ [2]:

$$\sigma = \{S = \{t_k\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = T, 0 \leq n < \infty\} \quad (1)$$

a za $T = \infty$:

$$\sigma = \{S = \{t_k\}, 0 = t_0 < t_1 < t_k < \dots, \bigcup_{k=0}^{\infty} [t_k, t_{k+1}] = [0, \infty)\} \quad (2)$$

gde je:

t_k – fiksni broj (za zadato $S \in \sigma$), a u momentu t_k izvodi se k -ti pregled stanja.

Za $T < \infty$, kada je broj pregleda stanja n , sa S_n se označi strategija koja podrazumeva n pregleda stanja, a koja se završava u momentu T . Ukoliko se svaka strategija $S = \{t_k\}$ karakteriše zadatim intervalom $\delta_k = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \dots$, između pregleda stanja, umesto $S = \{t_k\}$ uzima se $S = \{\delta_k\}$. Za praksu preventivnog održavanja tehničkih sistema naročito je interesantna strogo periodična strategija pregleda stanja (Hard Time

Limit Maintenance). Strategija $S = S^{(\delta)}$ naziva se strogo periodičnom strategijom pregleda stanja sa intervalom δ između pregleda stanja, ako je $\delta \in (0, \infty)$, tako da je $\delta_k = \delta$, $k = 0, 1, \dots$.

Pregled stanja bez sprovođenja postupaka održavanja

Ako se usvoji strategija $S_n = \{t_k\}$, za $T < \infty$ i $S = \{t_k\}$, za $T = \infty$, i odredi, pri $0 \leq x \leq y$, funkcija $g_k(x, y) = (k+1)c_1 + v(y - x)$, $k = 0, 1, \dots$, troškovi pregleda stanja, pri uslovu $t_k < X \leq t_{k+1}$, su $g_k(X, t_{k+1})$. Na taj način dobija se matematičko očekivanje svih troškova na intervalu $[0, T]$ u obliku:

$$R(S_n, F) = \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(t_k, t_{k+1}) dF(t) + (n+1)c_1 \bar{F}(T), \quad T < \infty, \quad (3)$$

$$R(S, F) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(t, t_{k+1}) dF(t), \quad T = \infty. \quad (4)$$

Za $T \leq \infty$

$$R^*(F) = \inf_{s \in \sigma} R(S, F).$$

Strategija $S^* = \{t_k^*\}$, koja zadovoljava uslov $R(S^*, F) = R^*(F)$, naziva se optimalnom strategijom pregleda stanja tehničkog sistema. Za $T < \infty$ može se napisati $S^* = S_{n^*}^*$.

Pri zadatoj veličini matematičkog očekivanja $\mu = E(X) < \infty$ i $\delta \in (0, \infty)$ troškovi $R(S^{(\delta)}, F)$ mogu se predstaviti sledećom jednačinom:

$$R(S^{(\delta)}, F) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} [(k+1)c_1 +$$

$$+ v((k+1)\delta - t)] dF(t) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} [(k+1)c_1 + v(\delta)] dF(t) \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} (k\delta) [F((k+1)\delta) - F(k\delta)] +$$

$$+ c_1 + v(\delta) \leq \frac{\mu}{\delta} c_1 + c_1 + v(\delta).$$

Odatle sledi da je:

$$R^*(F) \leq \frac{\mu}{\delta} c_1 + c_1 + v(\delta) \quad (5)$$

Na taj način, za konačno μ , veličina $R^*(F)$ je uvek ograničena.

Sada se može napisati jednakost:

$$R^*(F_x) = \inf_y \left\{ \int_0^y v(y=t) dF_x(t) + R^*(F_{x+y}) \bar{F}_x(y) + (c_1) \right\}, \quad (6)$$

gde je F_x zadato izrazom:

$$F_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}, \quad 0 \leq X < T.$$

Ako je f-ja $F(t)$ neprekidna, za $T = \infty$, i uslov $\mu < \infty$, tada se donja granica u izrazu (6) dostiže pri $y^* = y^*(x)$. U tom slučaju primena izraza (6), počev od $x = 0$, omogućava formiranje optimalne strategije pregleda stanja.

Neka je $S^* = \{t_k^*\}$ (ili $S^* = \{\delta_k^*\}$, $\delta_k^* = t_{k+1}^* - t_k^*$, $k=0, 1, \dots$) – optimalna strategija pregleda stanja tehničkog sistema. Tada je:

δ_k^* – prvi optimalni odgovarajući trošak $R(S, F_{t_k}^*)$ za moment pregleda stanja ($t_k^* < T$).

Međutim, takav koncept dokaza postojanja optimalne strategije pregleda stanja, pri datim pretpostavkama, ne daje istovremeno željeni matematički model njenog određivanja.

Izračunavanje S^* može se realizovati pod pretpostavkom da je funkcija $v(t)$ neprekidno diferencijabilna na intervalu $(0, \infty)$, a gustina raspodele $f(t) = f'(t)$ javlja se sa PF_2 – gustinom (gustina raspodele drugog reda).

Optimalna strategija pregleda stanja udovoljava neophodnim uslovima $\delta R(\{t_k\}, F) / \delta t_k = 0$, koji se, saglasno izrazima (3) i (4), mogu zapisati u ekvivalentnoj formi:

$$v(t_{k+1} - t_k) = \int_0^{t_k - t_{k-1}} \frac{f(t_k - t)}{f(t_k)} dv(t) = c_1, \quad k = 1, 2, \dots; \quad k < \infty \quad (7)$$

Za $v(t) = c_2(t)$, $c > 0$, dobija se:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{f(t_k)} - \frac{c_1}{c_2}. \quad (7')$$

Ako je $t_1 > 0$ već izabrano tada se momenti $t_2, t_3, \dots$, određuju jednoznačno pomoću izraza (7). Na taj način zadatak određivanja optimalne strategije pregleda stanja svodi se na pronalaženje optimalnog vremenskog momenta $t_1 = t_1^*$. Rešenje tog zadatka zahteva niz novih definicija.

Neka je $\varphi(t_1) = \{t_k\}$ brojčana vrednost, dobijena iz formule (7) za neko $t_1 > 0$. Pod uslovom da je ona prekidna na intervalu t_n , onda je za $k = n$ desna strana izraza (7) nepotpuna. Neka je, shodno tome, τ_0 – najmanji broj, takav da za proizvoljno $t_1 \geq \tau_0$ vrednost $\varphi(t_1) = \{t_k\}$ zadovoljava uslov $\bigcup_{k=0}^{\infty} [t_k, t_{k+1}) \supseteq [0, T)$.

Veličina τ_0 sledi iz sledećeg tvrđenja: elementi t_k relacije $\varphi(t_1) = \{t_k\}$ su diferencijalne i strogo monotono rastuće funkcije t_1 .

Dokaz sledi iz činjenice da raspodela $F(t)$ pripada klasi PF_2 .

Za svako $t_1 \times \tau_0$, korišćenjem $\varphi(t_1)$, definiše se odgovarajuća strategija $S(t_1) \in \sigma$ sledećim relacijama:

neka je $S(t_1) = \{t_1, t_2, \dots, t_n, T\}$, ako je $T < \infty$, i $t_n < T \leq t_{n+1}$, ili $S(t_1) = \varphi(t_1)$, ako je $T = \infty$.

Strategija $S(t_1)$, koja uzima u obzir $\varphi(t_1) = \{t_k\}$, opravdana je ako za $T = \infty$ ili za $T < \infty$ postoji t_{n+1} , tako da je $t_{n+1} = T$. Saglasno tom opredeljenju, strategija $S(\tau_0)$ je dopuštena, odnosno opravdana.

U slučaju kada je $T < \infty$, usvaja se da je N – najveći prirodni broj n , za koji postoji rešenje (7), $S_n \in \sigma$. Tada, saglasno prethodnoj strategiji koja je opravdana, postoji rešenje (7): S_m , $m < N$.

U opštem slučaju, optimalna strategija pregleda stanja $S_n^* = \{t_k^*\}$ može se dobiti preko vrednosti $R(S_m, F)$, $m = 0, 1, \dots$.

U sledećem tvrđenju govori se o načinu koji je u svakom slučaju racionalan, a u krajnjem slučaju za veliku vrednost N .

Postavlja se teorema da je: $T = \sup \{t : F(t) < 1\}$. Tada je $t_1^* = \tau_0$ i $n^* = N$.

Utvrđene teoreme su ekvivalentne, pa je dovoljno dokazati prvu. Neka je za neko $t_1 \geq \tau_0$ $S(t_1) = \{t_1, t_2, \dots, t_n, T\}$. Tada je:

$$\frac{dR(S(t_1), F)}{dt_1} = \left[\int_0^{t_n - t_{n-1}} f(t_n - t) dv(t) - f(t_n) (v(T - t_n) + c_1) \right] \frac{dt_n}{dt_1} \quad (8)$$

gde je: $dt_n / dt_1 > 0$.

Izraz u uglastim zgradama, u desnom delu izraza (8) jednak je nuli samo ako je strategija $S(t_1)$ dopuštena (opravdana). U suprotnom slučaju ona je uvek pozitivna (potvrđna, opravdana), ako je $t_1 > \tau_0$. Pošto po definiciji τ_0 ne može imati mesto u nejednakosti $t_1^* < \tau_0$, to je postavljena teorema dokazana.

Iz teoreme za $T = \sup \{t : F(t) < 1\}$ dobija se sledeći približni metod za izračunavanje optimalne strategije pregleda stanja tehničkog sistema:

ALGORITAM 1

1. Izabrati $t_1 > 0$ tako male vrednosti da bi izraz $\varphi(t_1) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ imao svojstvo $t_n < T$.

2. Povećavati t_1 sve dok se ne ispuni jednakost $t_n = T$, odnosno, jednakost $t_1 = t_1^* = \tau_0$.

Na taj način primena algoritma zahteva višekratno izračunavanje elementa $\varphi(t_1)$. Pri tom je potrebno izabrati dužinu koraka za povećanje t_1 , u zavisnosti od konkretnih okolnosti.

Primer

Neka je rad sistema X ravnomerno raspoređen na intervalu $(0, T)$. Za $n \leq n^*$ jednačina (7) ima oblik:

$$\begin{aligned} v(\delta_k) &= v(\delta_{k-1}) - c_1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k=0}^n \delta_k &= T. \end{aligned} \quad (9)$$

U slučaju za $T = \infty$, ako se uvede skraćena f-ja raspodele

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} F(t) / F(x), & 0 \leq t \leq x, \\ 1, & x < t, \end{cases} \quad (10)$$

tada se, uzevši dovoljno veliko x , saglasno teoremi $T = \sup \{t : F(t) < 1\}$, može

zadati strategija $\tilde{S}$, da bi se rešila nejednakost $R(\tilde{S}, F) - R^*(F) < \varepsilon$. Propisivanje strategije $\tilde{S}$ na intervalu $[0, x]$ određuje se pomoću algoritma 1, u kojem treba zameniti F sa $\tilde{F}$. Provere na intervalu (x, ∞) mogu se raspodeliti proizvoljno, na primer, preko jednakih intervala vremena.

Neka su $\varphi(t_1) = \{t\}$ ili $\varphi(t_1) = \{\delta_k\}$ – vrednosti koje odgovaraju nekom $t_1 > \tau_0$. Tada uvek postoji $m \geq 0$, tako da vrednost izraza $\{\delta_v, v = m, m + 1, \dots\}$ neograničeno monotono raste.

Postavlja se druga teorema: neka je $\mu = E(X) < \infty$. Tada se optimalna strategija pregleda stanja $S^* = \{t_k^*\}$ ($S^* = S(t_1^*)$) karakteriše sledećim svojstvima:

- $t_1^* = \tau_0$.
- izraz $\{\delta_k^*\}$ monotono se smanjuje.

Iz navedenih teorema proizilazi sledeći približni metod izračunavanja optimalne strategije pregleda stanja tehničkih sistema:

ALGORITAM 2

1. Izabrati $t > 0$ i izračunati vrednost $\varphi(t_1) = \{\delta_k\}$.

2. Ako je za neko n ispunjena nejednakost $\delta_n > \delta_{n-1}$, tada smanjiti t_1 i ponoviti korak 1.

3. Ako se vrednost $\{\delta_k\}$ uzima za $k = n$, tada povećati t_1 i ponoviti korak 1.

Pri tome je celishodno izabrati početnu vrednost t_1 , tako da je:

$$c_1 = \int_0^t v(t_1 - t) dF(t).$$

U [2] je predložen i drugi metod približnog izračunavanja optimalne strategije pregleda stanja:

za zadato $p, 0 < p < 1$, određuje se vrednost vremena pregleda stanja $t_k = t_k(p)$:

$$F_{tk}(t_{k+1}) = (F(t_{k+1}) - F(t_k)) / (1 - F(t_k)) = p, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

To znači da je jednaka verovatnoća otkaza sistema na svakom intervalu između pregleda stanja, pri uslovu radne sposobnosti sistema, u momentu koji prethodi pregledu stanja.

Rešavanjem jednačine (11) dobija se:

$$t_k(p) = F^{-1}(1 - q^k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

gde je: $q = 1 - p$.

Za strategiju $S_p = \{t_k(p)\}$ odgovarajući troškovi su:

$$R(S_p, F) = c_1 / p + c_2 \sum_{k=1}^{\infty} t_k q^{k-1} p - c_2 \mu, \quad (13)$$

gde je: $t_k = t_k(p)$.

Treba odrediti vrednost parametra p , minimizirajući troškove $R(S_p, F)$. Izračunavanje vrednosti $p = p^*$ zahteva izvesne napore. U [2] u proračunu približne vrednosti za S^* preporučuje se strategija $S_{p^*} = \{t_k(p^*)\}$. Gubitke efektivnosti pri korišćenju strategije S_{p^*} , umesto S^* , moguće je oceniti na primeru.

Primer

Neka je rad sistema X raspodeljen normalno s matematičkim očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ ($3\sigma < \mu$) i neka je $v(t) = c_2 t$. Neka je data zavisnost odnosa $c_1/c_2\sigma$, i veličina p^* , $R(S_{p^*}, F)/(c_2\sigma)$, $R(S^*, F)/(c_2\sigma)$, i pokazatelja efektivnosti:

$$\Delta R = \frac{R(S_{p^*}, F) - R(S^*, F)}{R(S_{p^*}, F)} \cdot 100\%.$$

Za postavke $t_k = \sigma Z_k + \mu$ u izrazu (4) i (12) jasno je da troškovi $R(S^*, F)$ i $R(S_{p^*}, F)$ ne zavise od μ . Pokazuje se da za $c_1 / (c_2\sigma) \geq 0,5$ gubitak efektivnosti nije veći od 1%.

Analogna brojna ispitivanja sprovedena su u [2] za rad sa Vejbul-Guedenkovom i gama-raspodelom.

Upravljanje preventivnim održavanjem tehničkih sistema pri postepenim otkazima

Model POPS – preventivnog održavanja prema stanju

Kod preventivnog održavanja prema stanju, po određenoj dinamici prati se odgovarajući parametar koji reprezentuje stanje sistema. Ako parametri stanja karakterišu gotovost sistema tada je neophodno planiranje pregleda stanja, odnosno diskretno ili kontinualno praćenje promena vrednosti parametara stanja.

Sušтина POPS sastoji se u tome da se prati odstupanje parametra od početne (nominalne) vrednosti W_0 , koju parametar ima u početku rada sistema, kada je $t = 0$. Cilj POPS jeste da se pri zadatoj dopuštenoj oblasti L , $W_0 \in L$, s velikom verovatnoćom odstrani „postepeni“ otkaz, koji nastaje kao posledica postepene (kontinualne) promene parametra stanja tehničkog sistema.

Za kvalitativnu ocenu stanja sistema neophodno je matematičko modeliranje dinamike provere (pregleda) parametra stanja. Sa W_t označi se vrednost parametra u momentu t . Neka je stohastički proces $\{W_t\}_{t \geq 0}$ zadat u obliku

$$W_t = W_0 + X_t \quad (14)$$

gde je $\{X_t\}_{t \geq 0}$ stohastički proces sa svojstvom $P(X_0 = 0) = 1$. Funkcija raspodele procesa $\{W_t\}$, i odgovarajuća funkcija raspodele (u slučaju njihovog postojanja) označi se sa:

$$\begin{aligned} F^{(t)}(x) &= P(W_t \leq x); \\ f^{(t)}(x) &= dF^{(t)}(x) / dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Neka je dopuštena oblast L u skladu sa jednostavnim praktičnim zahtevima $L = [W_a, W_b]$, slika 2 [2].

Sl. 2 – Trajektorije promene parametara stanja (dvostrana dopuštena oblast)

Često su za vreme procesa korišćenja tehničkog sistema interesantna odstupanja parametara od početne vrednosti W_0 samo u jednu stranu, odnosno, moguće je samo jednostrano odstupanje (na primer, pri mehaničkom istrošenju). Tada je dopuštena oblast ograničena koliko odozdo, toliko i odozgo:

- * jednostrana dopuštena oblast
- $-\infty = W_a < W_b < \infty$ (gornja dopuštena granica)

– $-\infty < W_a < W_b = \infty$ (donja dopuštena granica)

* dvostrana dopuštena oblast

– $-\infty < W_a < W_b < \infty$.

Poseban značaj ima slučajno vreme do nastupanja „postepenog“ otkaza.

$$L = \inf_t \{t : W_t \in L\}. \quad (16)$$

gde je : L – radni učinak sistema do prvog otkaza.

U uprošćenoj terminologiji veličina L naziva se i „radom“ (tačnije rad odgovarajućeg L). Izračunavanje raspodele verovatnoće za L pri zadatoj dinamici promene parametra stanja preduslov je za dostizanje postavljenog cilja. Posebno je vredan pažnje monotoni proces promene parametra stanja $\{X_t\}$.

Po definiciji stohastički proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ naziva se monotono rastućim (opadajućim) ako tokom njegove realizacije funkcija t sigurno raste (opada). Za monotono rastući (opadajući) proces $\{X_t\}$, očigledno, ima smisla zadati samo gornju (donju) dopuštenu granicu W_b (W_a). Na primer, u slučaju monotono rastućeg procesa, verovatnoća bezotkaznog rada je:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= P(L > t) = P(W_x \leq W_b) = \\ &= P(W_t \leq W_b) \end{aligned}$$

za svako $x \in [0, t]$.

Uzimanjem u obzir (15) dobija se:

$$\bar{F}(t) = F^{(t)}(W_b) \quad (17)$$

Analogno, za monotono opadajući proces je:

$$\bar{F}(t) = 1 - F^{(t)}(W_a) \quad (18)$$

Linijska promena parametra stanja

Ako se pretpostavi da je $X_t = V \cdot t$, parametar stanja zadaje se u obliku

$$W_t = W_0 + V \cdot t \quad (19)$$

Neka je V – normalno raspodeljena slučajna veličina s matematičkim očekivanjem μ i disperzijom σ^2 , tj.

$$P(V \leq y) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (20)$$

gde je raspodela $\Phi(x)$ zadata izrazom:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (21)$$

Prema značenju V – to je brzina izmene parametra. Parametar stanja je raspodeljen normalno s matematičkim očekivanjem.

$$E(W_t) = W_0 + \mu t \quad (22)$$

i disperzijom

$$D^2(W_t) = \sigma^2 t^2 \quad (23)$$

Stohastička izmena parametara (19) i (20) obrađena je u [2].

Jednostrana dopuštena oblast promene parametra stanja

Realizacija stohastičkog procesa $\{W_t\}_{t \geq 0}$ može biti monotono rastuća i monotono opadajuća. Lako se može zaključiti da se pri zadatoj gornjoj (donjoj) granici $W_b(W_a)$ za $P(V \geq 0) \approx 1$ ($P(V \leq 0) \approx 1$) odgovarajuća verovatnoća bezotkaznog rada dobro aproksimira izrazima:

$$\bar{F}(t) = \Phi\left(\frac{(W_b - W_0) / t - \mu}{\sigma}\right), \quad (24)$$

$$\bar{F}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{(W_a - W_0) / t - \mu}{\sigma}\right), \quad t > 0, \quad (25)$$

Prvi izvod $f(t) = -d\bar{F}(t)/dt$ ima oblik:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi} t^2} \exp\left(-\frac{(\alpha - \beta t)^2}{2t^2}\right), \quad t > 0, \quad (26)$$

gde je:

$$\alpha = |W - W_0| / \sigma, \quad \beta = |\mu| / \sigma, \quad (27)$$

a $W = W_a$ u izrazu (24) i $W = W_b$ u izrazu (25).

Istovremeno, da bi ti odnosi uvek važili, treba uvesti dopunske pretpostavke:

$$\mu \leq 0 \text{ za } W = W_a, \quad \mu \geq 0 \text{ za } W = W_b \quad (28)$$

Funkcija $f(t)$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, nije gustina verovatnoće, ukoliko je

$$\int_0^\infty f(t) dt = F(\infty) = 1 - \bar{F}(\infty) = \Phi(\beta) < 1 \quad (29)$$

Uzrok tome je činjenica da se, prema pretpostavci o raspodeli veličine V , njenom realizacijom mogu dobiti sve stvarne vrednosti. Ako je, istovremeno, raspodela veličine V takva da ona može primati samo pozitivne ili samo negativne vrednosti, saglasno formulama (17) ili (18) verovatnoća bezotkaznog rada ima svojstvo $\bar{F}(\infty) = 0$. Verovatnoća $\bar{F}(\infty)$ je

zanemarljivo mala, ako je $3\sigma \leq |\mu|$. „Defektna raspodela verovatnoće“, koja se karakteriše funkcijom $f(t)$, naziva se α -raspodelom. Tipično ponašanje f -je $f(t)$ prikazano je na slici 3.

Sl. 3 – Grafik gustine α -raspodele

Cilj je da se za zadato ε , $0 < \varepsilon < \phi(\beta)$ nađe takav interval obnavljanja τ_ε , pri kojem se sa verovatnoćom $1-\varepsilon$ isključuje nastupanje „postepenog“ otkaza. Označimo sa u_α α – kvantil standardne normalne raspodele.

Jednačina, iz koje se određuje ε , $\bar{F}(\tau_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, saglasno izrazima (24) i (25) ekvivalentna je jednačinama:

$$((W_b - W_0) / \tau_\varepsilon - \mu) / \sigma = u_{1-\varepsilon},$$

$$((W_a - W_0) / \tau_\varepsilon - \mu) / \sigma = u_\varepsilon.$$

Kako je $|u_\varepsilon| = u_{1-\varepsilon}$, to se uzimanjem u obzir (28), za $W = W_a$ i $W = W_b$ ($\varepsilon < 1/2$), dobija konačni izraz za periodičnost pregleda stanja tehničkog sistema:

$$\tau_\varepsilon = |W - W_0| / (\sigma u_{1-\varepsilon} + |\mu|) = \alpha / (u_{1-\varepsilon} + \beta). \tag{30}$$

Primer

Neka zazor (prazan hod) mehaničkog sistema za upravljanje iznosi W_t , i

može se opisati izrazom (14). Zazor se reguliše, tj. dovodi na nivo $W_0 = 3$ mm svakih $\tau = 50$ h. Neka je gornja dopuštena granica $W_b = 13$ mm. Merenje u momentu $t = 50$ h i realizacija parametra W_t dali su vrednost $E(W_{50}) = 5$ mm i $D(W_0) = 1$ mm. (U stvarnosti postoje samo ocene tih karakteristika). Saglasno formulama (22) i (23):

matematičko očekivanje $\mu = (E(W_{50}) - W_0) / 50 = (5 - 3) / 50 = 0,04$ mm/h,

standardna devijacija $\sigma = D(W_{50}) / 50 = 1/50 = 0,02$ mm/h.

Tabela 1
Intervali obnavljanja za jednostranu dopuštenu oblast

$1 - \varepsilon$	0,900	0,950	0,990	0,999
$u_{1-\varepsilon}$	1,282	1,645	2,324	3,092
$\tau_\varepsilon, (h)$	219	137	116	98

Odatle se dobija $\alpha = 500$ h i $\beta = 2$, pa izraz (30) poprima oblik:

$$\tau_\varepsilon = 10 / (0,02 u_{1-\varepsilon} + 0,04).$$

Zaključak

Ako vremena pregleda stanja (t_k) nisu zanemarljivo mala, onda to ne zadaje dopunske matematičke teškoće u okvirima modela. Potrebno je samo pretpostaviti da se sistem ne menja za vreme pregleda stanja. Dobijene vrednosti δ_k pomoću algoritama 1 i 2 daju upravo vreme od završetka k -tog pregleda stanja do početka $(k + 1)$ -og pregleda stanja sistema.

U tabeli 1, vrednost intervala τ_ε određena je za nekoliko vrednosti koefi-

cijenta sigurnosti. Kako se i očekivalo, sa njegovim povećanjem odgovarajući intervali pregleda stanja su manji.

Detaljno su opisane jednostrane dopuštene oblasti promene parametara stanja, dok će problem dvostrane dopuštene oblasti promene parametara stanja biti predmet razmatranja u drugom radu.

Kao rezultat matematičkog modela preventivnog održavanja po vremenu na osnovu kriterijuma minimalnih troškova, dobija se vrednost karakteristike modela – optimalni interval pregleda stanja tehničkih sistema, koji obezbeđuje minimalne ukupne troškove održavanja.

Izborom koncepcije POPS – preventivnog održavanja prema stanju, koja predstavlja jedan od najperspektivnijih i najekonomičnijih metoda upravljanja procesima promene stanja i održavanja sistema, i primenom razvijenog matema-

tičkog modela, koji se zasniva na ovoj koncepciji, ostvaruju se značajni efekti u pogledu obezbeđenja zahtevanog nivoa pouzdanosti i gotovosti sistema, uz istovremeno smanjenje troškova održavanja.

Literatura:

- [1] Minić, S., Arsenić, Ž.: Modeli održavanja tehničkih sistema – Maintenance models of technical systems, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 1998.
- [2] Beichelt, F., Franken, P.: Zuverlässigkeit und instandhaltung, Mathematische methoden, Veb Verlag Technik, Berlin, 1983.
- [3] Todorović, J.: Inženjerstvo održavanja tehničkih sistema – Maintainability engineering, JUMV, Beograd, 1993.
- [4] Mihlin, V., Dikov, K., Starikov, V., i dr.: Eksploatacionaja tehnologičnost konstrukcij traktorov, Mašinostroenie, Moskva, 1982.
- [5] Papić, Lj.: Metode povišenja efektivnosti ispitivanja za ocenu pouzdanosti tehnoloških sistema, OMO, Beograd, 1993.
- [6] Nikolić, I., Borović, S.: Višekriterijumska optimizacija – metode, primena u logistici, softver, CVŠ VJ, Beograd, 1996.
- [7] Krtolica, R., Vujošević, M., Šenborn, G., i dr.: Upravljanje sistemima, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
- [8] Petrović, R.: Specijalne metode u optimizaciji sistema, Tehnička knjiga, Beograd, 1977.