UDC 371.3::51
Иновације у настави, XXVIII, 2015/1, стр. 69–81 37.016:51-028.31

Рад примљен: 5. 3. 2015.
Рад прихваћен: 9. 4. 2015.

Дијана Р. Обрадовић, др Маријана Ж. Зељић[1]
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Оригинални научни рад

Методе и стратегије решавања текстуалних задатака у почетној настави математике[2]

***Резиме**: Способност решавања текстуалних проблема ефикасан је показатељ математичких знања и способности ученика. Истраживања процеса визуелизације и улоге менталних слика у математичком резоновању показују важност изабране репрезентације у процесу решавања проблема. Начин моделовања при решавању текстуалних задатака може да допринесе (или спречи) развијању релационог разумевања поступака њиховог решавања. Циљ овог истраживања је анализа метода и стратегија које ученици користе на крају првог циклуса школовања при решавању текстуалних проблема. Посебан акценат је на истраживању начина представљања информација које ученици користе у процесу решавања задатака. У истраживању су коришћене дескриптивна метода и техника тестирања. Резултати истраживања показују да ученици при решавању текстуалних задатака користе искључиво симболичке репрезентације проблема, што доводи до тога да задатке који се не могу решити директним методама ученици не могу решити. Иако бројна истраживања показују значај коришћења различитих модела при решавању задатака, наши резултати показују да ученици, уместо да проблем преведу на мање апстрактан ниво, преводе га у апстрактну форму, која је изнад њихове могућности разумевања. Једно од решења за превазилажење наведеног проблема јесте дефинисање оперативних задатака и садржаја који се односе на моделовање и различите стратегије решавања текстуалних задатака у Наставном програму за почетну наставу.*

***Кључне речи:** текстуални задаци, моделовање, методе, стратегије решавања задатака.*

1 marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs

2 Истраживање је део мастер рада *Методе и стратегије решавања текстуалних задатака у почетној настави математике*, одбраћеног на Учитељском факултету Универзитета у Београду (ментор др Маријана Зељић).

Увод

У развоју цивилизације полуписменим културама је било потребно да знају одређене аритметичке технике да би функционисале у оквиру своје привреде, а најранији начин преношења ових информација је био усменим путем. Током времена усмено преношење је развило овај сет упутстава у приче и загонетке, и тако је створена традиција текстуалних проблема. Текстуални задаци се могу сматрати лингвистичким описом проблемске ситуације, где се поставља питање, а одговор се добија применом математичких операција на бројчане или друге податке доступне у описаном проблему (Novotná and Rogers, 2003). Типично, текстуални задаци се јављају у облику кратког текста у којем се описују најважнији аспекти неке ситуације, а где су неке величине или релације јасно дате, док друге нису, и где се од оног који решава задатак тражи да пружи одговор на одређено питање коришћењем датих величина у тексту и математичких релација између тих величина. Слично, текстуални задатак Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2000) одређују као вербални опис проблемске ситуације у којој постоје једно или више питања, а одговори се могу добити применом математичких операција на нумеричким подацима, доступним у опису проблема. Решавање текстуалних задатака је важна активност наставе математике (Gortcheva, 2014), јер у том процесу ученици стичу способности које им омогућавају да организују и примењују стечена знања. Проучавање различитих аспеката процеса решавања текстуалних проблема може нам помоћи да уочимо и разумемо проблеме које ученици имају у том процесу, као и да сагледамо ниво разумевања поступака решавања задатака од стране ученика.

Теоријске основе

У литератури наилазимо на различит број и редослед издвојених фаза у решавању математичких задатака. Разумевање процеса решавања задатака је врло комплексно питање. Новотна и Роџерс (Novotná and Rogers, 2003) тврде да ученици најчешће при решавању задатака развијају инструментално разумевање, тј. памте алгоритме и примењују их у задацима. Међутим, ако алгоритам не одговара, ученици не могу наставити да решавају задатак, осим ако не поседују релационо разумевање, које им помаже да изграде нови поступак решавања уочавањем различитих веза између података и захтева у задатку, активирајући знања која поседују. Инструментално разумевање подразумева коришћење меморисаних правила без разумевања њихове суштине, док релационо разумевање значи „знати и шта треба да се уради и зашто". Аутори разликују још и интуитивно разумевање (способност да се реши проблем без претходне анализе проблема) и формално разумевање (способност размишљања и изражавања идеја симболичким језиком). Интуитивним разумевањем ученици некада могу одмах да „виде" решење, без свести о икаквом унутрашњем процесу размишљања. Формално разумевање означава способност да се повежу математички симболи и обележавање са релевантним математичким идејама и да се ове идеје комбинују у ланац логичког закључивања (Novotná and Rogers, 2003).

Традиционално, решавање текстуалних задатака се посматра као примена оперативних правила која подразумевају уочавање везе између структуре проблемске ситуације и структуре симболичног математичког израза (English, 2009). Велики допринос у превазилажењу проблема разумевања процеса решавања задатака шездесетих година прошлог века даје Поља (Polya, 1966), који уводи појам хеуристике и стратегије у процесу решавању задатака. У том процесу идентификује четири фазе:

1. Разумевање задатка: задатак се мора разумети, тј. морају се јасно разумети услови и питања: шта је задато, а шта се тражи;
2. Прављење плана: морамо размотрити каква је веза између непознатих и датих података како бисмо дошли до идеје решења и стварања плана;
3. Извршење плана;
4. Провера решења и дискусија о њему.

Савремени аутори даље развијају и модификују наведене фазе решавања задатака. Тако Новотна (Novotná, 1997) разликује следеће фазе решавања проблема:

- Етапа шифровања (схватање задатка);
- Етапа трансформисања (пребацивање у математички језик);
- Етапа рачунања (математичко решавање проблема);
- Етапа складиштења (пребацивање математичког резултата назад у текст).

Основна претпоставка „лингвистичких модела" јесте став да је за успешно решавање текстуалних задатака пресудно разумевање текста тог задатка. Док неки лингвистички модели претпостављају директан скок с текста задатка на математички модел решења, други модели (на пример, Reusser, 1989) наглашавају важност разумевања ситуационог контекста задатка. Аутор наглашава да је за успешно решавање текстуалних математичких задатака потребна интеракција лингвистичког знања, познавање ситуација могућих у реалном свету и математичког знања. Модел се састоји од пет фаза: разумевање текста, разумевање ситуације у реалном окружењу, математизација, рачунање и тумачење одговора.

Међутим, у процесу решавања проблема некада није могуће директно решавање задатка. За разлику од лингвистичких модела, у којима се потенцира разумевање текста задатка, велики број савремених аутора као кључну претпоставку у процесу решавања задатака види моделовање ситуације описане у тексту. Даршафел и сарадници (Verschaffel et al., 2000) описују процес решавања текстуалних задатака као случај математичког моделовања, који укључује сложен процес са више фаза. Ученици прво морају разумети ситуацију описану у задатку (изградња ситуационог модела). На основу овог модела гради се математички модел. Ученици затим примењују математичке операције описане у математичком моделу ради налажења решења које се тумачи и евалуирала у контексту текста задатка. Коначно, ученици формулишу одговор. Новотна и Саразн (Novotná and Sarrazy, 2005) истражују начине на које ученици моделују текстуалне задатке када покушавају да схвате структуру проблема и у описивању тог процеса користе следећу терминологију: *кодирање проблема* – трансформација текстуалног проблема у одговарајући систем – *референтни језик*, у којем се подаци, услови и непознате могу бележити у јасније организованој и економичнијој форми. Резултат овог процеса зове се *модел* (модели које је понудио наставник или модели који су резултат ученичког сагледавања проблема). Референтни језик садржи основне симболе и правила за креирање модела.

Новотна (Novotná, 1997) наводи да су функције моделовања следеће:

- поновно представљање које води стварању адекватне менталне слике;
- организација већ постојећих знања;
- тумачење које олакшава разумевање проблема;
- трансформација коришћеног језика у начин представљања ближи ученицима.

Када добију текстуални проблем, ученици треба да га моделују, а то може укључити цртеже, дијаграме или табеле, неформално обележавање или употребу формалнијих математичких обележја. По мишљењу многих аутора, и *модел* и *репрезентација* су термини који се могу користити у студијама наставе и учења математике (Gravemeijer et al., 2003; Gilbert et al., 2000). Ако постоји разлика између ова два појма, могло би се рећи да је репрезентација изгледа општији, свеобухватни појам из когнитивне психологије, док је појам *модел* више специфични израз који се користи у математичком образовању и природним наукама (Terwel et al., 2009). У том светлу, Тервел и сарадници дефинишу модел као „одређени структурални облик репрезентације" (Terwel et al., 2009: 27).

Употреба визуелних представа у процесу решавања проблема можда неће увек бити ефикасна и у неким ситуацијама може чак да доведе до погрешних решења (Gagatsis and Elia, 2004; Presmeg, 1992). Најважнији разлика између „декоративне" и „информативне" илустрације (Gagatsis and Elia, 2004) јесте та да бескорисна (декоративна) илустрација садржи небитне визуелне информације, док корисна (информативна) представља суштинске информације из текстуалних проблема. Слично, Пресмиџ (Presmeg, 1992) истиче да најважнију улогу у решавању математичких проблема имају схеме, тј. илустрације у којима су конкретни детаљи занемарени, а јасно су приказани математички односи. Апстрактне репрезентације, у односу на оне конкретне, „моћније" су зато што могу да превазиђу контекст у резоновању и решавању проблема (Kaminski et al., 2008). Недавне студије (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008) показују да су апстрактне репрезентације ефикасније од конкретних приликом решавања сложених проблема. Правилно одабране репрезентације детерминишу процес истраживања математичких проблема и извор су значења математичких појмова и односа између њих.

Новотна (Novotná, 1997*)* сматра да модел треба да испуњава следеће захтеве:

- да буде једноставан и јасан;
- активира мисаону активност ученика;
- визуализује апстрактне информације из задатка и омогући ученицима креативну манипулацију пиктографским елементима;
- нуди лаку оријентацију у задатку уз помоћ добро организованих композиција фигура и наглашава типичне особине и односе;
- буде довољно флексибилан да омогући лаку модификацију на различите проблеме у групи сродних проблема.

Избор одговарајућег начина представљања може помоћи да се јасно сагледа структура проблема током процеса решавања. Способност ученика да се служе различитим представама као математичким средством и да их активирају када се сусретну са одређеном проблемском ситуацијом сматра се пресудном у поступцима решавања проблема. Другим речима, када покушавају да реше проблем, пожељно је да ученици знају како да се одлуче за одређени систем представљања и да га добро искористе. Да би постигли овакву способност, ученици треба да имају прилику да проверавају успешност различитих представа и да изједначе њихова значења: „без обзира на специфичан предвиђени циљ који се тиче коришћења представа, најважнија сврха је та да су корисне ученику да научи да их што успешније користи" (Dufour-Janvier et al., 1987: 121). Када су ученици активно укључени у изградњу и вредновање репрезентација, они развијају математичка знања која им омогућавају да генеришу нове процесе решавања проблема (Terwel et al., 2009; Di Sessa, 2002).

Из наведених ставова можемо закључити да изабрани модел или репрезентација детерминише стратегије и методе у решавању проблема. Тако Дејић разликује директне и индиректне методе решавања текстуалних задатака. Под директним методама решавања текстуалних задатака аутор (Dejić i Egerić, 2007) подразумева поступке решавања у којима се проблем не замењује моделом. Индиректне методе (решавање задатака коришћењем модела), које се користе у почетној настави математике, а које су одређене моделом који се користи, јесу: метода дужи, метода таблица, метода правоугаоника, метода Веновог дијаграма, метода фокусног дијаграма (Dejić i Egerić, 2007).

Леш и сарадници (Lesh et al., 1987) направили су разлику између алгебарског и аритметичког начина решавања проблема, истичући да алгебарско решавање захтева „најпре описивање а потом рачунање". Мејсон (Mason, 1996) износи сличан став, односно наводи да се тешкоће при решавању текстуалних задатака могу приписати разлици између аритметичког и алгебарског приступа решавању проблема. Аритметички проблеми могу бити решени директно, а алгебарски прво треба да се преведу и запишу формалним симболима, након чега могу бити решени. Резултати истраживања (Kieran, 1992) показују да су ученици склони да текстуални проблем сагледавају парцијално и решавају га у корацима. Киеран (Kieran, 2006) представља резултате који показују да ученици чешће користе аритметичке методе у решавању текстуалних проблема и показују потешкоће у постављању и коришћењу једначина при решавању таквих проблема (алгебарски метод). Зељић (Zeljić, 2014) истиче да, ради повезивања аритметичког и алгебарског приступа проблемима, ученике треба усмеравати да приликом решавања текстуалних проблема сагледају општу структуру проблема без обзира на то да ли се задатак може решити директно или индиректно.

Методолошки оквир истраживања

- **Предмет истраживања** – предмет нашег истраживања јесу методе и стратегије које користе ученици на крају првог циклуса школовања при решавању текстуалних проблема. Посебан акценат стављен је на истраживање начина представљања информација које ученици користе у процесу решавања задатака, као и резоновања и даљег поступка решавања, а које је условљено изабраном репрезентацијом проблема.
- **Циљ истраживања** – у нашем случају циљ истраживања је двојак: 1) анализирање и класификовање начина на које ученици моделују текстуалне задатке када покушавају да схвате структуру описаног проблема; 2) испитивање утицаја изабраног модела на методе и поступке решавања и успешност у решавању задатака.
- **Задаци истраживања** – из постављеног циља формулисани су и постављени следећи задаци истраживања:
  1. Испитати успешност решавања задатака у зависности од изабраног начина представљања информација;
  2. Идентификовати поступке и методе које ученици користе при решавању текстуалних задатака, а који су условљени изабраним начином представљања проблемске ситуације.
- **Хипотезе у истраживању** – ученици који користе графичке моделе при решавању задатака су успешнији у поступцима решавања задатака.
  – Ученици користе различите методе решавања задатака: метод дужи, метод правоугаоника, метод израчунавања, метод једначина.
- **Метод и узорак истраживања** – у истраживању су коришћене *дескриптивна метода* и *техника тестирања*. За потребе истраживања осмишљен је тест знања који чини пет текстуалних задатака постављених у реалном математичком контексту (Прилог 1). Узорак има карактер пригодног узорка, а чине

га три одељења (педесет и пет ученика) четвртог разреда једне основне школе у Београду.

Анализа и интерпретација резултата истраживања

Први истраживачки задатак био је усмерен на испитивање успешности ученика у решавању задатака у зависности од изабраног начина представљања информација у задатку. Одговор на овај истраживачки задатак било је прилично тешко дати, с обзиром на то да су ученици користили искључиво симболичке начине представљања. Многе студије су указале на значај начина представљања информација у задатку, јер изабрани модели помажу разумевање структуре проблема и односа у задатку (Dufour-Janvier et al., 1987; Novotná and Sarrazy, 2005; Terwelatal., 2009 и др.). Без обзира на контекст задатка (реални или математички), нико од ученика није користио графичке, визуелне начине представљања проблема. У свим задацима ученици су информације представљали симболичким језиком (бројеви или слова). Да ученици не користе геометријске моделе, показују и решења петог задатка, који се може решити само коришћењем модела правоугаоника (или уколико би задатак решавали ученици старијих разреда – системом једначина са две непознате). Задатак нико није урадио, изузев једног ученика, који је задатак решио методом покушаја. Резултати истраживања показују да је (на одабраном узорку) референтни језик (термин који користи Новотна) искључиво симболички. С обзиром на то да нико од ученика није користио визуелизацију у поступку решавања проблема, можемо претпоставити да они нису имали искуства у поступцима креирања и коришћења модела у процесу решавања проблема. У том смислу анализираћемо успешност ученика у зависности од тога да ли су користили алгебарске (слова) или аритметичке репрезентације (конкретни бројеви). Успешност ученика на сваком појединачном задатку приказана је у Табели 1.

Табела 1. Успешност ученика на појединачним задацима (фреквенција).

	1. (*f*)	2. (*f*)	3. (*f*)	4. (*f*)	5. (*f*)
Тачно решење	25	38	39	9	1
Нетачно решење	24	9	13	19	5
Задатак није рађен	6	8	3	27	49
Укупно	55	55	55	55	55

f – фреквенција одговора (број ученика)

Други истраживачки задатак односио се на идентификацију поступка и метода које ученици користе при решавању текстуалних задатака и уочавање њихове условљености у односу на изабрани модел (репрезентацију проблема). С обзиром на то да су ученици информације које су имали у задацима представљали само конкретним бројевима или алгебарским симболима, то је условило да су при решавању задатака користили следеће методе (Lesh et al., 1987; Mason, 1996, Novotná and Rogers, 2003; Kieran, 2006; Dejić i Egerić, 2007):

- интуитивно (пишући само резултат);
- метод покушаја и погрешака;
- метод директног израчунавања – аритметички: а) записивање сложеног израза који одговара структури проблема); б) методом израчунавања у корацима;
- метод једначина (алгебарски): а) једначина са једном непознатом; б) систем једначина са две непознате.

Начин и метод рада ученика анализираћемо навођењем конкретних примера.

Наш први задатак – *Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико ће динара добити свако од* *њих?* – ученици су успешно решили на три начина:

1. методом израчунавања (сложен израз који одговара структури проблема);
2. методом израчунавања у корацима;
3. методом једначина.

Навешћемо примере који објашњавају сваки од метода.

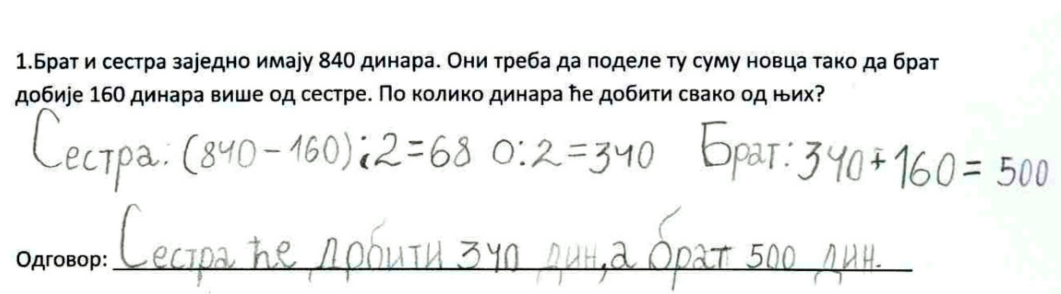
Већина ученика (деветнаест ученика) задатак је решила директно (без коришћења модела), пишући одмах одговарајући израз (Пример 1).

Наредни пример илуструје метод рачунања у којем ученици (четири ученика) до решења долазе у корацима (Пример 2).

Сматрамо да је значајно то што је већи број ученика задатак решио пишући сложени израз који одражава целокупну структуру проблема. Њих сматрамо посебно значајним јер оповргавају (на нашем узорку) став да су ученици склони да при решавању текстуалних проблема проблем сагледавају парцијално, тј. до решења долазе „у корацима“, не сагледавајући општу структуру проблема (Lesh et al., 1987; Mason, 1996). Сматрамо да, како истиче Зељић (Zeljić, 2014), ученике треба усмеравати да приликом решавања текстуалних проблема сагледају општу структуру проблема, без обзира на то да ли се задатак може решити директно или индиректно. Ученици треба да сагледају односе између датих и тражених величина и, приликом решавања задатака, формирају сложене изразе који ће одсликавати општу структуру проблема.

Мали број ученика (два ученика) до тачног решења дошао је применом методе једначина (Пример 3). Морамо приметити да ученици не користе мала писана слова за означавање не-

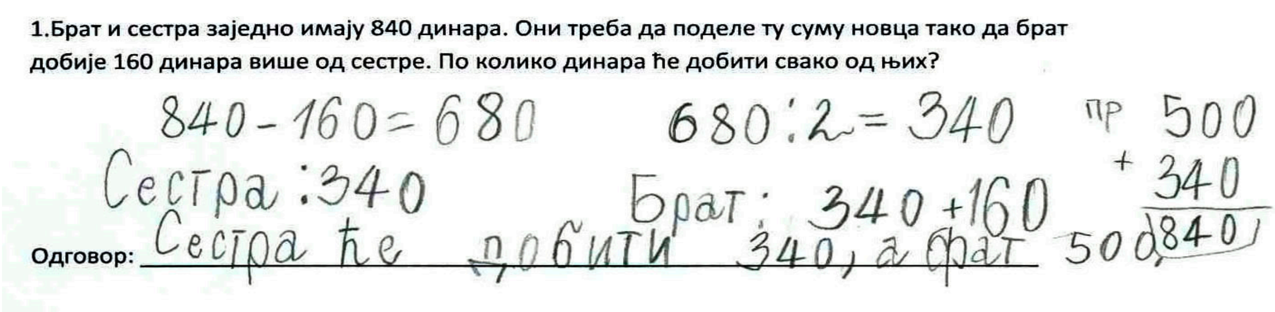
Пример 1. Решавање задатака методом израчунавања (записујући сложен израз који одговара структури проблема).


1.Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико динара ће добити свако од њих?

Сестра: (840 − 160) : 2 = 680 : 2 = 340 Брат: 340 + 160 = 500

Одговор: Сестра ће добити 340 дин, а брат 500 дин.

Пример 2. Решавање задатака методом израчунавања у корацима.


1.Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико динара ће добити свако од њих?

840 − 160 = 680 680 : 2 = 340 пр 500 + 340 = 840

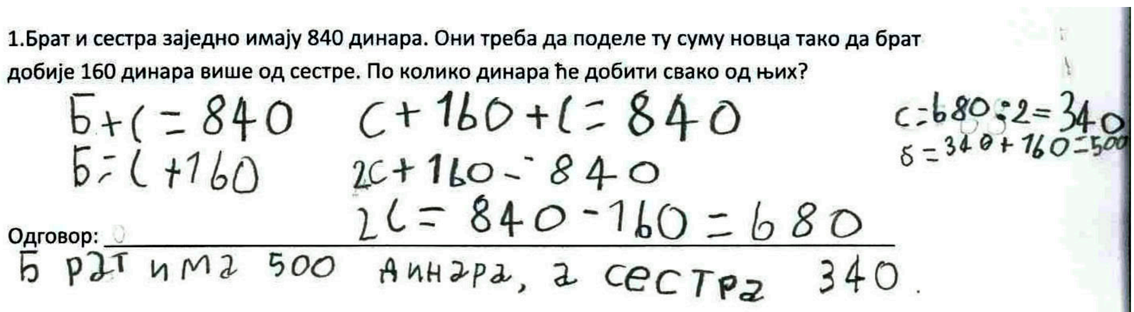
Сестра : 340 Брат : 340 + 160

Одговор: Сестра ће добити 340, а брат 500, познате, већ велика штампана слова која су почетна слова именица, што показује недостатак уопштавања и апстраховања у поступку решавања.

Да ученици не размишљају о поступку, већ су концентрисани на решење, показује и поступак представљен на Примеру 4. Решење задатка је тачно, иако се знак једнакости погрешно користи (користи се као ознака смера рачунања), па можемо рећи да поступак није тачан. Из овог (и сличних примера) закључујемо да су ученици концентрисани искључиво на резултат, док је поступак и начин представљања информација у другом плану, што потврђује резултате добијене у другим студијама (Lesh et al., 1987; Mason, 1996; Kieran, 2006).

Ученици који су нетачно решили задатак углавном су до погрешног решења долазили на следећи начин (Пример 5).

Пример 3. Решавање задатака методом једначина.


1.Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико динара ће добити свако од њих?

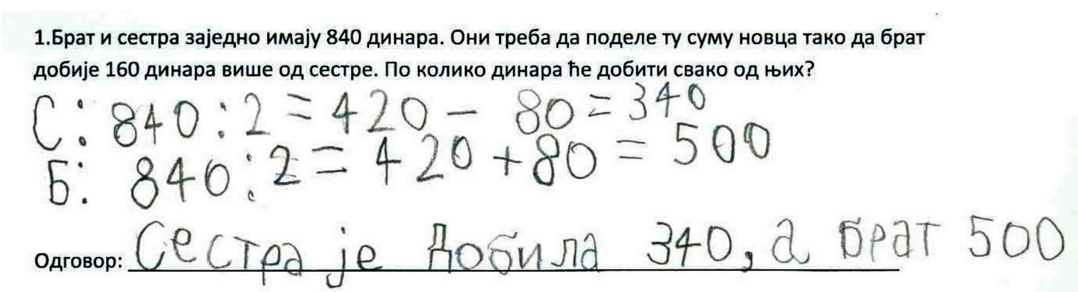
Б+С=840 С+160+С=840 с=680:2=340

Б=С+160 2С+160=840 б=340+160=500

2С=840−160=680

Одговор: Брат има 500 динара, а сестра 340.

Пример 4. Поступак који показује погрешну употребу знака једнакости.

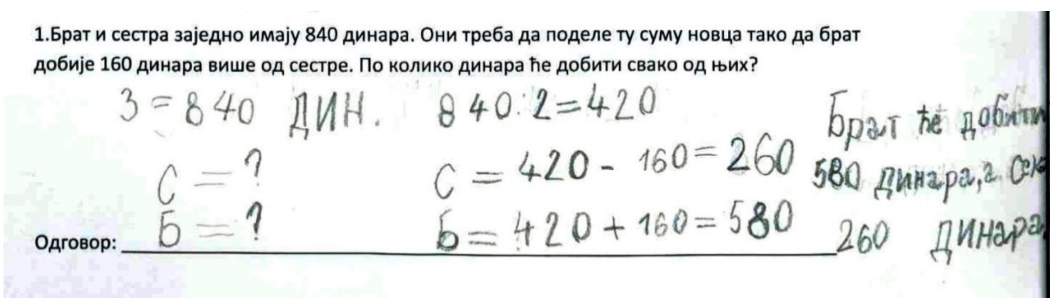

1.Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико динара ће добити свако од њих?

С: 840 : 2 = 420 − 80 = 340

Б: 840 : 2 = 420 + 80 = 500

Одговор: Сестра је добила 340, а брат 500

Пример 5. Нетачно решење условљено некоришћењем модела.


1.Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико динара ће добити свако од њих?

З = 840 дин. 840 : 2 = 420 Брат ће доби

С = ? С = 420 − 160 = 260 580 динара, а се

Б = ? Б = 420 + 160 = 580

Одговор: 260 динара

Сматрамо, као што су већ бројни аутори истакли (Polya, 1966; Novotná and Sarrazy, 2005; Terwel et al., 2009 и др.) да би употреба модела (конкретно модел дужи) за представљање информација довела до исправног резоновања и тачног уочавања односа.

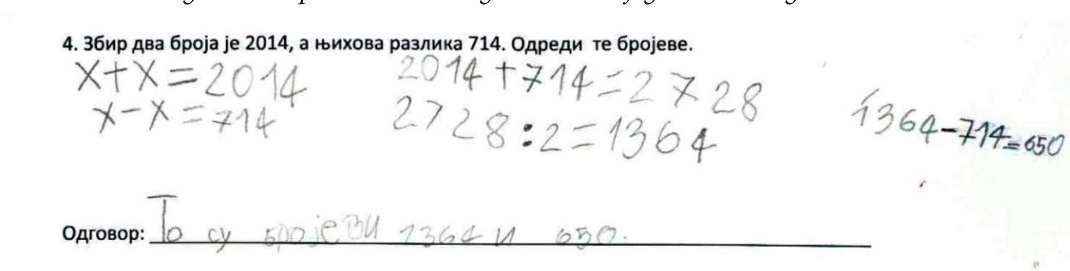
Да ученици без употребе различитих репрезентација и модела не могу увек разумети структуру задатка и поступак решавања, показаћемо примерима решења четвртог задатка. Један број ученика (шест ученика) задатак је решио методом једначина, тј. можемо рећи системом једначина са две непознате (Пример 6).

Ипак, не можемо тврдити да су ученици који су дали овакво решење развили формално разумевање, јер су у даљем поступку решавања користили конкретне бројеве, тј. почетну апстрактну репрезентацију заменили конкретнијом (потпунију слику о начину резоновања и логичком расуђивању било би могуће добити кроз интервју са учеником).

Са друге стране, у истом задатку присутна су решења која показују интуитивно разумевање проблема (Пример 7).

Ученици нису у стању да сагледају поступак решавања, већ само интуитивно „виде ре-

Пример 6. Решавање задатака применом методе система једначина са две непознате.


4. Збир два броја је 2014, а њихова разлика 714. Одреди те бројеве.

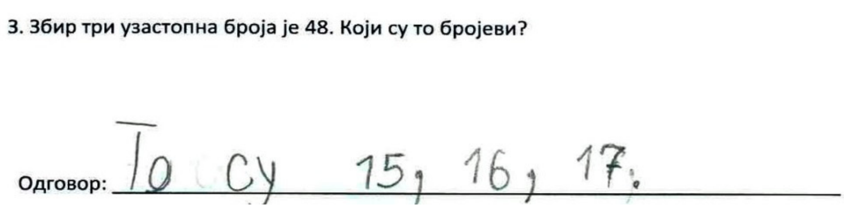
x+x=2014
x-x=714

2014+714=2728
2728:2=1364

1364-714=650

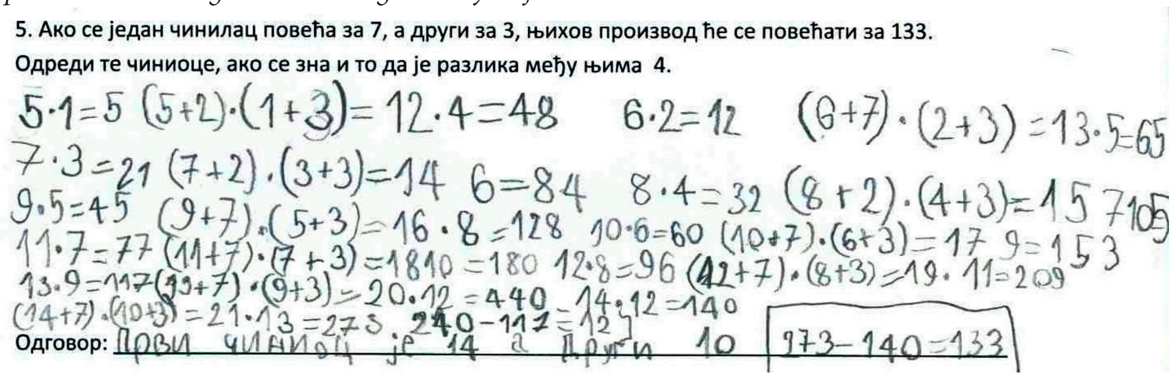
Одговор: То су бројеви 1364 и 650.

Пример 7. Пример задатка са интуитивним решењем.


3. Збир три узастопна броја је 48. Који су то бројеви?

Одговор: То су 15, 16, 17.

Пример 8. Решавање задатака методом покушаја.


5. Ако се један чинилац повећа за 7, а други за 3, њихов производ ће се повећати за 133.

Одреди те чиниоце, ако се зна и то да је разлика међу њима 4.

5·1=5 (5+2)·(1+3)=12·4=48 6·2=12 (6+7)·(2+3)=13·5=65
7·3=21 (7+2)·(3+3)=14 6=84 8·4=32 (8+2)·(4+3)=15 7105
9·5=45 (9+7)·(5+3)=16·8=128 10·6=60 (10+7)·(6+3)=17 9=153
11·7=77 (11+7)·(7+3)=1810=180 12·8=96 (12+7)·(8+3)=19·11=209
13·9=117 (13+7)·(9+3)=20·12=440 14·12=140
(14+7)·(10+3)=21·13=273 240-117=123

Одговор: Први чинилац је 14 а други 10 $\boxed{273-140=133}$

зултат“, што не представља адекватно разумевање процеса решавања (Novotná and Rogers, 2003).

У светлу оваквих резултата не изненађује нас то што је наш пети задатак – *Ако се један чинилац повећа за 7, а други за 3, њихов производ ће се повећати за 133. Одреди те чиниоце, ако се зна и то да је разлика међу њима 4* – решио само један ученик, и то методом покушаја (Пример 8).

Резултати истраживања показују да је овај задатак био најтежи за ученике. Тачно решење је пронашао један ученик, али је задатак радио методом покушаја, што значи да није потпуно разумео структуру проблема. Пет ученика је покушало да реши задатак, али безуспешно, док четрдесет и девет ученика није ни покушало да уради задатак. Ученик који је тачно решио задатак до тачног решења је дошао насумично множећи бројеве, тј. путем покушаја и погрешака, што не представља основу за уопштавање поступака рачунања. Наведени пример показује и да ученици, уколико не могу да реше задатак, радије покушавају да запишу и реше систем једначина са две непознате, неголи да визуелно представе односе у задатку. Овакав начин рачунања, и када би ученик могао да задатак уради до краја, није примерен ученицима у почетној настави математике. Такви поступци су формални и најчешће се разумеју само инструментално. Преурањено формално увођење неких појмова и поступака чије значење није адекватно изграђено постаје препрека у каснијем учењу (Zeljić, 2014).

Закључак

У овом раду смо желели да утврдимо које се методе и стратегије решавања текстуално задатих проблема користе ученици у почетној настави математике. Истраживање које смо спровели показало је следеће резултате:

- Текстуалне проблеме који су задати у реалном и математичком контексту сви ученици су представљали користећи апстрактније (симболичке) репрезентације проблема, док визуелне репрезентације (реалне слике, геометријске моделе, дијаграме и сл.) није користио ниједан ученик.
- При решавању текстуалних задатака који се могу решити на више начина ученици користе само следеће методе:
  - интуитивно (пишући само резултат);
  - метод покушаја и погрешака;
  - метод израчунавања (аритметички): а) пишући сложен израз који одговара структури проблема); б) методом израчунавања у корацима;
  - метод једначина (алгебарски): а) једначина са једном непознатом; б) систем једначина са две непознате.

Из резултата које смо добили уочавамо да је референтни језик (термин који користи Новотна), који се користи у процесу решавања проблема, у нашим школама симболички. Ученици нису оспособљени да односе представљене у текстуалним задацима моделују и представе на неки други начин. Иако истраживања показују значај коришћења различитих модела, ученици који су учествовали у нашем истраживању нису их примењивали. Ученици често интуитивно решавају задатак тако што наведу само решења (као што је случај са трећим задатком), што указује на то да задатак решавају без свести о икаквом унутрашњем процесу размишљања. Разлог оваквих резултата може бити то што учитељи не користе моделовање при решавању задатака и фокус стављају на решење задатка. Такав приступ води ка томе да ученици, када не могу да задатак реше директно, прескачу нивое апстракције, тј. покушавају да поставе и реше систем једначина са две непознате, уместо да покушају да проблем конкретизују и представе односе визуелно. Уместо да проблем преведу на мање апстрактан ниво, ученици га преводе у апстрактну форму, која је изнад њихове могућности разумевања. Овај закључак подржавају резултати нашег истраживања. Тако је за пети задатак само један ученик навео тачан резултат, а сви који су покушали да га реше записали су систем једначина са две непознате, али нису умели да га реше. Наш став је да рано померање ка формалнијим методама (систем једначина) може довести до неразумевања поступака и развијању инструменталног разумевања.

Можемо закључити да треба систематски радити на оспособљавању и мотивисању учитеља и наставника да и сами у раду користе различите моделе и стратегије при решавању задатака. Потврда овог става би се могла наћи у истраживању чији би предмет био идентификовање начина представљања информација (моделовања) при решавању текстуалних задатака које преферирају учитељи у свом раду. Као једно од решења видимо и укључивање модела и стратегија решавања текстуалних задатака као саставног дела Наставног плана и програма из математике, где би се они изучавали на редовним часовима са свим ученицима, а не само на додатној настави из математике и у раду са математички надареним ученицима. У том смислу, било би интересантно даље истраживање, са истим ученицима, а којима би претходно били понуђени други начини представљања и методе решавања задатака. Резултати таквог, лонгитудиналног, истраживања били би оцена изнетих закључака и предлога.

Литература

- Cai, J. (2004). Why do U.S. and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Exploring the impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 135–167.
- Dejić, M. i Egerić, M. (2007). *Metodika nastave matematike.* Beograd: Učiteljski fakultet.
- Di Sessa, A. A. (2002). Students' criteria for representational adequacy. In: Gravemeijer, K., Lehrer, R., Van Oers, B. and Verschaffel, L. (Eds.). *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (105–130). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. and Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In: Janvier, C. (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (109–122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *The International Journal on Mathematics Education*, *41*, (1–2), 161–181.
- Gagatsis, A. and Elia, I. (2004). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In: Johnsen-Hoines, M. and Berit-Fuglestad, A. (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (447–454). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Gilbert, J. K., Boulter, C. J. and Elmer, R. (2000). Positioning models in science education and in design and technology education. In: Gilbert, J. K. and Boulter, C. J. (Eds.). *Developing models in science education* (3–18). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gortcheva, I. G. (2014). Mathematical and cultural messages from the period between the two world wars: Elin Pelin's story problems. In: Lawrence, S. & Djokic, O. (Eds.). Special Issue of *Journal Teaching Innovations „History of Mathematics in Education and History of Mathematics Education – Mathematical Education Cul-*

tures", Vol. 27, No. 3, 94–104. Retrived from the World Wide Web March 21st 2015: http://www.uf.bg.ac.rs/wp-content/uploads/2015/01/INOVACIJE-3_14.pdf .

- Gravemeijer, K., Lehrer, R., Van Oers, B. and Verschaffel, L. (Eds.) (2003). *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (105–130). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. and Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, *320*, 454–455.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In: Gutiérrez, A. and Boero, P. (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (11–50). Rotterdam: Sense.
- Koedinger, K. R., Alibali, M. W. and Nathan, M. J. (2008). Trade-offs between grounded and abstracter presentations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science*, *32*, 366–397.
- Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In: Wirszup, I. and Streit, R. (Eds.). *Developments in school mathematics education aroun dthe world* (647–680). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mason. J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In: Bednarz, N., Kieran, C. and Lee, L. (Eds.). *Approach esto Algebra* (65–111). Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic Publishers.
- Novotná, J. (1997). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: Hejny, M. and Novotná, J. (Eds.). *Proceedings ERCME 97* (105–109). Praha: Prometheus.
- Novotná, J. and Rogers, L. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding. In: *Rogers, L.* and *Novotná, J.* (Eds.). *Analysis and Teaching. Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (79–96). Bologna: Pitagora Editrice.
- Novotná, J. and Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education: professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems. In: Drouhard, J. P (Ed.). *The Fourth Congress of the European Society in Mathematics Education* (696–705). Retrieved May 25, 2014. from: http: //www. cerme 4.crm.es.
- Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak.* Zagreb: Školska knjiga.
- Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 595–610.
- Reusser, K. (1989). *Textual and situational factors in solving mathematical word problems*. Bern: Universität Bern.
- Terwel, J., Van Oersa, B., Van Dijka, I. and Vanden Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation*, *15* (1), 25–44.
- Verschaffel, L., Greer, B. and De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
- Zeljić, M. (2014). *Metodički aspekti rane algebre.* Beograd: Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M. i Dabić, M. (2014). Iconic Represention as Student's Success Factor in Algebraic Generalisation. *Journal Plus Education, 1*, 173–184.

Summary

Ability for solving story problems is an efficient determinant of mathematical knowledge and students' abilities. Research of the process of visualization and the role of mental images in mathematical reasoning show the significance of the chosen representation in the process of solving problems. The way of modelling during solving story problems tasks can contribute to (or prevent) development of relating understanding of the procedures of their solving. The aim of this research is the analysis of methods and strategies, which students use in the end of the first cycle of education when solving story problems. Research of the ways in which students present information in the process of task solving is particularly stressed. Results of the research show that students, in the process of solving story problems use exclusively symbolic representations of problems and this leads to conclusion that tasks which cannot be solved by direct methods, cannot be solved by students at all. Even though numerous kinds of research point at the significance of using different models when solving story problems, our results show that students, instead of transmitting problems to the less abstract level, they transmit them to the abstract form and this is above their perceptive ability. One of the solutions for overcoming the stated problem is defining operational tasks and contents referring to modelling and different strategies of solving story problems in the curriculum for initial teaching.

***Key words**: story problems, modelling, methods, strategies of solving tasks.*

ПРИЛОГ

Прилог 1. Задаци коришћени у истраживању

1. *Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико ће динара добити* свако од њих?
2. *Чоколада и сок коштају 150 динара, а сок и две чоколаде коштају 220 динара. Колико кошта једна чоколада, а колико сок?*
3. *Збир три узастопна броја је 48. Који су то бројеви?*
4. *Збир два броја је 2014, а њихова разлика 714. Одреди те бројеве.*
5. *Ако се један чинилац повећа за 7, а други за 3, њихов производ ће се повећати за 133. Одреди те чиниоце, ако се зна и то да је разлика међу њима 4.*