Иновације у настави, XXVII, 2014/2, стр. 7–21

UDC 371.3:514
37.016:514(075.2)

Рад примљен: 31. 01. 2014.
Рад прихваћен: 25. 04. 2014.

др Оливера Ј. Ђокић[1]
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Оригинални научни рад

Реално окружење у почетној настави геометрије[2]

Резиме: *Циљ рада је испитивање на који начин наставни приступ реално окружење у почетној настави геометрије утиче на постигнућа ученика (по нивоима знања) и резоновање, као и ученичку мотивацију за учење. У ту сврху употребили смо експерименталну методу. Проучавали смо основе геометрије и дидактичко-методичке основе наставе геометрије, те теоријску заснованост наставног приступа реално окружење употребом методе теоријске анализе. Иновативним моделом уџбеника, који подржава реалистичан приступ, моделима и поступцима тежили смо да наставу учинимо што ефикаснијом и унапредимо нивое постигнућа ученика. Увођење реалног окружења и пропратног иновативног уџбеника позитивно утиче на постигнућа и мотивацију ученика четвртог разреда у геометрији, чиме је потврђен ефекат одабраног наставног приступа реално окружење. Такође, представили смо иновативни модел уџбеника као практичну имплементацију који подржава конструктивистички приступ настави у реалном окружењу, а указали смо и на кључне резултате и њихове методичке импликације на почетну наставу математике, добијене на основу експерименталног истраживања. Мислимо да би програм у неком дугорочнијем приступу показао већи ефекат и поставили смо питања за даља истраживања у настави геометрије, која је све више усмерена на развој способности просторног резоновања и унапређивање искустава при мерењу дужине, површине и запремине, посебно у почетној настави.*

Кључне речи: *реално окружење, геометрија, просторно резоновање, иновативни уџбеник, нивои знања, мотивација за учење.*

Увод

Основношколска настава геометрије не би требало да је сведена само на увођење појмова/термина. Уместо тога, пожељно би било да помогне ученицима у побољшавању способности *просторног резоновања* и унапређивању искустава при *мерењу дужине, површине и запремине*, посебно у почетној настави.

Настава геометрије има за циљ развој способности интерпретације фигуралних информа-

1 olivera.djokic@uf.bg.ac.rs

2 Рад представља део експозеа са одбране докторске дисертације *Реално окружење у почетној настави геометрије*, одбрањене 4. децембра 2013. године на Учитељском факултету Универзитета у Београду, пред Комисијом: проф. др Мирко Дејић (ментор), проф. др Војислав Петровић, проф. др Вељко Банђур и проф. др Јасмина Милинковић.

ција и визуелног процесирања и осећаја о просторним облицима, својствима и њиховим међусобним односима. Два основна елемента у геометрији су: 1) *просторна оријентација,* која омогућава уочавање позиције једног објекта у односу на друге и 2) *просторна визуелизација,* као разумевање и визуелно представљање последица промена, односно (замишљених) покрета објеката из дводимензионог и тродимензионог простора. Ово подразумева разумевање, интерпретацију и вербални опис визуелне фигуралне репрезентације, о чему дискутује велики број истраживача (Clements and Battista, 1992). Искуства све већег броја математичких програма усмерена су на развој *просторног резоновања* – и то путем геометријских инструкција подржаних уџбеником математике (Fauzan, 2002). Стога су важна питања која смо обрађивали у раду *појам простора и просторно резоновање*, чиме смо истакли и важан став о настави геометрије, као и питање уџбеника из математике. Истраживачи математичког образовања наглашавају значај уџбеника, са становишта истраживања геометријског мишљења, као важног алата у учењу и поучавању, па је стога важно питање како уџбеником подстаћи развој геометријског мишљења, тј. како формирати дечју ’навику ума’ на геометријско резоновање које иде ка системском мишљењу (Gutierrez et al., 2005; Hershkowitz, 1998; Steen, 1999; Prenger, 2005; Diezmann et al., 2002). Бавили смо се и питањем како код већине ученика развити интересовање за геометрију и мотивацију за учење, те постићи бољи успех ученика из ове области математике. Важно полазиште рада јесте *наставни приступ* у почетној настави геометрије, заснован на реалном окружењу.

Теоријске основе истраживања

Геометријске основе

У намери да расветлимо пут развоја геометрије, бавили смо се њеном историјском перспективом, неким њеним специфичностима, њеном повезаношћу са интуитивном основом и логичким сређивањем и структурисањем. Тако је наше опредељење, приликом састављања наставног материјала у оквиру експерименталног дела истраживања, приступ геометријском штиву који би ученицима омогућио да, на сличан начин како су се откривале идеје кроз историју геометрије, дођу до геометријског сазнања у настави. Историјски преглед пратимо од најстаријих геометријских тврђења, раста геометријског знања у раном периоду, преко идеја Еуклида и његових следбеника, Хилбертових основа геометрије, па све до идеје хиперболичке геометрије. Пут који следимо у почетној настави геометрије јесте пут од модела и слика, преко геометријског простора, његових објеката и поимања њихових међусобних односа, односно од очигледних слика са идејом да се на старијем узрасту досегну идеје апстракција у поступку доказивања. Пратимо пут који иде од опажајне геометрије до геометријских дедукција, кроз форму историјско-искуствене равни детета, ослањајући се на нивое кроз које пролази школска геометрија:

1) интуитивни,

2) геометрија у духу Талеса и Питагоре – предеуклидска геометрија и

3) еуклидска геометрија (Глејзер, 1991; Marjanović, 2007).

Геометрија почетне наставе стога представља припрему за предеуклидску геометрију.

Разматрали смо филозофске идеје великог класика Поенкареа које се односе на човеково искуство и заснивање геометрије, као и однос геометријског и физичког простора (Poincaré, 1905; Ђокић, 2007). Простор формиран помоћу наших чула само је слика геометријског простора, слика подвргнута врсти перспективе, а представљање објеката у њему могуће је тако што се они подвргавају законитостима перспектива. *Не представљају* се спољашња тела у геометријском простору, већ се о њима *расуђује* као да су она смештена у геометријски простор. Важно питање у овом делу рада односи се на *просторно резоновање (расуђивање)*. Указује се на опасност да корен дубоког неразумевања простора може да буде неусаглашеност између познавања геометријског простора и интуитивног поимања простора (Романо, 2009а).

Дидактичко-методичке основе

У оквиру овог дела рада бавили смо се улогом *дечјег просторног поимања* у почетној настави геометрије, расветљавајући основне тешкоће са којима се учитељи и ученици суочавају (Berhelot and Salin, 1998) и *развојем просторног мишљења деце и апстракцијама* (Yakimanskaya, 1991). Разматран је однос између процеса поучавања и развоја просторног мишљења код деце. Резултати показују да поучавање може да помогне и унапреди ментални развој само тамо где се ментална активност директно подражава, мењајући је и водећи у изабраном смеру.

Образовни систем, као велики систем, инертан је, и као такав тешко промењив. Мера неуређености једног система изражава се ентропијом, а у образовном систему она је присутна. Уџбеник је средство које може битно да утиче на промену таквог стања. Велику пажњу посветили смо разматрању теоријских концепција уџбеника, као и неким домаћим и међународним студијама које су се бавиле уџбеником, и то у два смера: 1) како уџбеник утиче на побољшање учења и поучавања и 2) како даје методолошке смернице при обликовању математичких програма. Посебно смо разматрали стање у математичким курикулумима Финске, затим Сингапура, Хонгконга, Енглеске, Холандије и Аустралије (Martio, 2009; Clarke, Goos and Morony, 2007 – према: Anderson, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Препознат је њихов заједнички елемент – учење путем решавања проблема – а вештина ученика која се развија док учи путем решавања проблема сматра се важном, укључујући процесе анализирања, интерпретације, резоновања, предвиђања, евалуације и рефлексије, стога је овај елемент и анализиран.

Истраживање смо даље усмерили на то какво знање очекујемо да ученици покажу учећи из савремено обликованог основношколског уџбеника, с обзиром на његову епистемолошку и логичку природу. У основи систематизације и класификације захтева или нивоа знања коришћена је Блумова таксономија (Bloom, 1956 – према: Krathwohl, 2001). Проблем смо даље продубили питањем учења путем решавања проблема, и то у више различитих окружења (контекста) (Pepin, 2008; Zech, 1998), што нас је довело до анализе уџбеника (Ђокић, 2008), а затим и до истраживања којим нивоом знања ученици владају са аспекта заступљености у задацима:

1. чињеница и информација, и то:
   - 1.а. препознавања и репродукције знања до
   - 1.б. разумевања и
2. примене наученог, и то у:
   - 2.а. математичком и
     - 2.б.1. семиреалном и
     - 2.б.2. чисто реалном контексту (прави проблемски задаци).

Иста класификација нам је послужила при тестирању знања ученика (за нивое постигнућа).

Мотивацију за учење математике, спољашњу и унутрашњу, прихватамо као значајне компоненте у достизању циља *учења* и *обучавања с разумевањем*, што је идеја коју пратимо по Р. Скемпу (Skemp, 1986). Озбиљно је питање како код већине ученика развити интересовање за геометрију и постићи бољи успех из ове области математике. Најважнији од њих, према Глејзеру, јесте промена водећих циљева наставе геометрије у школи (Глейзер, 1991). Какви год да се циљеви декларишу у наставном програму, Глејзер истиче да школски уџбеник и традиција у настави доводе до представе да је основни циљ наставе геометрије, па и почетне наставе, развијање логичког мишљења код ученика. Тај циљ се претвара у задатак недостижан на раном степену образовања. Зато смо се определили да истражимо како учење путем (поновног) откривања, које одговара природи процеса учења, као и природи науке (није просто преношење и усвајање готових знања, већ активно учешће ученика у изграђивању знања заснованих на решавању проблема), развија интересовање за учење геометријских садржаја.

Следеће важно питање рада јесте изабрани *наставни приступ* у почетној настави геометрије, заснован на реалном окружењу и Фројденталовој дидактичкој феноменологији и концепцији математичког образовања. Иначе, постоје следећи приступи математичком образовању (представљени у Табели 1):

1. механицистички (или ’традиционални’) – карактеристично је меморисање процедура и ниједан облик математизације;
2. емпиријски – карактеристична је употреба материјала и искуства из реалног живота, присуство хоризонталне математизације; ученици нису подстакнути да прошире ситуацију ради доласка до формула или модела, тј. остају без њих и тиме не долазе до математичког знања;
3. структуралистички (’нови математички приступ’) – нема готово ништа заједничко са ученичким животом, присуство вертикалне математизације и
4. реалистични – реалне ситуације узимају се као полазна тачка поучавања и учења математике где су присутне и хоризонтална и вертикална математизација (Freudenthal, 1991; Treffers, 1991; Romano, 2009b).

У последњем типу, на коме се заснива и реалистично математичко образовање (РМО), реалне ситуације се узимају као полазна тачка за поучавање и учење математике и хоризонталне математизације, при чему ученик препознаје математички аспект при решавању контекстуалних проблема, открива правилности и релације и формира математички појам вертикалном математизацијом, насупрот механицистичког приступа који је усмерен на увежбавање процедура.

Табела 1. Четири приступа математичком образовању према Фројденталу.

Тип приступа	Хоризонтална математизација	Вертикална математизација
Механицистички	–	–
Емпиријски	+	–
Структура-листички	–	+
Реалистични	+	+

Теорија математичког образовања РМО је теорија у којој је процес учења заснован на идеји математике као вођеног процеса (поновног) открића математичких идеја ради разумевања поступка математизације (Gravemeijer, 1994; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2001). У основи лежи идеја препознавања проблема (модел задатка) у реалним ситуацијама и путеви њиховог решавања. На пример, до појма променљиве ученици долазе бавећи се читањем података о висини чланова породице и на овај начин спонтано долазе до потребе увођења обједињујућег (апстрактног) математичког појма. Ова теорија заснована је на Фројденталовој интерпретацији математике, са реалистичним приступом математичком образовању.

У РМО полазимо од реалних ситуација. Реалне ситуације представљају стварне, свакодневне ситуације. Поштујући принцип очигледности у почетној настави математике, полази се од једноставних реалних ситуација и иде се до сложених ситуација, блиских дечјем сагледавању света, тј. ситуација искуствено могућих у учениковом окружењу, укључујући и оно што је деци замисливо или блиско (свет маште). *Мате-*

матизација је један од кључних појмова у РМО. Реч је о врсти организованог процеса учења у којој се елементи реалног контекста мењају у математичке објекте и релације. Овде се у ширем смислу може користити термин објекат, односно математички објекат. Реч је о апстрактном објекту који математика проучава. На пример, у контексту апстрактне алгебре математички објекат је алгебарска структура као што је група, прстен итд. Или, на пример, дискретна математика проучава природне, целе и рационалне бројеве, дискретне (коначне или највише пребројиве) скупове, релације и функције дефинисане на њима. Другим речима, дискретна математика се бави (дискретним) објектима, њиховим својствима и односима. Од значаја за наш рад су хоризонтална и вертикална математизација (поред појмовне, прогресивне и примењене). У хоризонталној присутан је прелазак из реалне ситуације у свет математичких објеката (појмова, симбола итд.) преко математичког апарата, који ученицима омогућава решавање проблема. Вертикална подразумева кретање унутар света математичких објеката (појмова, симбола итд.) и реорганизацију математичких знања утврђивањем веза између математичких појмова и поступака. Стога, решавање проблема у реалној ситуацији изводи се математизацијом нематематичке ситуације моделовањем, и то: а) формирањем математичког модела у односу на одговарајућу реалну ситуацију, б) решавањем математичког проблема који смо изградили и в) решење математичког проблема које одговара математичком моделу сада враћамо у реалну ситуацију (Stillman, 2007; English and Watters, 2004). Том приликом изводи се математичко закључивање, које ученике стимулише да даље препознају и користе релевантну математичку апаратуру при решавању проблема у реалној ситуацији, да успостављају математичке схеме, да развијају моделе при формирању математичких појмова, при чему се инсистира на сложеној смисленој концептуализацији учења и успостављању веза између посматраних објеката и догађаја у реалној ситуацији, с једне стране, и математичких појмова и процедура које објашњавају односе између тих објеката и догађаја, с друге стране.

Да ли постоји разлика између принципа очигледности у традиционалној настави и основних принципа у РМО? Традиционална настава математике у млађим разредима основне школе заснована је на интуицији као облику непосредног сазнања. Тако учитељ најчешће почиње наставу проблемским задацима, чија су решења визуелно очигледна. На пример, од ученика се може тражити да преброје слике у албуму и да израчунају колико је укупно слика ако неке слике додамо у албум. Реалан контекст у РМО разликује се од традиционалне наставе својом комплексношћу (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Milinković, 2012). Тако би требало да изабрани контекст буде богат и да створи услове за учење новог: повезивање међу појмовима/поступцима/процедурама и трансфер наученог. Изабрани контекстуални проблеми имају улогу извора математичких појмова. Зато се и каже да је реалистичан контекст двојаке улоге: прво – он обезбеђује учење (поновним) откривањем математичких идеја и друго – представља места примене знања решавањем проблема.

Имајући на уму опредељење за реално окружење као наставни приступ, његове опште карактеристике утемељене су у теорији реалистичног математичког образовања. *Основни принципи* РМО теорије су: 1) три Ван Хилова нивоа разумевања геометрије, 2) Фројденталова дидактичка феноменологија и 3) Треферсова прогресивна математизација. Они уобличавају *принципе учења и поучавања* у РМО као пет основних карактеристика, и то:

1. феноменолошко истраживање или употреба контекста,
2. употреба модела и/или премоштавање вертикалних инструмената,

3. ученички рад и изграђивање математичких појмова (ученички рад и конструкција математичког знања),
4. интерактивни карактер процеса наставе и
5. међусобно прожимање више поступака учења и/или тема (наставних јединица) (Romano, 2009б).

Што се тиче треће карактеристике, често се у психолошкој литератури наилази на термин *конструкт знања ученика*. Према конструктивистима, конструисање знања представља учениково бављење сопственим мисаоним процесима у виду откривања најбољих стратегија за решавање проблема на које се наилази, док сâмо откривање знања и истраживање суштине захтева значајно више времена у процесу сазнавања. Овде се мисли на откривање суштинских својстава предмета сазнавања, а знања о суштинским својствима јављају се као елемент повезивања (конструисања) знања код ученика (Антонијевић, 2006).

Методолошки оквир истраживања

Увод у истраживање

Истраживање је усмерено на откривање пута који води ученике до појмова са значењем *од*, са једне стране, визуелних представа *до*, са друге стране, просторног резоновања, наглашавајући повезаност визуелног и вербалног процеса као значајних у ученичком раду и изграђивању математичких појмова и суптилном уобличавању резоновања. На тој основи следимо идеје изграђивања и елаборирања постојеће интуиције о простору, развијајући безусловно и геометријску интуицију. Додајући овоме и конструктивистички поглед, у истраживању смо се бавили изграђивањем геометријских појмова и геометријског мишљења у реалном окружењу у коме се учи. Испитивали смо развој ученичких знања, као и како учитељи ово користе за учење и како се одвија тај процес.

Методологија истраживања

Предмет истраживања је експериментално испитивање и проучавање ефеката наставног приступа у почетној настави геометрије, утемељеног у теорији реалистичног математичког образовања, подржан пропратним иновативним уџбеником. Циљ истраживања је испитивање како реално окружење у геометријским садржајима четвртог разреда почетне наставе математике утиче на: 1) постигнућа ученика (когнитивни аспект укључује ученичка *постигнућа* и *резоновање*) и 2) мотивацију (афективни аспект укључује ученичку *мотивацију* и *активацију*). На основу циља извели смо одговарајуће *задатке*.

Код експерименталне групе је, као *независна варијабла*, уведено реално окружење (наставни приступ подржан одговарајућим уџбеником). *Зависна варијабла* је успех ученика изражен кроз разлику постигнућа на тестовима знања (претест и ретест), исказану по завршетку обраде уџбеничке теме „Квадар и коцка".

У експерименталном истраживању пошли смо од *опште хипотезе* да реално окружење као наставни приступ и пропратни иновативни модел уџбеника почетне наставе математике позитивно утичу на постигнућа и мотивацију ученика четвртог разреда. *Помоћне хипотезе* су:

1) Тест геометријских способности мери геометријске способности ученика четвртог разреда;

2) Скор на ретесту знања ученика зависи од скора на тесту геометријских способности. Очекујемо да реално окружење као наставни приступ више погодује ученицима који имају боље геометријске способности;

3) Ученик који има већи скор на тесту геометријских способности више и напредује кроз експериментални програм;

4) Веза између ретеста и величине напретка кроз експериментални програм биће јака;

5) Увођење реалног окружења и пропратног уџбеника позитивно ће утицати на постигнућа ученика;

6) Наставни приступ реално окружење даће значајно бољи просек знања (у односу на наставни приступ који је традиционалан). Ученици Е-групе биће успешнији од ученика К-групе и у задацима чињеница, као и у задацима у којима се траже виши нивои знања – примене.

7) Примена одабраног приступа створиће већу мотивисаност ученика за учење геометријских садржаја у почетној настави математике.

Од истраживачких техника користили смо тестирање (за утврђивање геометријских способности ученика и постигнућа ученика) и посматрање. Будући да нисмо располагали погодним тестовима знања којим бисмо мерили постигнуће ученика четвртог разреда у теми „Квадар и коцка", самостално смо приступили изради адекватних мерних инструмената, чије су метријске карактеристике проверене.

Узорак је имао карактер пригодног узорка. Истраживање смо извели у сарадњи са учитељима и школом која реализују наставу математике у четвртом разреду по традиционалном наставном приступу и уџбенику. Истраживањем су била обухваћена сва одељења четвртог разреда изабране школе.

Снимак стања изведен је пилот-тестовима. За потребе главног теста геометријских способности индивидуално је тестирано сто четрдесет осам ученика четвртог разреда ОШ „Милан Ђ. Милићевић" из Београда, школе која је учествовала у експерименталном програму. Задржане су постојеће структуре одељења (седамдесет три ученика у Е-групи и седамдесет пет ученика у К-групи; по три одељења четвртог разреда из исте школе и три учитеља која су радила по експерименталном програму). Након изведеног тестирања геометријских способности и претеста, шест ученика је било искључено у наредним фазама истраживања за Е-групу (N=67). На основу резултата на тесту геометријских способности и тесту знања за уједначавање група (претест) отпочео је двонедељни експериментални програм. У оквиру ретеста испитаници су тестирани тестом који је представљао паралелну форму оној која је коришћена на претесту.

Организација и извођење истраживања

Експерименталну наставу приказали смо кроз *структуру и садржај експерименталних часова.* Детаљно смо описали свих седам *геометријских активности* из експерименталног програма позивајући се на четири важне теореме из оквира еуклидске геометрије које се тичу мерења површи (Lučić, 1997), које су нам обезбедиле основу за идеју учења путем поновног открића у садржајима експерименталног програма.

У осмишљавању часова, структурално и садржајно, у основи се руководимо филозофским разматрањем великог класика А. Поенкареа и његовом идејом човековог искуства и заснивања геометрије (Poincaré, 1905; Ђокић, 2007). Да бисмо формирали идеју простора, служимо се експериментима као приликама које нам омогућавају да досегнемо ту идеју. На тој основи развија се и способност просторног поимања. Бројни истраживачи виде просторну способност и визуелну имагинацију као битне за математичко (геометријско) мишљење (Clements and Battista, 1992). Отуда се и крећемо у правцу развоја просторне способности и визуелне имагинације помоћу геометријских активности и задатака у уџбенику математике. Свесни да је реч о дугорочном процесу формирања навике дечјег ума да геометријски (математички) мисли и математизира окружујућу реалност, упустили смо се у истраживање. У овом смислу, резултати истраживања теоријског оквира Бартолинија и Боера помогли су нам да сагледамо наставу геометрије тако да она укључује културна и когнитивна питања учења геометрије у контексту (Bartolini and Boero, 1998). Мислимо да би требало да истраживање и развој који произиђу дају смернице програму почетне наставе геометрије (па и шире математике).

Један од кључних појмова којим смо се бавили јесте појам *учења путем (поновног) открића* (Freudenthal, 1991; Мићић, 2005; Cai, 2003), при чему се откриће прихвата као „сазнање уз које се може 'придружити' нека од карактеристика правих открића" (Мићић, 2005: 15). Посебно је наглашена употреба манипулативног материјала и подстицање на манипулативно, посебно у уџбеницима математике, односно манипулативног материјала као покретача при изграђивању геометријског знања (Clements and Battista, 1992; Мићић, 2005; Милинковић и Мићић, 2008; Романо, 2009a).

Наведимо геометријске активности са експерименталних часова:

1. *Умотавање кутије (облика квадра) потребним папиром* – почетна проблемска ситуација којом је започета тема „Квадар и коцка" и која је за циљ имала да ученике мотивише за учење, а служила је као модел задатак коме се повремено враћало;
2. *Прављење правилног паралелепипеда откривањем његових особина* – ученици добијају задатак да прављењем квадра (правилног паралелепипеда) 'откривају' његова својства помоћу дидактичког материјала;
3. *Рачунање површине сложене фигуре, увођење појма мрежа тела* – припрема за појам мреже квадра (коцке) која се остварује кроз математизацију нематематичке ситуације 'шивење столњака'; полази се од реалне ситуације која је створила потребу за математичком интерпретацијом помоћу дидактичког материјала;
4. *Појмови мрежа квадра (коцке)* – употребљава се дидактички материјал којем смо се више пута враћали док је трајао експеримент;
5. *Цртање мреже квадра (коцке)* – за цртање мреже квадра (коцке) уводимо неколико секвенци које воде ученике ка самосталности (значај секвенцирања изричит је у реалистичном математичком образовању);
6. *Прављење тела облика квадра, подстицање на истраживање* – пре симболичког записа и уопштавања уводи се активност која ученике подстиче да размишљају о мрежи квадра (коцке) ради примене наученог у виду истраживачког задатка;
7. *Израчунавање површине квадра (коцке), формулско извођење* – подсећање ученика на почетни проблемски задатак из теме – проблемску ситуацију паковања кутије; активност математичког моделовања која се разликује од уобичајених проблемских ситуација на које ученици наилазе у настави где се не примењују стандардне процедуре решавања или се следе прецизно дефинисани кораци акција (решење, тј. пут доласка до решења не интерпретира се на један и само један начин, односно процес интерпретације се богати); враћамо се на проблемску ситуацију размотавања мреже квадра.

У сврху истраживања припремили смо *тест геометријских способности* за: 1) уједначавање група у експерименталном програму и 2) проверу интеракције експерименталног програма и групе. *Тестирање знања* ученика изведено је у сврху поређења постигнућа ученика по нивоима знања, структурисаних задацима типа 1 и 2, односно 1.а. и 1.б., те 2.а., 2.б.1. и 2.б.2. Њима смо утврдили оствареност циља одабраног наставног приступа.

Техника посматрања нам је омогућила да изнесемо кратка запажања са одржаних часова.

Анализа и интерпретација резултата истраживања

Издвојили смо кључне *резултате* до којих смо дошли. Тест геометријских способности састојао се од четири суптеста (и исто толико варијабли). Факторска анализа је сугерисала да се четири суптеста могу посматрати као тест који испитује једну геометријску способност (добијен је податак које варијабле се групишу у који фактор, па смо логичком анализом дошли до способности која би могла да стоји у основи издвојеног фактора, имајући у виду задатке које су коришћени на тесту). Испитали смо и корелације између теста геометријских способности и тестова знања (претест и ретест). Изнели смо резултате о постојању корелација и јачинама веза између варијабли. Ево најзначајнијих резултата.

У Табели 2 за Е-групу налазимо појединачне корелације између варијабли (Пирсонов коефицијент линеарне корелације) и да ли је она значајна или није (и на ком нивоу). Издвојмо оне корелације чија је јачина веза и величина заједничке варијансе од значаја за проблем којим смо се бавили и које показују статистичку значајност (на нивоу 0,01 или 0,05). Тако, за Е-групу веза између ретеста и величине напретка кроз експериментални програм је јака и позитивна (r=0,74, статистички значајна на нивоу 0,01). Што је већи скор на ретесту, то је и већа разлика у скору између ретеста и претеста, тј. примећен је напредак у експерименталном програму. За Е-групу веза између ретеста и теста геометријских способности је средње јака и позитивна (r=0,46, статистички значајна на нивоу 0,01). Што ученик има већи скор на тесту геометријских способности, више и напредује кроз експериментални

Табела 2. Корелације између теста геометријских способности и напредовања на тестовима знања (претест и ретест) за експерименталну групу.

		PRE_SUMA	RET_SUMA	IQ_TOTAL	TEST_RAZ
PRE_SUMA	Пирсонов коефицијент	1	,44(**)	,25(*)	-,28(*)
	Ниво значајности	.	,00	,05	,03
	Број ученика	66	62	66	62
RET_SUMA	Пирсонов коефицијент	,44(**)	1	,46(**)	,74(**)
	Ниво значајности	,00	.	,00	,00
	Број ученика	62	68	68	62
IQ_TOTAL	Пирсонов коефицијент	,25(*)	,46(**)	1	,31(*)
	Ниво значајности	,05	,00	.	,01
	Број ученика	66	68	73	62
TEST_RAZ	Пирсонов коефицијент	-,28(*)	,74(**)	,31(*)	1
	Ниво значајности	,03	,00	,01	.
	Број ученика	62	62	62	62

Легенда. PRE_SUMA – укупан скор на претесту, RET_SUMA – укупан скор на ретесту, IQ_TOTAL – укупан скор на тесту геометријских способности, TEST_RAZ – разлика између скора на претесту и ретесту (указује на величину напретка);

** Корелација значајна на нивоу 0,01; * Корелација значајна на нивоу 0,05.

Табела 3. Дескриптивни статистици за две групе на два теста за укупно постигнуће ученика.

	Група	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Минимум	Максимум	Број ученика
PRE_SUMA	E	0,37	0,13	,09	,74	67
RET_SUMA	E	0,43	0,19	,09	,88	67
PRE_SUMA	K	0,38	0,15	,12	,82	75
RET_SUMA	K	0,28	0,15	,02	,74	75

Легенда. Е – експериментална груа, К – контролна група, PRE_SUMA – укупан скор на претесту, RET_SUMA – укупан скор на ретесту.

програм. Стога, реално окружење као наставни приступ више погодује ученицима који имају боље геометријске способности (но ова је веза средње јака).

Поредећи Е-групу и К-групу, с обзиром на укупно постигнуће на два теста, дошли смо до следећих резултата. Добијен је очекивани раст средње вредности постигнућа ученика Е-групе.

Ова разлика указује да постоји ефекат наставног приступа реално окружење на постигнућа ученика из геометрије, чиме је потврђена општа хипотеза.

Анализом варијансе за поновљена мерења утврдили смо да ли постоје значајне разлике између Е-групе и К-групе на претесту и ретесту. Накнадним поређењима желели смо да обавимо цео низ поређења (прво смо рачунали укупан F показатељ, који указује има ли значајних разлика између група у пројекту; ако је он значајан, што указује да постоји разлика између група, обавили смо и додатне тестове за идентификацију тих разлика). У Табели 3 дати су дескриптиви за Е-групу и К-групу на претесту и ретесту за укупно постигнуће ученика. Табелом 4 приказани су резултати *анализе варијансе за поновљена мерења* (ANOVA), која је показала да постоји интеракција између фактора претест-ретест и група када посматрамо укупно постигнуће на целом тесту ($F(1,123)=36,42$, $p<0,05$). Разлика између претеста и ретеста Е-групу и К-групе статистички је значајна.

Статистички се, дакле, потврдило дејство независне варијабле *реално окружење* на зависну варијаблу *постигнуће ученика*. Е-група значајно је напредовала, док су ученици из К-групе постигли слабији резултат на ретесту у односу на претест.

Табела 4. Значајност разлика између две групе на претесту и ретесту за укупно постигнуће ученика.

	Збир квадрата одступања резултата од њихове средње вредности	Број степени слободе	Количник суме квадрата и степена слободе	F	Значајност разлика
Пресек	31,93	1	31,93	940,19	0,00
GRUPA	0,49	1	0,49	14,52	0,00
Грешка	4,18	123	0,03		
PRE_RET	0,02	1	0,02	1,26	0,26
PRE_RET*GRUPA	0,46	1	0,46	36,42	0,00
Грешка	1,57	123	0,01		

Табела 5. Значајност разлика између аритметичких средина група.

	Група	PRE_RET	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	Е	PRE_SUMA		0,01	1,00	0,00
{2}	Е	RET_SUMA	0,01		0,07	0,00
{3}	К	PRE_SUMA	1,00	0,07		0,00
{4}	К	RET_SUMA	0,00	0,00	0,00	

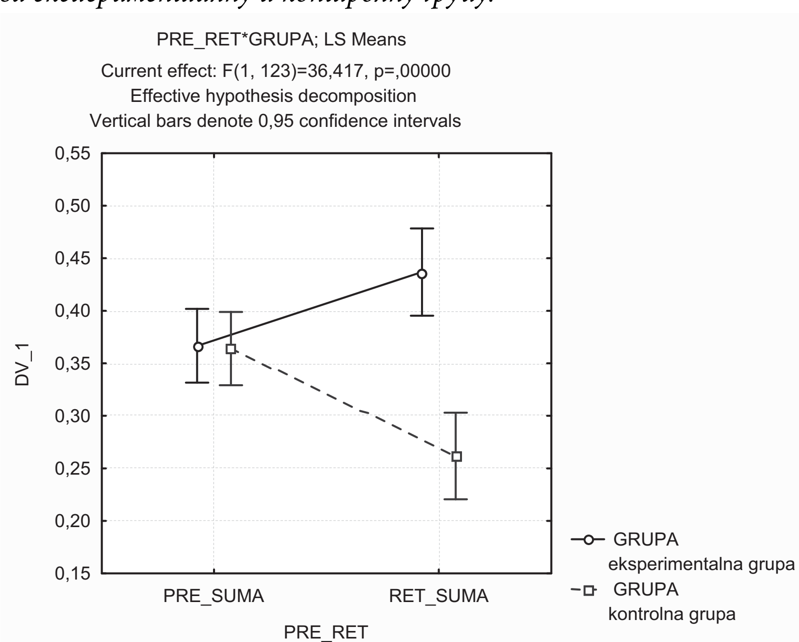
Легенда. Е – експериментална груа, К – контролна група, PRE_SUMA – укупан скор на претесту, RET_SUMA – укупан скор на ретесту.

Дат је и Графикон 1 из исте анализе на основу ког видимо какав је ефекат остварио експериментални програм. Видимо да је Е-група значајно напредовала, док су ученици из К-групе нижег постигнућа на ретесту у односу на претест. Како је F вредност статистички значајна, то значи да најмање једна од разлика између аритметичких средина које су оствариле Е-група и К-група ученика на претесу и ретесту мора бити статистички значајна. То је утврђено анализом варијансе и приказано је Табелом 5. Од укупно шест могућих разлика између аритметичких средина група, четири су значајне, и то на нивоу 0,05; на овом нивоу одбацујемо нулту хипотезу, тј. са сигурношћу од 95% можемо да тврдимо да међу разликама аритметичких средина мора бар једна бити значајна. Значајне су следеће разлике између аритметичких средина: Е-групе претест и Е-групе ретест (0,01), К-групе ретест и Е-групе претест (0,00), К-групе ретест и Е-групе ретест (0,00), К-групе ретест и К-групе претест (0,00).

Затим смо пратили ефекте за све задатке типа 1 заједно (1.а. и 1.б.) и све задатке типа 2 заједно (2.а., 2.б.1. и 2.б.2.), а затим и по издвојеним питањима – типовима задатака 1.а., 1.б., 2.а., 2.б.1. и 2.б.2.

Сумирајмо резултате који су од значаја за изведено експериментално истраживање. Ученици Е-групе успешнији су у задацима чињеница од ученика К-групе, али су остали на истом нивоу знања у задацима примене, док су ученици К-групе показали значајно лошије резултате и тиме делимично потврдили једну од постављених помоћних хипотеза. Остало је нејасно и непокривено – и као такво може да се сматра предметом будућих истраживања – зашто су ученици К-групе значајно лошији на ретесту за тип задатка 1 (када се резултати ученика упросече за тип задатка чињенице и информације – препознавање и репродукција знања и разумевање). Ученици Е-групе у задацима примене знања имају значајно боље резултате у математичком контексту, али не и у реалном. Али, запажањима са часова јасно је уочена израженија мотивисаност ученика за учење геометријских

Графикон 1 . Ефекат експерименталног програма – приказ просечних вредности постигнућа ученика на претесту и ретесту за експерименталну и контролну групу.



садржаја при одабраном наставном приступу и пропратном иновативном уџбенику, чиме је потврђена једна од помоћних хипотеза.

Када говоримо о бенефитима примењеног наставног приступа, могли бисмо да кажемо да ученици имају боља постигнућа у неким аспектима у којима смо добили разлике, али не само да имају боља постигнућа већ су ученици више мотивисани за учење. Претпоставка је да би овакав програм у неком дугорочнијем приступу показао још боље ефекте будући да се учење постепено дешава као последица активног ангажовања ученика, структурисаног активностима које помажу развој геометријског мишљења, од неформалних до више формалних идеја при геометријском резоновању.

Закључна разматрања

Представили смо концепт иновативног модела уџбеника *као подршку наставном приступу реално окружење* и на основу интерпретираних резултата дошли до одређених закључака.

Иновативни модел уџбеника видимо као једну практичну имплементацију која подржава конструктивистички приступ настави у реалном окружењу (Милинковић, Ђокић и Дејић, 2008; Milinković i Đokić, 2009). Заступамо гледиште да су основни циљеви почетне наставе математике, поред математичке писмености, стварање стања упитаности, тежња ка стварању истраживачког духа ученика, као и осећаја за успостављање веза формалне математике, са једне стране, са појавама из реалног окружења, са друге.

Одговарајућим структурисањем уџбеничких целина може се постићи ефекат активирања ученичких потенцијала за упознавање математичких појмова и решавање проблема (Милинковић, Ђокић и Дејић, 2008; Гусев, 2003). Постигнутом диференцијацијом у уџбенику развија се мишљење ученика, подстиче се развој математичких способности ученика и помаже ученицима да достигну више нивое знања и уобличе математичко резоновање. Предложили смо структурисање наставних целина кроз:

1. *Активирање пажње (мотивацију) и мотивациони задатак* – на почетку сваког поглавља уџбеника најављује се шта ће ученици научити и свако поглавље у уџбенику почиње проблемском ситуацијом, тзв. мотивационим задатком; до решавања овог задатака долази се тек на крају поглавља када ученици у довољној мери прошире своје знање;
2. *Проблематизацију појма или поступка* – ученик се усмерава ка откривању неке појаве (појма или поступка) или се моделује ток размишљања у проблемским ситуацијама; овај приступ заснован је на упознавању математичких садржаја кроз анализирање и решавање изабраних модел задатака (проблемских ситуација) које су основа сазнања;
3. *Увежбавање и меморисање кроз решавање задатака* – разноврсност садржаја са којим су у вези нова знања како би се омогућила флексибилнија употреба знања у новим контекстима; задаци који су намењени увежбавању и меморисању су разноврсни по сложености, од једноставних до сложених у захтевима, разноврсни су по избору репрезентације и форми;
4. *Диференцијацијацију* – 1) издваја се садржај који је обавезан за све (јасно назначени делови) и 2) велики број разноврсних задатака за чије решавање није потребно учење додатног градива; структура диференцираних задатака омогућава да се помогне ученицима да достигну више нивое знања;
5. *Проширивање и обогаћивање знања, истраживачке задатке и занимљиве информације* – што утиче на развој нових

интелектуалних и културних интересовања и потреба тако што се иницирају неке активности које су и изван уџбеника и школске ситуације; тако су уведене рубрике: *И ово је математика*, *Учимо са интернета*, *Истраживачки задатак*, *Да ли знаш?*, *Из историје математике*;

6. *Самоевалуацију* – на крају сваког поглавља сумира се научено и пружа прилика за самоевалуацију ученика; омогућава ученику проверу решења задатака и повремено резимира битне ствари из текста уџбеника и повезује градиво у систем знања.

Експлицитно и систематско вођење разговора сматрамо важним аспектом при стварању културне и друштвене конструкције знања која обезбеђују активну примену знања. У учионици експеримент подстиче рану геометризацију симулирајући окружујући свет путем модела и замишљених слика. За развој важног когнитивног процеса интуиције, хипотетичког резоновања и рада са више различитих хипотеза и стратегија, ученици бивају систематски укључени у ’реалистичне активности’. Отуда је оправдано унети измене у постојећи математички програм, а у учионичкој пракси неговати наставни приступ реално окружење, као један од више могућих, подржан пропратним уџбеником. На посматраним часовима уочили смо и нагласили потребу оспособљавања учитеља за систематско вођење разговора и учионички дискурс у настави геометрије.

Потврђена је општа хипотеза, као и већина помоћних хипотеза, из чега се може закључити да примена реалног окружења као наставног приступа може и треба да нађе своје место у наставној пракси, али и неким новим истраживањима о развоју уџбеника као важног носиоца образовних промена.

Отворили смо и питања за даља истраживања у настави геометрије, која је све више усмерена на развој способности просторног резоновања и унапређивање искустава при мерењу дужине, површине и запремине, посебно у почетној настави. Постављамо оправдано питање зашто у нашем програму математике нема захтева за развој способности просторног резоновања. Отворили смо нова питања о истраживањима ефеката (новог) програма почетне наставе геометрије и *простора као модела (основношколске наставе) у уџбеницима целог циклуса почетне наставе, подржавајући наставни приступ реално окружење и следећи велике идеје Поенкареа кроз просторно резоновање у геометријски структурисаним активностима.*

Литература

- Антонијевић, Р. (2006). *Систем знања у настави*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
- Глейзер, Г. Д. (1991). Каким быть школьному курсу геометрии. *Математика в школе*, 4-с, 68–71.
- Гусев, В. А. (2003). Дифференциация обучения математике в школе. У: *Психолого-педагогичнеские основьи математике* (184–290). Москва: Вербум-М, Академия.
- Ђокић, О. (2007). *Појам линије у почетној настави геометрије*. Јовановић, А. (ур.). Београд: Учитељски факултет.
- Ђокић, О. (2008). Задаци оријентисани на примену знања – од (новог) наставног програма до (нових) уџбеника почетне наставе математике. *Иновације у основношколском образовању – од постојећег ка могућем* (192–207). Београд: Учитељски факултет.
- Милинковић, Ј. и Мићић, В. (2008). Улога дидактичких средстава у основношколској геометрији. *Методички аспекти наставе математике* (33–37). Јагодина: Педагошки факултет.
- Милинковић, Ј., Ђокић, О. и Дејић, М. (2008). Модел уџбеника као основе активног учења у настави математике. *Иновације у настави*, *21* (1), 70–79.

- Мићић, В. (2005). Учење откривањем – можда нови приступ. *Настава математике*, L (4), 13–21.
- Романо, Д. А. (2009a). О геометријском мишљењу. *Настава математике*, LIV (2–3), 1–11. http://elib.mi.sanu.ac.yu/files/journals/nm/228/nm50402.pdf. (sajt posećen 1. 7. 2008).
- Anderson, J. (2009). *Mathematics Curriculum Development and the Role of Problem Solving*. ASCA Conference National Biennial Conference Curriculum: A National Conversation, 2–4 October, Canberra, Australia.
- Bartolini, B. M. and Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in context. In: Mammana, C. and Villani, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* – An ICMI Study (52–62). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Berthelot, R. and Salin, H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In: Mammana, C. and Villani, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* – An ICMI Study (71–78). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In: Lester, F. (ed.). *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (241–254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved 1/5/2013 from: http://tlsilveus.com/Portfolio/Documents/EDCI327_ProblemSolving.pdf.
- Clements, D. H. and Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (420–464). New York: Macmillan Publishing Copmany.
- Diezmann, C. M., Watters, J. and English, L. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. *Proceedings 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2* (PME) (289–296). Norwick, UK.
- English, L. and Watters, J. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16 (3), 59–80.
- Fauzan, A. (2002). *Applying Realistic Mathematics Education (RME) in Teaching Geometry in Indonesian primary schools*. Thesis University of Twente. Press: PrintPartners Ipskamp – Enschede. Retrieved 1/10/2010 from: http://doc.utwente.nl/58707/1/thesis_Fauzan.pdf.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer Academic, Netherlands.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press, Freudenthal Institute.
- Gutierrez, A., Kuzniak, A. and Straesser, R. (2005). Research on Geometrical Thinking. *Research on Geometrical Thinking* (725–726). Sant Feliu de Guixols.
- Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In: Mammana, C. and Villani, V. (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* – An ICMI Study (29-36). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Krathwohl, D. R. (2001). A Revision of Bloom's taxonomy: an overview. *Theory into Learning*, 41(4), 212–218.
- Lučić, Z. (1997). Euklidska geometrija – merenje površi. U: *Euklidska i hiperbolička geometrija* (235–240). Beograd: Matematički fakultet.
- Marjanović, M. M. (2007). Didactical Analysis of Primary Geometric Concepts II. *The Teaching of Mathematics*, X (1), 11–36.
- Martio, O. (2009). Long Term Effects In Learning Mathematics In Finland – Curriculum Changes And Calculators. *The Teaching Of Mathematics*, XII (2), 51–56.
- Milinković, J. (2012). Realistic Mathematics Education from theory to practice. In: Conference Proceedings *1st International Conference on Learning and Teaching Mathematics* (43–49). KUPM, Maribor.

- Milinković, J. i Đokić, O. (2009). Udžbenik matematike za aktivnog učenika. U: *Škola po mjeri* (483–498). X međunarodni znanstveni skup „Dani Mate Demarina“, Pula.
- Pepin, B. (2008). Mathematical tasks in textbooks: Developing an analytical tool based on 'connectivity'. *The changing nature and roles of mathematics textbooks: form, use, access*. Mexico. Retrieved 11/11/2011 from: http://dg.icme11.org/tsg/show/18.
- Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. Preface by J. Larmor, London and Newcastle-on-Cyne, The Walter Scott Publishing Co., Ltd New York.
- Prenger, J. (2005). *Construction of Meaning in the Mathematics Classroom – Research Proposal*. Dissertations of the University of Groningen, Netherlands. Retrieved 1/10/2010 from: http://www.rug.nl/research/clcg/research/projects/prenger?lang=en.
- Romano, D. A. (2009b). Teorije matematičkog obrazovanja, prvi dio: RME – teorija. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, I (1), 23–35.
- Skemp, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.
- Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Retrieved 1/6/2013 from: http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/reason.html.
- Stillman, G. (2007). *Mathematical Modelling in the Real World*. PowerPoint presentation, Teachers' Training Faculty, Belgrade, Serbia, October 31st .
- Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980–1990. In: Streefland, L. (ed.). *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Common Sense in Mathematics Education* (1–40). Taipei.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.
- Yakimanskaya, I. S. (1991). *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren – Survey of Applied Soviet Research in School Mathematical Education – Soviet Studies in Mathematics Education*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

Summary

The aim of this paper is to examine in which way teaching approach Realistic Mathematics Education in initial geometry teaching influences students' achievements (according to the levels of knowledge) and reasoning, as well as students' motivation for learning. We have used experimental method here. We have studied geometry bases and didactical-methodological bases of geometry as well as theoretical foundation of the teaching approach Realistic Mathematics Education using the method of theoretical analysis. Innovative textbook, which is supporting Realistic Mathematics Education approach, models and actions we have tried to make teaching more efficient and improve levels of students' achievements. Introducing Realistic Mathematics Education and additional innovative mathematics textbook positively influences achievements and students motivation of the 4th grade in geometry and this approves effect of the chosen teaching approach. We have also presented innovative mathematics textbook as practical implication which supports constructivists' approach to teaching in Realistic Mathematics Education and we pointed at key results and their methodological implications on mathematics teaching, obtained by experimental research. Our opinion is that the programme in a long lasting approach would show greater effect and we posed questions for further research in teaching geometry, which is more directed to development of research in measuring length, area and volume, especially in initial teaching.

Key words: *Realistic Mathematics Education, geometry, special reasoning, innovative textbook, knowledge levels, motivation for learning.*