

UDK:621.316.933(045)=163.41

DOI: 10.5937/bakar2501089M

NAUČNI RAD

Oblast: Elektroenergetika

Primljen: 22.04.2025.

Prerađen: 03.05.2025.

Prihvaćen: 05.05.2025.

**ANALITIČKI METOD ODREĐIVANJA PARAMETARA IMPULSNIH
PRENAPONA ATMOSFERSKIH PRAŽNENJA**

**THE ANALYTICAL METHOD FOR DETERMINING
THE PARAMETERS OF IMPULSE OVERVOLTAGES
FROM ATMOSPHERIC DISCHARGES**

Nenad Marković^{1a}, Slobodan Bjelić^{2a}, Strahinja Marković^{3a}

¹Akademija strukovnih studija kosovsko metohijska, Odsek Uroševac - Leposavić,
38218 Leposavić, Srbija

²Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, Univerzitet u Prištini,
Kneza Miloša 7, 38220 Kosovska Mitrovica, Srbija

³Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, Univerzitet u Prištini,
Kneza Miloša 7, 38220 Kosovska Mitrovica, Srbija

^{1a} E-mail: nen.mark74@yahoo.com, Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6960-1953>

^{2a} E-mail: slobodanbjelic49@yahoo.com, Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5642-8936>

^{3a} Orcid: <https://orcid.org/0009-0004-7812-8781>

Izvod

Impulzni generatori sa RC kolima predstavljaju osnovu za generisanje udarnih napona koji se koriste u ispitivanjima uređaja visokog napona. U radovima iz tehnike visokih napona, relacije za oblike talasa udarnih napona sadrže poznate parametre impulsnog napona, atmosferskih ili sklopnih prenapona, pomoću kojih se određuju amplitude i vremenske konstante impulsnog prenapona u RC kolima za pražnjenje. U standardima i radovima nema objašnjenja za veći broj nejasnoća kao što je na primer ona za pridruženi broj 1,67 za vreme rasta (rise time) a nedostaje i analiza i egzaktno fizičko i matematičko obrazloženje. Svi parametri prenapona ostaju u domenu definicija i imaju aksiomatski karakter, a formule za projektovanje generatora udarnih napona nisu prikladne. U ovom radu implementirane su formule i dobijena rešenja pomoću kojih se mogu odrediti tačne vrednosti svih parametara i veličina električnog RC kola koje generiše zadati oblik impulsnog napona. Za verifikaciju metoda primenjen je adaptirani deo paketa MATLAB programa pod nazivom psbsurgeovervoltage.mdl.

Ključne reči: analitički metod, atmosferska pražnjenja, generator udarnog napona, impulsni prenaponi, RC kolo

Abstract

Impulse generators with RC circuits form the foundation for producing surge voltages used in high-voltage equipment testing. In high-voltage engineering literature, the expressions for impulse voltage waveforms include known parameters of lightning or switching overvoltages, which are used to determine the amplitudes and time constants of impulse overvoltages in RC discharge circuits. However, both standards and scholarly publications often lack clarification for various

ambiguities-such as the commonly cited factor of 1.67 for rise time-without providing rigorous physical or mathematical justification. All overvoltage parameters are typically defined axiomatically, and the existing formulas for designing impulse voltage generators are often inadequate. This paper presents implemented formulas and derived solutions that enable accurate determination of all parameters and electrical quantities of an RC circuit generating a specified impulse voltage waveform. For method verification, an adapted module of the MATLAB simulation package, psbsurgeovervoltage.mdl, was employed.

Keywords: analytical method, atmospheric discharges, impulse voltage generator, impulse overvoltages, RC circuit

1. UVOD

Udarni naponi koji nastaju usled atmosferskih pražnjenja ili komutacionih procesa u elektroenergetskim sistemima predstavljaju ozbiljnu opasnost po elektroenergetsku i elektronsku opremu. Ovi impulsi karakterišu se kratkim trajanjem i veoma visokom amplitudom, višestruko većom od nominalnog pogonskog napona [1]. U cilju istraživanja njihovog uticaja i provere otpornosti opreme, u laboratorijskim uslovima se koriste generatori udarnih napona, najčešće sa RC kolima različitih redova [2].

Standardizacija u ovoj oblasti, kako u međunarodnim (IEC) tako i domaćim okvirima, obezbeđuje definicije i parametre za standardne oblike talasa ($1,2/50 \mu s$ za atmosferske i $250/2500 \mu s$ za sklopne prenapone) (IEC 60060-1:2010) [3]. Međutim, mnoge od ovih definicija imaju aksiomatski karakter i ne nude egzaktno matematičko i fizičko utemeljenje. Primer toga je faktor 1,67, koji se koristi u određivanju vremena trajanja fronta talasa, a za koji u literaturi ne postoje zadovoljavajuća objašnjenja. Slično tome, metodologije za proračun elemenata RC kola često se oslanjaju na aproksimacije ili empirijski utemeljene formule koje ne nude dovoljnu preciznost pri projektovanju generatora udarnih napona [4].

Zbog toga se u ovom radu primenjuje analitički metod za određivanje svih ključnih parametara impulsnog prenapona i njegovih odgovarajućih električnih komponenti u RC kolima. Ovaj pristup, za razliku od uobičajenih empirijskih i numeričkih metoda, omogućava tačno matematičko modelovanje talasa prenapona na osnovu diferencijalnih jednačina II reda sa konstantnim koeficijentima [5]. Primenom teorema o egzistenciji i jednoznačnosti rešenja diferencijalnih jednačina, kao i odgovarajućih karakterističnih funkcija i eksponencijalnih izraza, moguće je dobiti precizne izraze za napone i struje u RC kolima koji generišu zadate oblike udarnih talasa.

Poseban doprinos rada ogleda se u prikazu postupka kojim se, na osnovu poznatih parametara standardnog impulsnog talasa (amplituda, vreme fronta i začelja), određuju vrednosti električnih komponenti kola. Ovako formulisani matematički model verifikovan je simulacionim putem, korišćenjem adaptiranog dela paketa MATLAB programa i modela psbsurgeovervoltage.mdl, što omogućava direktnu primenu rezultata u

laboratorijskim uslovima i pri projektovanju generatora za ispitivanje visokonaponske opreme [6].

Ovim se prevazilaze ograničenja postojećih standardnih modela i pruža se jasna i primenljiva veza između teorijskih modela i praktične realizacije udarnih talasa u ispitivanjima. Time se doprinosi većoj preciznosti, pouzdanosti i racionalnosti u projektovanju i primeni visokofrekventne merno-zaštitne opreme i sistema za ispitivanje.

2. PREGLED LITERATURNIH IZVORA

U dostupnoj literaturi iz oblasti ispitivanja uređaja visokog napona, ista se fokusira na primenu udarnih napona generisanih u impulsnim generatorima sa RC kolima. Standardi, kao što su IEC propisi, definišu osnovne parametre impulsnog napona – amplitude i vremenske konstante – ali često ne pružaju detaljno matematičko i fizičko obrazloženje, ostavljajući određene aspekte, poput faktora 1,67 za vreme rasta, nedovoljno razjašnjene.

U svojoj knjizi **Tehnika visokog napona**, Lj. Milanković se bavio analizom i primenom udarnih napona u ispitivanju uređaja visokog napona, naročito kroz upotrebu generatora impulsnih napona sa RC kolima. On ukazuje na problematičnost postojećih standarda i naučnih radova u kojima se mnogi parametri impulsnog prenapona definišu aksiomatski, bez dublje fizičke i matematičke analize [7].

U svom radu N. Marković i ostali ističu da pored analitičkog modelovanja impulsa visokog napona u ispitivanjima, precizna regulacija i kompenzacija napona u elektroenergetskim mrežama predstavlja ključni faktor za očuvanje stabilnosti i zaštite električne opreme od potencijalno destruktivnih prenapona [8].

Teorijski radovi iz tehnike visokih napona objašnjavaju nastanak kratkotrajnih udarnih napona, koji nastaju usled atmosferskih uticaja ili komutacijskih procesa u mrežama, a koji mogu oštetiti uređaje pri probojima i preskocima. U okviru ovih istraživanja obrađeni su procesi razvoja elektronske lavine i formiranje streamer kanala, kao i modeli proboja koji se baziraju na kombinaciji statističkog rasipnog vremena i vremena za izgradnju provodnog kanala [9].

U svom delu "Electrical Breakdown of Gases", iako Meek prvenstveno opisuje opšte pojave električnog proboja u gasovima, on postavlja i osnove za analitičko modelovanje procesa koji dovode do impulsnih prenapona pri atmosferskim pražnjenjima [10].

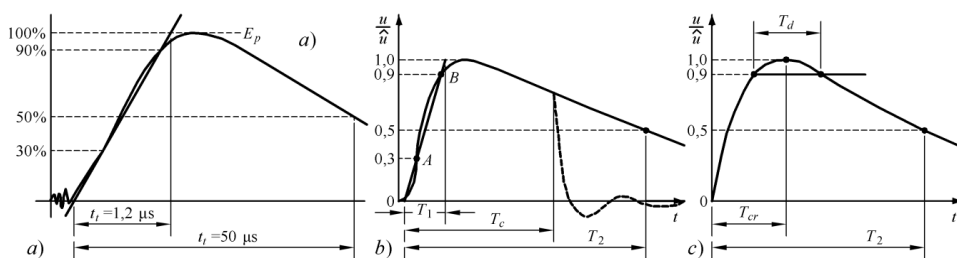
Navedeni radovi predstavljaju samo deo osnove za savremena istraživanja u tehnici visokog napona, gde se analitički pristupi dopunjuju simulacionim metodama kako bi se prevazišle nepreciznosti u tradicionalnim modelima zbog prisustva nelinearnih elemenata.

3. KARAKTERISTIČNE VELIČINE UDARNIH PRENAPONA T_f/T_t

Teorija kanala i zakon Pašena su osnovne teorije o probouju iskrišta: Pražnjenje na široj površini je elektronska lavina, koja dovodi do rasta broja slobodnih elektrona i inicira novu lavinu. U homogenim poljima nastaje više streamer kanala jedan uz drugog, i usled jonizacije razvija se kanal provodne plazme sa visokom temperaturom (leader). Za proboj je potrebno vreme od trenutka pojave probojnog napona do proboja. Vreme proboja je $t' = t_s + t_a$ i sastoji se od statističkog rasipnog vremena t_s i vremena za izgradnju provodnog kanala $t_a = 0_+(ns)$. Statističko rasipno vreme t_s uzima u obzir pojavu početnih slobodnih elektrona, u većini slučajeva je malo jer zavisi od oblika elektroda, njihovog razmaka s i nivoa dovedenog napona. Za $s > 1(mm)$ iznosi $t = 10 - 20(ns)$. Vreme stvaranja provodnog kanala je vreme od pojave lavine do nastanka provodnog kanala. Probij nastaje zbog laganog povećanja jednosmernog napona U_{ps} . Za veće razmake s između elektroda, kritični broj elektrona nastaje kod prve lavine. Na primer, za $s = 25(cm)$ može biti vreme $t_a = 1(\mu s)$.

Atmosferski naponski talas, slika 1.a, karakteriše odnos T_1/T_2 gde je T_1 efektivno vreme fronta (čela) talasa jednako vremenu između relativne vrednosti napona označene tačkom A (30% amplitude) i tačkom B (90% amplitude) uvećano za 1,67 puta, jer vreme trajanja čela talasa traje toliko puta duže od vremena koje odgovara naponima u tačkama A i B, a T_2 je efektivno vreme u kome se napon smanji do polovine vrednosti amplitude. Atmosferski i komutacioni prenaponi dostižu punu vrednost u različito vreme. Atmosferski imaju 'kraće vreme' rasta do maksimuma ($1/50(\mu s)$) a komutacioni prenaponi 'duže vreme' rasta (oko $100/1.000(\mu s)$).

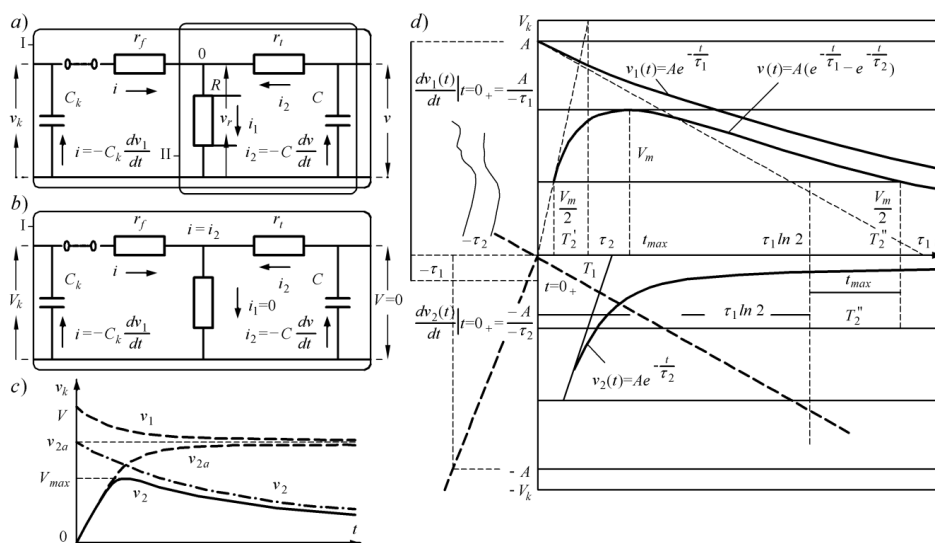
Oblik napona propisuju standardi, slika 1.a,b,c. Standardna vrednost oblika napona je $T_1/T_2 = 1,2/50$, vreme trajanja čela $T_1 = 1,2(\mu s)$ ($\pm 30\%$) i dostizanje $1/2$ amplitude na začelju $T_2 = 50(\mu s)$ ($\pm 20\%$). Oba prenapona imaju znatno manje vreme rasta napona do pune amplitude T_1 , u odnosu na vremena dostizanja $1/2$ amplitude na začelju T_2 .



Sl. 1. Oblici napona: a) stvarni i teorijski, b) udarnog atmosferskog porekla, c) sklopnog prenapona

Rezanje udarnog napona nastaje usled proboja ili preskoka i opisuje vreme rezanja T_c . Talas odrezan sa strane čela naziva se klinasti talas. U laboratorijama, pri ispitivanju odrezanim udarnim naponskim talasom, talasi se veštački režu. Vreme do maksimuma napona T_{cr} kod sklopnih udarnih napona je vreme od početne (0,0) do maksimalne vrednosti napona, slika 1.b. Pored vremena za dostizanje $\frac{1}{2}$ amplitude začelja T_2 , karakteristika je i vreme trajanja maksimuma T_d , u kome napon prelazi 90% amplitude. Ispitni sklopni udarni napon označava se kao talas 250/2.500 vremena: $T_{cr} = 250(\mu s)$ ($\pm 20\%$) i $T_2 = 2500(\mu s)$ ($\pm 60\%$).

Struktura kola za generisanje udarnih napona formira se kao RC kolo prvog, drugog ili višeg reda, u zavisnosti od broja uključenih pasivnih elemenata i iskrišta. Tipičan primer višestepene konfiguracije predstavlja Marksov generator, koji se sastoji od više serijski i paralelno povezanih RC kola sa međusobno sinhronizovanim iskrištima [11], [12]. U RC kolu je kondenzator udarne kapacitivnosti C_k koji detektuje ulazni napon kola V_k . Posle proboja iskrišta opteretiti se kapacitivnost ispitivanog elementa C preko kombinacije prigušenog otpornika r_f , a preko otpornika R dolazi do pražnjenja, slika 2.a,b.



Sl. 2. a) Ekvivalentna šema generatora impulsnog napona, b) šema generatora impulsnog napona u vremenu $t = 0$

U kolu su: C_k – kapacitivnost udarnog kondenzatora, V_k – udarni ulazni napon na C_k u trenutku udara, r_t – otpornost za prigušenje na začelju talasa, R – otpor za pražnjenje, r_f – otpor za prigušenje na čelu talasa, V – napon na ispitivanom uređaju.

U literaturi [13, 14] su date matematičke hipoteze i fizičko objašnjenje za standardni talasni oblik indukovanog atmosferskog talasa napona kao razlike dve eksponencijalne funkcije $v(t) = V_m(e^{-\alpha \cdot t} - e^{-\beta \cdot t})$. Parametar β je pridružen vremenu rasta-čela t_f a parametar α začelja t_t . Ako je $\alpha = 1,4 * e^4 s^{-1}$ i $\beta = 4,5 * e^6 s^{-1}$ stvara se oblik talasa 1,2/50(μs). Eksponencijalni članovi se dobijaju podešavanjem nakon matematičke analize a rezultati imaju prihvatljiv stepen tačnosti. Udarni napon v_2 je vremenski razdvojen na članove za punjenje i deo za pražnjenje. Otpornik za pražnjenje R se uključuje tek posle završenog punjenja. Tako se dobija vremenski tok napona napajanja v_{2a} na kapacitivnosti ispitivanog uređaja. Napon v_1 pada na vrednost $v_1 = v_2$. Kada se priključi otpornik za pražnjenje, dolazi do pražnjenja paralelno spojenih kondenzatora udarne kapacitivnosti C_k i opterećenja C . Napon na otporu opada eksponencijalno. Radi boljeg razumevanja udarni napon v_2 se razlaže na vremenski razdvojeni deo za punjenje i pražnjenje. Otpornik za pražnjenje R_{se} uključuje vreme t posle završenog punjenja. Tako se dobija napon napajanja v_{2a} na kapacitivnost opterećenja. Napon na udarnom kondenzatoru v_1 pada na vrednost $v_1 = v_2$. Ako se priključi otpornik za pražnjenje, dolazi do pražnjenja paralelno spojenih kondenzatora C_k i C . Napon na otporniku za pražnjenje eksponencijalno opada. Udarni napon v_2 se dobija superpozicijom ova dva napona.

Pri punjenju kondenzatora na napon v_{2a} , slika 2.a,b,c, otpornik za pražnjenje je $R = \infty$, a vremenska konstanta je $T_a = r_t \frac{C_k C}{C_k + C}$.

U diferencijalnoj jednačini procesa koji odgovara punjenju vremenska konstanta iznosi:

$$T_a \frac{dv_{2a}}{dt} + v_{2a} = V_1 \frac{C_k}{C_k + C} \quad (1)$$

Vremenski tok napona napajanja je:

$$v_{2a} = V_1 \frac{C_k}{C_k + C} (1 - e^{-\frac{t}{T_a}}), (t = \infty) \quad (2)$$

a konačna vrednost napona je:

$$u_{2a} = V_1 \frac{C_k}{C_k + C} \quad (3)$$

U literaturi [13] se pored grešaka ne navodi razlog ili obrazloženje za tvrdnju da su za dobijanje dobrih rezultata potrebne manipulacije za prezentaciju udarnih prenapona. Prikaz, međutim, ne odgovara stvarnosti a činjenice su osnov za važan zaključak:

Hipoteza o rešenju oblika $v(t) = V_m(e^{-\alpha \cdot t} - e^{-\beta \cdot t})$ nije korektna i nema adekvatno fizičko objašnjenje.

4. ANALITIČKI METOD ODREĐIVANJA TAČNIH RELACIJA ZA NAPONE ILI STRUJE U RC KOLU DRUGOG REDA

Analitičkim metodom se može dobiti tačna relacija za oblik atmosferskog udarnog talasa napona i struje sa RC kolom [15]. Dobijeni izraz predstavlja osnovu za projektovanje generatora koji proizvodi takav oblik udarnog napona jednostavnim izborom RC kola drugog reda sa minimalnim brojem otpornika i kondenzatora.

Ovde je prikazan primer izbora RC kola drugog reda zadatih vrednosti i parametara talasa napona ili struje [16, 17]. Metod je zasnovan na Lemi tehničke prirode [18], koja se ovde koristi za određivanje oblika prenapona (Lema-pomoćna teorema je etapa u dokazu složenije teoreme o egzistenciji (Cauchy)): Ako je $f(x, y)$ neprekidna funkcija oblasti u okolini tačke $M(x_0, y_0)$ za $|x - x_0| < a$ i $|y - y_0| < b$ onda postoji bar jedno rešenje jednačine $y' = f(x, y)$ definisane i neprekidne u intervalu oko tačke $x = x_0$, koje za $x = x_0$ ima vrednost $y = y_0$. Ako je, u oblasti ispunjeno $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < N(y_1 - y_2)$, tj. za Lipshitz-ov uslov kada N ne zavisi od x, y_1, y_2 , onda je to rešenje jednoznačno i neprekidna funkcija od $y = y_0$.

Lipshitz-ov uslov je uvek ispunjen ako $y = f(x, y)$ ima u toj oblasti ugrađen diferencijal df/dy .

U primerima gde uslovi Cauchy nisu ispunjeni koristi se uslov Lipshitz-a. Za singularne tačke u kojima je $(0,0)$ izolovana tačka, narušeni su uslovi Cauchy-jeve teoreme, ali u ma kojoj drugoj tački oni su ispunjeni a ponašanje krivih oko te tačke zavisi od korena karakteristične jednačine: Ako kroz tačku $M(x, y)$ prolazi graf rešenja $y = \phi(x)$ diferencijane jednačine $y' = f(x, y)$, koeficijent smera tangente na graf u toj tački (jednak dy/dx) se može odrediti direktno iz diferencijalne jednačine i tako diferencijalna jednačina u svakoj tački određuje smer tangente na graf rešenja. Taj smer je jednak sa smerovima svih pravih koje su u polju u ravni paralelne sa tom tangentom na graf u zadatoj tački. Sa matematičkog aspekta, ostale prave sem nje, nisu tangente i ostali smerovi koji pripadaju ostalim pravama ne ispunjavaju uslov da su prvi izvodi grafa u zadatoj tački jer nisu ispunjeni Cauchy-jevi uslovi. Te uslove mora da zadovolji i rešenje linearne diferencijalne homogene jednačine II reda sa konstantnim koeficijentima:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

i pridružene karakteristične jednačine:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 // a \frac{d^2v}{dt^2} + b \frac{dv}{dt} + cv = 0 \quad (5)$$

Rešenje po pretpostavci sadrži dve eksponencijalne komponente: $y_1(x) = Ae^{\lambda_1 x}$ i $y_2(x) = Be^{\lambda_2 x}$ i zavisno od koeficijenata, tj. od rešenja za korene karakteristične jednačine razlikuju se tri slučaja:

1. λ_1 i λ_2 su realna i različita, onda je: $y = y_1(x) + y_2(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

Ako je zbog početnih uslova ($B = -A$) tada je:

$$y = y_1(x) + y_2(x) = A(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \quad (6)$$

2. λ_1 i λ_2 su realna i jednaka, onda je:

$$y = y_1(x) + y_2(x) = Ae^{\lambda_1 x} + xBe^{\lambda_2 x} \quad (7)$$

3. $\lambda_1 = \lambda_{Re} + i \cdot \lambda_{Im}$ i $\lambda_2 = \lambda_{Re} - i \cdot \lambda_{Im}$ su konjugovano kompleksni brojevi sa dva realna i jednaka dela, onda je:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = Ae^{\lambda_{Re} \cos \lambda_{Im}} \cdot e^{\lambda_{Re} \sin \lambda_{Im}} \quad (8)$$

U radu je primenjena Cauchy (Lipschitz)-teorema o egzistenciji rešenja diferencijalne jednačine I reda i princip ekvivalentnosti funkcije i njenog prvog izvoda. Analiza se odnosi samo za prvu komponentu iako važi i za drugu komponentu. Funkcija je ekvivalentna svom izvodu ako se može dobiti integracijom iz njenog izvoda. Oblik parametara u jednačini (6) pokazuje da su koreni λ_1 i λ_2 realni i različiti; prvi izvod y_1 prve komponente u tački x određuje se integracijom uz uslov ekvivalencije iz prvog izvoda funkcije $y(x)$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= dy/dx = A\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \\ y_1(x) &= \int_{x_0}^x A\lambda_1 e^{\lambda_1 x} dx = \left| Ae^{\lambda_1 x} \right|_{x_0}^x = Ae^{\lambda_1 x} - Ae^{\lambda_1 x_0} \\ y_2(x) &= \int_{x_0}^x B\lambda_2 e^{\lambda_2 x} dx = \left| Be^{\lambda_2 x} \right|_{x_0}^x = Be^{\lambda_2 x} - Be^{\lambda_2 x_0} \\ y(x) &= y_1(x) + y_2(x) = (Ae^{\lambda_1 x} - Ae^{\lambda_1 x_0}) + (Be^{\lambda_2 x} - Be^{\lambda_2 x_0}) \\ y &= y_1 + y_2 = A(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}) + B(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0}) \\ y' &= y_1' + y_2' = A\lambda_1(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}) + B\lambda_2(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0}) \end{aligned} \quad (9)$$

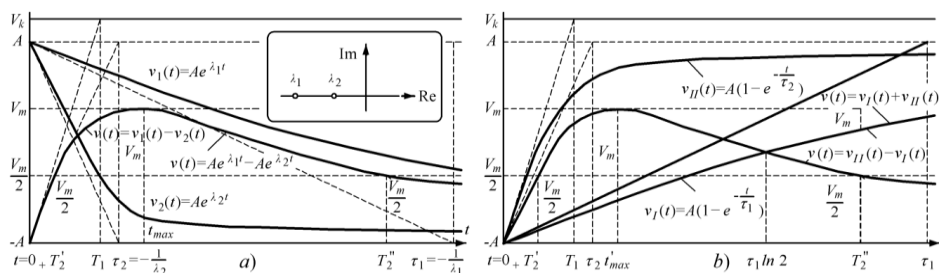
Rešenje za $y(x)$ se dobija za pretpostavljene početne uslove/početak procesa, kada je vrlo često $y_{x=x_0=0} = 0$, a postoji prvi izvod i on je jednak nekoj konstanti, tj. $y'(x)_{x=x_0} = \text{const}$. Tada je $B = -A$ i iz prethodne analize sledi izraz matematički kompletnijeg i korektnog rešenja homogene diferencijalne jednačine II reda koje zadovoljava teoremu o egzistenciji rešenja i uslov ekvivalencije:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = A[(1 - e^{\lambda_1 x}) - (1 - e^{\lambda_2 x})] = A(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \quad (10)$$

To rešenje zadovoljava homogenu diferencijalnu jednačinu i na prvi pogled nema nikakve razlike u odnosu na rešenje u jednačini (6):

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= y'_1(x) + y'_2(x) = -A[\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}] \\
 y''(x) &= y''_1(x) + y''_2(x) = -A[\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}] \\
 -aA[\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}] - bA[\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}] + cA[(1 - e^{\lambda_1 x}) - (1 - e^{\lambda_2 x})] &= 0 \\
 -A\{[a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c]_{=0} \cdot e^{\lambda_1 t} - [a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c]_{=0} \cdot e^{\lambda_2 t} + cA[1 - 1]_{=0} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Dakle, dokazano je da postoji i drugo moguće tačno rešenje koje zadovoljava diferencijalnu jednačinu II reda koje je i matematički korektno a u analitičkoj formi ima prednosti za određivanje važnijih parametara u kolu impulsnog generatora za simulaciju atmosferskih ili komutacionih prenapona. Rešenje izgleda komplikovanije u odnosu na poznato i korišćeno rešenje u jednačini (10) za rešavanje prelaznih procesa a oblici grafova komponenti takođe su jako različiti za ta dva slučaja što se vidi na slici 3.a,b.



SI. 3. Dijagram dobijen uz primenu: a) klasičnog metoda, b) novog postupka

U nastavku je opšta nezavisno promenljiva x zamenjena nezavisnom vremenski promenljivom $x \equiv t$ a zavisno promenljiva y vremenski promenljivom vrednošću, tj. veličinom napona $y \equiv v$ nakon čega su dobijene relacije:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = A[(1 - e^{\lambda_1 t}) - (1 - e^{\lambda_2 t})] = A(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \tag{12}$$

Kao što je u prethodnom delu rada rečeno ovde je realizovan primer gde se analitičkom metodom mogu dobiti formule za oblikovanje tranzijentnog atmosferskog ili sklopnog udarnog napona u RC kolu.

5. MODEL UDARNOG NAPONA U IZABRANOM RC ELEKTRIČNOM KOLU DRUGOG REDA

U analitičkom modelu se tačnim metodom određuju parametri oblika talasa udarnog napona koji se mogu dobiti iz kola generatora impulsnog napona II reda sa RC parametrima. Naponi/struje se određuju iz diferencijalne jednačine I reda sa konstantnim koeficijentima. Izabrano je TR kolo sa C_k parametrom na

ulazu kola, na slici 1, a usvojene vrednosti struje definišu parametri kapacitivnosti C . Pri određivanju parametara kola generatora impulsnih napona drugog reda, slika 2.a,b u kome nastaje pražnjenje, treba odrediti vremenske konstante talasa impulsnog napona T_1 i T_2 po IEC standardu [3] i vrednostima: τ_f – efektivno vreme trajanja čela talasa i τ_t – vreme trajanja začelja. Za dobijanje rešenja pomoću kola prvog reda koristili su se približni metodi modelovanja impulsnih oblika napona/struja sa dva eksponencijalna člana, zadatim naponom na ulazu RC kola sa vremenskim konstantama T_1 i T_2 i vremenskim parametarima τ_f i τ_t .

Atmosferski naponski i strujni talasi imaju različite oblike. Izraz sa dva eksponencijalna člana kao rešenje jednačine proizilazi iz matematičkog principa za rešavanje homogene diferencijalne jednačine II reda. Hipoteza zahteva proveru jer neki delovi hipoteze o dva eksponencijalna člana su protivrečni teoremi o egzistenciji rešenja (Cauchy i Lipshitz uslovima) i principu ekvivalencije funkcije i njenog izvoda. Takođe nije poznat trenutak vremena u kome nastaje proboj iskrišta. Događaje u kolu u vezi sa trenutkom proboja iskrišta određuju parametri kola, dovedeni napon V_k i prvi izvod naponskog odziva RC kola i karakteristike iskrišta. Za određivanje analitičkog modela i relevantnih parametara i vremenskih konstanti impulsnog udarnog naponskog talasa drugog reda, pretpostavljena je ekvivalentna šema na slici 1.a.

Atmosferski naponski talas se predstavlja kao razlika dve eksponencijalne funkcije i vremenskih konstanti T_1 i T_2 :

$$v(t) = -A \cdot (e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}) \quad (12)$$

Za RC kolo drugog reda sa generatorom impulsnog napona na slici 1.a je:

$$i = -C_k \frac{dv_k}{dt} \quad i_2 = -C \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

i mogu se prema II Kirhofovom zakonu za konturu I napisati sledeće diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} v_k - r_f i + r_t i_2 - v &= 0, \quad v_k = r_f i - r_t i_2 + v \\ v_k - r_f (-C_k \frac{dv_k}{dt}) + r_t (-C \frac{dv}{dt}) - v &= 0, \quad v_k = v - r_f C_k \frac{dv_k}{dt} + r_t C \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

Diferenciranjem po vremenu jednačinu (14), dobija se:

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{dv}{dt} - r_f C_k \frac{d^2 v_k}{dt^2} + r_t C \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (15)$$

Za konturu II važe sledeće jednačine:

$$v_R + r_t i_2 - v = 0, \quad R i_1 + r_t i_2 - v = 0, \quad v_R = v - r_t i_2$$

$$i = -C_k \frac{dv_k}{dt} \quad i_2 = -C \frac{dv}{dt} \quad i_1 = + \frac{r_t C}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (16)$$

Po I Kirhofovom pravilu sledi:

$$i = i_1 - i_2, \text{ tj. } -C_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{r_t C}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

Pored početnog uslova $v(t)_{t=0+} = 0$, treba definisati i početni uslov $\frac{dv(t)}{dt} \big|_{t=0+}$ tako da zadovolji jednačinu (14), tj.:

$$v_k - r_f(-C_k \frac{dv_k}{dt}) + r_t(-C \frac{dv}{dt}) - v_{v=0} = 0, \text{ odakle je } -C_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{v_k}{r_f} \pm \frac{r_t}{r_f} C \frac{dv}{dt} \quad (18)$$

Jednačina (17) uz početni uslov $v(t)_{t=0+} = 0$, glasi:

$$-C_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{r_t C}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v_{v=0}}{R} + C \frac{dv}{dt}, \text{ tj. } -C_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{r_t C}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{dv}{dt} \quad (19)$$

Izjednačavanjem jednačina (18) i (19) i rešavanjem izraza dobija se relacija za početni uslov $\frac{dv(t)}{dt} \big|_{t=0+}$:

$$\frac{v_k}{r_f} \pm \frac{r_t}{r_f} C \frac{dv}{dt} \big|_{t=0+} = C(1 + \frac{r_t}{R}) \frac{dv}{dt} \big|_{t=0+} \text{ ili } v_{k t=0+} = r_f C(1 + \frac{r_t}{R} + \frac{r_t}{r_f}) \frac{dv}{dt} \big|_{t=0+} = V_k \quad (20)$$

Ako se uvede nova vrednost koja po definiciji odgovara trajanju čela talasa $a = r_f C(1 + \frac{r_t}{R} + \frac{r_t}{r_f}) = T_1$, dobija se:

$$\frac{dv}{dt} \big|_{t=0+} = \frac{v_{k t=0+}}{T_1 T_1 = a} = \frac{V_k}{T_1} = \frac{V_k}{a} \quad (21)$$

Vreme čela talasa $T_1 = r_t C$ je definisano standardom IEC 60071-1 [19], kao vremensko trajanje čela talasa.

Diferenciranjem jednačine (16) dobija se:

$$\frac{dv_k}{dt} = -[\frac{r_t C}{R C_k} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R C_k} + \frac{C}{C_k} \frac{dv}{dt}] \quad (22)$$

Diferenciranjem jednačine (17) dobija se:

$$-C_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{r_t C}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} \big| \frac{\partial}{\partial t}, -C_k \frac{d^2 v_k}{dt^2} = \frac{r_t C}{R} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (23)$$

Povećanjem reda diferencijalne jednačine (22) za jedan, dobija se:

$$-\frac{d^2 v_k}{dt^2} = \frac{r_t C}{R C_k} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R C_k} \frac{dv}{dt} + \frac{C}{C_k} \frac{d^2 v}{dt^2} \quad (24)$$

a zatim posle izjednačavanja i sređivanja jednačina (17) i (22) dobija se:

$$-\left[\frac{r_t C}{RC_k} \frac{dv}{dt} + \frac{C}{C_k} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC_k}\right] = \frac{dv}{dt} + r_f C_k \left[\left(\frac{r_t C}{RC_k} + \frac{C}{C_k}\right) + \frac{r_t C}{r_f C_k}\right] \frac{d^2 v_k}{dt^2} + \frac{r_f}{R} \frac{dv}{dt} \quad (25)$$

Relacija (25) se može napisati u implicitnom obliku:

$$r_f C \left[1 + \frac{r_t}{R} + \frac{r_t}{r_f}\right] \frac{d^2 v_k}{dt^2} + \left[1 + \frac{r_f}{R} + \left(1 + \frac{r_t}{R}\right) \frac{C}{C_k}\right] \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_k} v = 0 \quad (26)$$

Diferencijalna jednačina koja opisuje impulsni prenapon prema šemi na slici 1.a je:

$$r_f C \left[1 + \frac{r_t}{R} + \frac{r_t}{r_f}\right] \frac{d^2 v}{dt^2} + \left[1 + \frac{r_f}{R} + \frac{C}{C_k} \left(1 + \frac{r_t}{R}\right)\right] \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_k} v = 0 \quad (27)$$

Jednačine (14 i 27) nisu ekvivalentne i dokazuje se da svako rešenje jednačine (14) je istovremeno i rešenje jednačine (27), ali i obratno, tj. svako rešenje jednačine (27) ne mora da bude rešenje jednačine (14). Rešenja jednačine (27) mogu da budu i rešenja izraza (14) ako su ispunjeni početni uslovi $v(t)_{t=0+} = 0$ i uslov $dv(t)/dt|_{t=0+} \neq 0$, tj. da je prvi izvod funkcije tangenta originala funkcije u bilo kojoj tački sa koordinatama $(0_+ < t < \infty)$. Rešenje diferencijalne jednačine II reda sa konstantnim koeficijentima (a, b, c) i eksponencijalne funkcije $(e^{\lambda t})$ određuje karakter korena pripadajuće karakteristične jednačine:

$$a \frac{d^2 v}{dt^2} + b \frac{dv}{dt} + cv = 0, \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{b}{a} \frac{dv}{dt} + \frac{c}{a} v = 0 \quad (28)$$

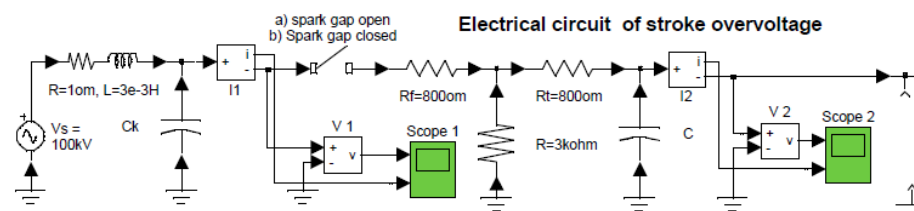
$$a = r_f C \left[1 + \frac{r_t}{R} + \frac{r_t}{r_f}\right], b = \left[1 + \frac{r_f}{R} + \frac{C}{C_k} \left(1 + \frac{r_t}{R}\right)\right], c = \frac{1}{RC_k} \quad (29)$$

6. REZULTATI SIMULACIJE U PROGRAMU MATLAB

Oblik udarnog napona određen je simulacijom u RC kolu, šema data na slici 4, i sadrži sledeće parametre: $V_k = 100(\text{kV})$, $C_k = 15 \cdot 10^{-3}(\mu\text{F})$, $r_f = r_t = 800(\Omega)$, $C = 10^{-3}(\mu\text{F})$, $R = 3000(\Omega)$.

Test: Parametri električnog izvora su: $U = 100(\text{kV})$, $f = 2(\text{Hz})$. Pri simulaciji procesa u adaptiranom delu paketa Matlab programa pod nazivom psbsurgeovervoltage.mdl pri zadatoj frekvenciji od $f = 0(\text{Hz})$ (DC) nije bilo odziva u RC kolu u oba slučaja; nisu dobijeni dijagrami napona V_1 , i V_2 , i struja I_1 i I_2 . Za simulaciju je bila potrebna minimalna frekvencija od $f = 2(\text{Hz})$.

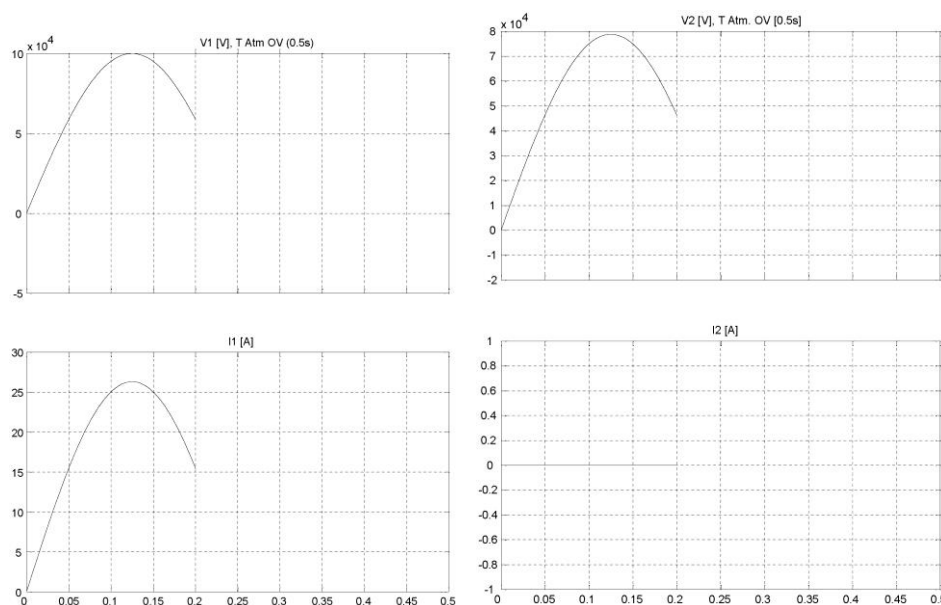
U cilju provere izvedenih analitičkih jednačina izvedena je simulacija u MATLAB programu, slika 4. Rezultati i dijagrami na slikama 5 i 6, koji prikazuju promene struja i napona, kao i primenu kola generatora za oblikovanje udarnog napona, saglasni su sa zadatim vrednostima u simulacionom modelu.



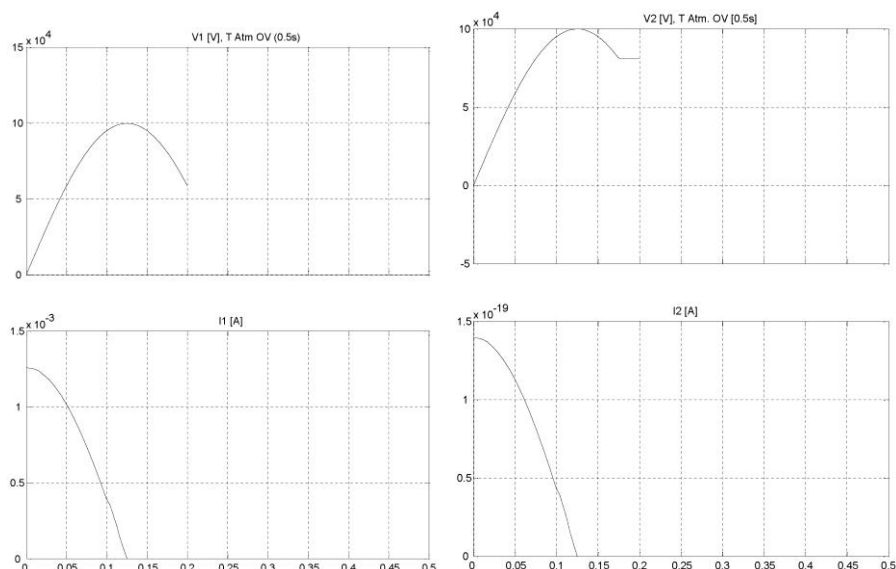
Sl. 4. Šema i parametri RC kola generatora udarnog napona za simulaciju dve pozicije u iskrištu: a) bez proboja, b) proboj napona u iskrištu. Na Scope1 detektuje se napon V_1 , struja I_1 , i na Scope2 napon V_2 , struja I_2

Pri ispitivanju posledica atmosferskih i komutacionih udarnih prenapona, u simulacijama se koriste modeli generatora impulsnih napona sa RC kolima, čiji pasivni elementi imaju standardizovane vrednosti koje direktno utiču na oblik udarnog napona.

Prema definisanim standardima IEC 62305-1 [20], teorijske formule služe za dimenzionisanje RC kola generatora udarnih napona, iako su definicije vremenskih konstanti i parametara pasivnih elemenata zasnovane na aksiomatskim postavkama, bez detaljnog fizičkog obrazloženja.



Sl. 5. Poređenje dijagrama struje i napona u dva položaja iskrišta u otvorenom RC kolu generatora za proizvodnju atmosferskih prenapona: napon V_1 , struja I_1 i napon V_2 , struja I_2



Sl. 6. Poređenje dijagrama struje i napona u dva položaja iskrišta u zatvorenom RC kolu generatora za proizvodnju atmosferskih prenapona:
napon V_1 , struja I_1 i napon V_2 , struja I_2

Za razliku od klasičnog pristupa, u ovom radu je razvijen matematički model koji, primenom formalne analitičke procedure, omogućava precizno određivanje vremenskih konstanti, parametara RC kola i rezultujućeg oblika udarnog napona. Dobijene jednačine za napone i struje sadrže eksplicitne izraze sa parametrima pasivnih elemenata, a validnost modela potvrđena je dijagramima generisanim simulacijom u adaptiranom delu paketa Matlab programa pod nazivom psbsurgeovervoltage.mdl.

Model je pogodan za simulaciju standardizovanih oblika udarnih prenapona, kako atmosferskih tako i komutacionih, i može služiti kao adekvatna zamena za laboratorijska ispitivanja u fazi projektovanja i analize.

Na kraju možemo zaključiti da ne postoji univerzalan metod za tačan proračun komutacionih i atmosferskih prenapona. Približna rešenja se dobijaju primenom metoda teorije električnih kola, uz ograničen broj početnih i graničnih uslova, kao i kroz modifikovane numeričke pristupe poput Ricove metode konačnih elemenata ili Galerkinove metode.

Kratkotrajni prenaponi, višestruko veći od nominalnih radnih napona, mogu nastati usled atmosferskih uticaja (spoljni prenaponi) ili zbog komutacionih procesa u elektroenergetskim mrežama (unutrašnji prenaponi).

7. ZAKLJUČAK

Problemi izbora parametara RC kola u generatorima za stvaranje oblika udarnih napona atmosferskih pražnjenja i sklopnih prenapona se prevazilaze primenom simulacija pomoću računarske tehnike. Rešenja se teško određuju ako se primene samo analitičke metode jer su, zbog prisustva nelinearnih elemenata (iskrište), njihove procedure zasnovane na prostim uslovima i pretpostavkama koje mogu da unesu određene nepreciznosti. Za stvaranje modela proračuna tranzijentnih procesa u tehnici visokih napona potreban je osnovni model koji je uvek analitički jer proizilazi iz teorije, ali se iz modela stiču potrebna saznanja. On se mora prilagoditi novim tendencijama i znanjima, a krajnji rezultat je neki specijalni model koji prezentuje realne prelazne procese. Ovde je to primer RC kola generatora udarnog napona gde je modelovan proces u monofaznom kolu sa naponskim izvorom i jedino mogućom frekvencijom 2 Hz za ispitivanje oblika napona i struje na izabranom opterećenju.

Pomoću odgovarajućeg algoritma i simulacionog modela mogu se odrediti vrednosti struje i napona u procesima koji se odvijaju u električnom kolu sa nelinearnim elementima. Razvijeni algoritamski modeli imaju univerzalnu primenu i mogu se koristiti za analizu različitih režima rada električnih vodova. MATLAB program je imao dvostruku namenu:

- da posluži proračunu i simulaciji veličina koje se mogu dobiti ispitivanjem ili merenjem i
- uspostavljen je originalni algoritam i verifikovan predloženi metod. Simulacija je zamenila eksperimentalna ispitivanja. Iz dobijenih rezultata-dijagrama napona i struja na mestu udara ne mogu se uočiti velike razlike u oblicima i amplitudama.

LITERATURA

- [1] M. Jayaraju, I. Daut, M. Adzman, Impulse voltage generator modelling using MATLAB, World Journal of Modelling and Simulation, 4 (2008) 57–63.
- [2] R. Sheeba, M. Jayaraju, T.K.N. Shanavas, Simulation of impulse voltage generator and impulse testing of insulator using MATLAB simulink, World Journal of Modelling and Simulation, Vol. 8, 4 (2012) 302–309.
- [3] IEC, High-voltage test techniques - Part 1: General definitions and test requirements (IEC Standard No. 60060-1:2010), International Electrotechnical Commission, 2010.
- [4] E., Kuffel, W.S., Zaengl, J. Kuffel, High Voltage Engineering: Fundamentals (Second edition), Butterworth-Heinemann, ISBN 0 7506 3634 3, 2000.
- [5] M.N.O. Sadiku, Elements of Electromagnetics (Seventh edition), Oxford University Press, 2009.

-
- [6] MATLAB SIMULINK Sim Power System, Copyright 1984-2002. The Math Works, Version 6.5.0,180913a, June 2, 2000.
 - [7] S.N. Bjelić, Atmospheric and commutation overvoltages in electrical distribution networks, Generis Publishing, ISBN 978-1-63002-486-5, 2021.
 - [8] N. Marković, S. Bjelić, F. Marković, Pобољшanje kvaliteta napona u elektro-energetskim mrežama kompenzacijom reaktivne snage pomoću kondenzatorskih baterija, Bakar, 45(2) (2020) 57–70.
 - [9] Lj. Milanković, Tehnika visokog napona, Naučna knjiga, 1962.
 - [10] J.M. Meek, Electrical Breakdown of Gases, Wiley, ISBN 0471995533, 1978.
 - [11] G.A. Mesyats, Pulsed Power, Chapter 13: Marx Generators, Springer, 2005, pp. 229–250.
 - [12] M. Jayaraju, P. Nair, B. Prabhakar, Design and simulation of marx impulse voltage generator, Journal of the Instrument Society of India, Vol. 29, No. 2, 70/74, 1999.
 - [13] Veverka, Technika Vysokých Napeti, SNTL/ALFA, Praha, 1982.
 - [14] ГОСТ 1516, Трансформаторы, аппараты и изоляторы высокого напряжения. Нормы и методы испытаний электрической прочности изоляций, Москва, 1968.
 - [15] S. Bjelić, N. Marković, Z. Bogićević, I. Bjelić, Application of Cauchy (Lip-schitz) criterion for obtaining theoretical models of atmosphere striking overvoltages, International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS), Vol. 11, 9 (2019) 20–30. DOI:10.5815/ijitcs.2019.09.03
 - [16] Z. Bogicevic, S. Bjelic, Analyses of changes in power system elements, AI-based method and mathematical model for analysis of current and voltage in elements of power systems, LAP Lambert Academic Publishing, ISBN/EAN 9783659944680, 2016.
 - [17] S. Bjelić, Z. Bogićević, Computer Simulation of Theoretical Model of Electromagnetic Transient Processes in Power Transformers, International Journal of Information Technology Computer Science (IJITCS), Vol. 6, 1 (2014) 1–12. DOI:10.5815/ijitcs.2014.01.01
 - [18] Predavanje "Elektrodistributivni prenaponi na niskom naponu, posledice po potrošače i mogućnosti zaštite", Inženjerska komora Srbije, 2018.
 - [19] Institut za stadardizaciju Srbije, SRPS EN IEC 60071-1:2020, Koordinacija izolacije-Deo 1: Definicije, principi i pravila (Insulation co-ordination - Part 1: Definitions, principles and rules).
 - [20] Institut za stadardizaciju Srbije, SRPS EN IEC 62305-1:2024, Zaštita od atmosferskog pražnjenja - Deo 1: Opšti principi (Protection against lightning - Part 1: General principles).