

HYPERBOLIČKI SISTEMI ZAKONA ODRŽANJA

HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

Dedović, N, Konjik, Sanja, Matić-Kekić Snežana *

REZIME

Mnogi praktični problemi u nauci i inženjerstvu, kod kojih se neka veličina održava, opisuju se jednačinama zakona održanja. To su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda, u kojima je jedna nezavisna promenljiva izdvojena kao vreme t , dok ostale predstavljaju prostorne promenljive. Mi ćemo posmatrati nelinearan, hiperbolički Rimanov (Riemann) problem

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

i pokazati da, ako je u^+ dovoljno blizu u^- , onda se rešenje može predstaviti pomoću tri tipa elementarnih talasa - centralnog razređujućeg, udarnog i kontaktnog diskontinuiteta.

Ključne reči: sistem zakona održanja, slabo rešenje, centralni razređujući talas, udarni talas, kontaktni diskontinuitet

SUMMARY

Many practical problems in science and engineering involve conserved quantities and lead to PDEs of this class. We will consider a nonlinear hyperbolic Riemann problem (1) and we will show whenever u^+ is sufficiently close to u^- Riemann problem (1) can be solved by an elementary wave: a rarefaction, a shock or a contact discontinuity.

Keywords: systems of conservation laws, weak solution, centered rarefaction wave, shock wave, contact discontinuity.

* Nebojša Dedović, Sanja Konjik, dr Snežana Matić-Kekić, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad



UVOD

U ovom radu biće posmatrani hiperbolički sistemi zakona održanja i njihova rešenja. Opšti oblik sistema zakona održanja dat je sa

$$u_t(x, t) + f_x(u(x, t)) = 0, \quad (2)$$

gde promenljiva $t \geq 0$ predstavlja vreme, promenljiva x je prostorna promenljiva, m -dimenzionalni vektor u je očuvana veličina, a $f(u)$ predstavlja fluks.

Sistem (2) može se napisati i u kvazilinearnom obliku

$$u_t + A(u) \cdot u_x = 0, \quad (3)$$

gde je $A(u) = Df(u)$ $m \times m$ Jakobijeva matrica preslikavanja f u tački u .

Za glatka rešenja ova dva sistema su ekvivalentna. U suprotnom, ako je u prekidna funkcija koja ima skok, na levoj strani sistema (3) pojaviće se proizvod prekidne funkcije $A(u)$ sa distribucionim izvodom u_x , što u opštem slučaju nije dobro definisano. Otuda sistem (3) ima smisla samo za glatka rešenja. Sa druge strane, sistem (2) nam dopušta da posmatramo i neprekidna rešenja, interpretirana u distribucionom smislu. Preciznije, lokalno integrabilna funkcija $u = u(t, x)$ je slabo rešenje sistema (2) ako važi

$$\int \int (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = 0, \quad (4)$$

za svaku diferencijabilnu funkciju sa kompaktnim nosačem $\phi \in C_c^1$.

Za sistem jednačina zakona održanja (2) kažemo da je striktno hiperboličan ako $m \times m$ Jakobijeva matrica $A(u) = f'(u)$ ima m realnih i različitih karakterističnih korena, za koje ćemo još pretpostaviti da važi $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_m(u)$. Odgovarajuće desne karakteristične vektore označavaćemo sa $r_i(u)$, $i = 1, \dots, m$. Ako za i -tu karakteristično polje $\lambda_i(u)$ važi

$$D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) \neq 0, \quad (5)$$

onda kažemo da je ono zaista nelinearno (genuinely nonlinear). S druge strane, ako je

$$D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) = 0, \quad (6)$$

kažemo da je i -to polje linearno degenerisano (linearly degenerate).

Vrlo često se zahteva da rešenja polazne jednačine (2) moraju da zadovoljavaju unapred zadate početne ili granične uslove. Mi ćemo posmatrati početni ili Košijev (Cauchy) problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (7)$$

kao i poseban slučaj, takozvani Rimanov problem, kod koga je početni uslov dat sa dva konstantna stanja u_l i u_r , odvojena jednim diskontinuitetom

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} u_l & , \quad x < 0 \\ u_r & , \quad x > 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (8)$$

Postoji nekoliko razloga za proučavanje sistema zakona održanja. Mnogi praktični problemi u nauci i inženjerstvu, kod kojih se neka veličina održava, opisuju se jednačinama zakona održanja. Od posebne važnosti je sistem Ojlerovih jednačina gasne dinamike. One se koriste u aerodinamici (npr. problem protoka vazduha oko aviona ili drugog saobraćajnog sredstva, problem protoka gasa kroz cev). Meteorologija i vremenska prognoza primenjuju zakone održanja iz oblasti dinamike fluida. Sistemi jednačina magnetne hidrodinamike nastaju kao model iz oblasti dinamike fluida. Fundamentalne jednačine dinamike fluida su Navier-Stoksove (Navier-Stokes) jednačine, ali one uključuju i efekte viskoze fluida i rezultirajuća funkcija fluksa ne zavisi samo od promenljivih već i od gradijenta, tako da te jednačine nisu u formi (2) i nisu hiperbolične.

MATEMATIČKI PROBLEMI

Pri rešavanju sistema zakona održanja pojavljuju se i izvesni matematički problemi. Osnovni problem kod nelinearnih sistema je u tome sto, čak i u slučaju glatkih početnih uslova, rešenja Košijevog problema (7) mogu da budu prekidne funkcije. Posmatrajmo jedan takav nelinearni $m \times m$ sistem jednačina zakona održanja

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (9)$$

gde je $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ i $f(u) = (f_1(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, f_m(u_1, u_2, \dots, u_m))$.

Neka je $u(x, t)$ po delovima glatko rešenje polaznog sistema, koje ima prekid duž prave $x = \gamma(t)$. Označimo sa

$$u^\pm = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^\pm} u(t, x)$$

desnu i levu graničnu vrednost funkcije $u(t, \cdot)$ u tački skoka. Za proizvoljno $\phi \in \mathbb{C}_c^1$, primenjujući teoremu o divergenciji na vektorsko polje $(u \cdot \phi, f(u) \cdot \phi)$ u dve poluravni razdvojene pravom $x = \gamma(t)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int \int (u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x) dx dt &= - \int \int (u_t + A(u)u_x) \phi dx dt + \\ &+ \int ((u^+(t) - u^-(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) - (f(u^+(t)) - f(u^-(t)))) \phi(\gamma(t), t) dt \end{aligned} \quad (10)$$

Kako je (10) zadovoljeno za proizvoljnu diferencijabilnu funkciju ϕ sa kompaktnim nosačem, tada iz

$$\int \int (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt = 0,$$

i

$$u_t + A(u)u_x = 0$$

u svim tačkama van linije skoka, sledi da duž $\gamma(t)$ mora da važi

$$(u^+ - u^-) \dot{\gamma} = f(u^+) - f(u^-). \quad (11)$$

Vektorske jednačine (11) su poznate kao Rankin-Igonooovi (Rankine-Hugoniot) uslovi (ili kraće R-H uslovi) [1].

Drugi matematički problem je moguća nejedinstvenost rešenja. Može se javiti više slabih rešenja zakona održanja za isti početni uslov. To je posledica činjenice da se koristi model, gde su neke fizičke osobine ignorisane (viskoznost, disperzija, ...). Međutim, u praksi postoji samo jedno valjano rešenje, a nekad rešenja ni nema.

Sledeći problem je kako izabrati pravo rešenje. U tu svrhu potrebno je nametnuti neke dodatne uslove na postojeća slaba rešenja. Postoji više različitih prilaza ovom problemu. Jedna od mogućnosti je da se uvede difuzni član u jednačinu koja će tada imati jedinstveno glatko rešenje, pa pustiti da koeficijenti difuznog člana teže nuli. Ovaj metod se naziva metod nestajanja viskoznosti ("vanishing viscosity method"). Ovakav način rešavanja nije jednostavan, jer se umesto polaznog proučava mnogo komplikovaniji sistem. Osim toga, u prvi plan se stavlja mala viskoznost, što nije uvek opravdano. Za sisteme jednačina zakona održanja koriste se i takozvani entropijski uslovi. Međutim, kada su gasne jednačine u pitanju, Laks (Lax) je formulisao uslove koji, pored veoma intuitivnog geometrijskog značenja, lako mogu biti provereni u praksi.

RAZREĐUJUĆE KRIVE I KRIVE UDARNIH TALASA

Fiksirajmo stanje $u_0 \in \mathbb{R}^m$ i indeks $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Neka je $r_i(u)$ i -ti karakteristični vektor Jakobijeve matrice $A(u) = Df(u)$. Integralna kriva vektorskog polja r_i kroz tačku u_0 se naziva razređujuća kriva (rarefaction curve) kroz tačku u_0 . Ona se dobija rešavanjem Košijevog problema

$$\frac{du}{ds} = r_i(u), \quad (0) = u_0. \quad (12)$$

Označavaćemo je sa

$$s \rightarrow R_i(s)(u_0). \quad (13)$$

Krivu i -tog udarnog talasa (shock curve) u tački u_0 dobijamo tražeći sve tačke u za koje važe R-H uslovi (11). Tu krivu ćemo označavati sa

$$s \rightarrow S_i(s)(u_0). \quad (14)$$

Tačke te krive imaju oblik

$$u = u_0 + c \cdot r_i(u_0).$$

To znači da su obe krive, R_i i S_i , tangentne na r_i u tački u .

RIMANOV PROBLEM

Posmatrajmo sada nelinearan Rimanov problem

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Rešenje Rimanovog problema biće konstruisano pod sledećim pretpostavkama:

1. sistem jednačina u problemu (15) je strogo hiperboličan sa glatkim koeficijentima,

2. $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, i -to polje karakteristika, $\lambda_i(u)$, je ili zaista nelinearno ili je linearno degenerisano.

Ispitajmo sada tri specijalna slučaja.

1. Centralni razređujući talasi (Centered Rarefaction Waves - CRW)

Neka je i -to karakteristično polje zaista nelinearno i pretpostavimo da u^+ leži na pozitivnoj i -toj razređujućoj krivi kroz u^- , odnosno $u^+ = R_i(s)(u^-)$ za neko $s > 0$. Tada za svako $\theta \in [0, 1]$ definišimo

$$\lambda_i(\theta) = \lambda_i(R_i(\theta)(u^-)).$$

Iz uslova (5) preslikavanje $\theta \rightarrow \lambda_i(\theta)$ je strogo rastuća funkcija duž razređujuće krive $R_i(s)(u_0)$. Tada je, za $t \geq 0$, funkcija

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x < t \cdot \lambda_i(u^-) \\ R_i(\theta)(u^-), & x = t \cdot \lambda_i(\theta), \theta \in [0, s] \\ u^+, & x > t \cdot \lambda_i(u^+) \end{cases} \quad (16)$$

je po delovima glatko, slabo rešenje Rimanovog problema (15).

Primitimo da je pretpostavka $s > 0$ ključna za ovu konstrukciju. U suprotnom slučaju, za $s < 0$, funkcija definisana sa (16) bi bila trostruko definisana funkcija u oblasti gde je $\frac{x}{t} \in [\lambda_i(u^+), \lambda_i(u^-)]$.

2. Udarne talase (Shocks - SW)

Pretpostavimo opet da je i -to polje karakteristika zaista nelinearno, ali da je stanje u^+ spojeno i -tim udarnim talasom sa u^- , odnosno $u^+ = S_i(s)(u^-)$. Tada je funkcija

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x < t \cdot \lambda \\ u^+, & x > t \cdot \lambda \end{cases} \quad (17)$$

predstavlja deo po deo konstantno rešenje Rimanovog problema (15). Ako je $s < 0$ tada je rešenje (17) entropijski prihvatljivo u smislu Laksa [4].

3. Kontaktni diskontinuiteti (Contact Discontinuities - CD)

Pretpostavimo sada da je i -to karakteristično polje linearno degenerisano i da stanje u^+ leži na i -toj razređujućoj krivi kroz u^- , odnosno, $u^+ = R_i(s)(u^-)$, za neko s . Iz uslova linearne degenerisanosti sledi da je brzina i -te karakteristike, $\lambda_i(u)$, konstantna duž ove krive. Birajući za $\lambda = \lambda(u^-)$, deo po deo glatka funkcija (17) ponovo daje rešenje Rimanovog problema (15).

Za sva tri slučaja parametar s za koji je $u^+ = R_i(s)(u^-)$ ili $u^+ = S_i(s)(u^-)$ zovemo snaga talasa. Sumirajmo sada prethodne rezultate.

Za fiksirano levo stanje u^- i za $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ definišimo krivu

$$\Psi_i(s)(u^-) = \begin{cases} R_i(s)(u^-) & , \quad s \geq 0 \\ S_i(s)(u^-) & , \quad s < 0. \end{cases} \quad (18)$$

U specijalnom slučaju kada je $u^+ = \Psi_i(s)(u^-)$ za neko s , rešenje Rimanovog problema je jedan elementarni talas: CRW, SW ili CD.

U opštem slučaju, rešenje Rimanovog problema (15) se može dobiti određivanjem

međustanja $w_0 = u^-$, $w_1, \dots, w_m = u^+$ takvih da svaki par stanja w_{i-1}, w_i može biti spojen elementarnim talasom, tj.

$$w_i = \Psi_i(s_i)(w_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

Postupak (19) se može uraditi kada je u^+ dovoljno blizu u^- . U tom slučaju, teorema o implicitnoj funkciji obezbeđuje jedinstvenost i egzistenciju snaga talasa $s_1, s_2, \dots, s_m$ tako da je

$$u^+ = (\Psi_n(s_n) \circ \dots \circ \Psi_1(s_1))(u^-). \quad (20)$$

Rešenje sistema (15) se sada dobija "sastavljanjem" rešenja sledećih m Rimanovih problema

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} w_{i-1} & , \quad x < 0 \\ w_i & , \quad x > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Na osnovu konstrukcije, svaki problem ima entropijski prihvatljivo rešenje, koje se sastoji iz jednog elementarnog talasa. Preciznije:

Slučaj 1. Neka je i -to polje karakteristika zaista nelinearno i $s_i > 0$. Tada je rešenje problema (21) jedan centralni CRW. Njegova i -ta brzina karakteristike je u intervalu $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$ definisana sa

$$\lambda_i^- = \lambda_i(w_{i-1}), \quad \lambda_i^+ = \lambda_i(w_i). \quad (22)$$

Slučaj 2. Neka je i -to polje karakteristika zaista nelinearno i $s_i \leq 0$ ili neka je i -to polje karakteristika linearno degenerisano, a s_i proizvoljno. Tada je rešenje problema (21) ili SW ili CD, koji putuju brzinom dobijenom iz R-H uslova

$$\lambda_i^- = \lambda_i^+ = \lambda_i(w_{i-1}, w_i). \quad (23)$$

Rešenje opšteg problema (15) može biti konstruisano sastavljanjem rešenja m pomoćnih Rimanovih problema (21), $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Zbog stroge hiperboličnosti i neprekidnosti, možemo pretpostaviti da su intervali $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$ disjunktni, drugim rečima da važi

$$\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \dots < \lambda_m^- \leq \lambda_m^+.$$

Otuda, deo po deo glatko rešenje $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dobro definisano sa:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- = w_0 & , \quad \frac{x}{t} \in (-\infty, \lambda_1^-) \\ R_i(\theta)(w_{i-1}) & , \quad \frac{x}{t} = \lambda(R_i(\theta)(w_{i-1})) \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+] \\ w_i & , \quad \frac{x}{t} \in [\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-) \\ u^+ = w_m & , \quad \frac{x}{t} \in [\lambda_m^+, +\infty). \end{cases} \quad (24)$$

Napomena: Ovaj rad je urađen u okviru projekta broj 1835 po nazivom "Metode funkcionalne analize, ODJ i PDJ sa singularitetima", koji finansira Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije u periodu od tri godine (2002. do 2004. godine).

LITERATURA

- [1] A.Bressan, Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *S.I.S.A.*, Italy.
- [2] B.L.Keyfitz and H.C.Kranzer, Spaces of Wiegthed Measures for Conservation Laws with Singular Shock Solutions, *J.Diff.Eq.* 118, 2 pp. 420-451, 1995.
- [3] R.J.LeVeque, Finite Difference Methods for Differential Equations, *University of Washington*, 1998.
- [4] R.J.LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, *Birkhaeuser Verlag*, Basel 1990.
- [5] M.Nedeljkov, Delta and Singular Delta Locus for One Dimensional Systems of Conservation Laws, to appear in *Math.Mod.Appl.Sci.*
- [6] P.J.Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, *Springer*, New York 1993.

Predato: 2.06.2003.

Primljeno: 4.06.2003.