Иновације у настави, XXX, 2017/4, стр. 49–61
doi: 10.5937/inovacije1704049Z

UDC 511.1(075.2)

Рад примљен: 14. 7. 2017.
Рад прихваћен: 30. 10. 2017.

Маријана Ж. Зељић[1],
Светлана М. Илић, Мила С. Јелић
Универзитет у Београду , Учитељски факултет

Оригинални научни рад

Ментална аритметика – стратегије одузимања

Резиме: *Ментална аритметика има важно место у настави и учењу математике. Конкретно, она развија вештине решавања проблема, пружа могућности за развијање способности процене у рачунању и доприноси дубљем разумевању појма броја и декадног система. Основне карактеристике менталне аритметике су следеће: 1) рачуна се бројевима, а не цифрама (без записивања парцијалних резултата); 2) стратешка флексибилност у смислу бирања стратегије у зависности од карактеристика бројева у задатку. Циљ ове студије је да се испита способност ученика да одузму два броја без папира и оловке (ментално), као и да се идентификују стратегије које ученици у том поступку користе. Посебно значајно питање које се поставља у раду јесте – да ли ученици флексибилно користе стратегије рачунања, то јест да ли избор стратегије зависи од структуре задатка. Узорак истраживања чини шездесет и шест ученика трећег разреда из две београдске основне школе. Коришћене су дескриптивна метода и техника интервјуисања. Наши резултати показују да ученици као доминантну стратегију приликом рачунања без папира и оловке користе алгоритам цифарског рачунања, што представља узрок грешака у рачунању. Даље, као важан резултат истраживања истичемо да ученици не поседују стратешку флексибилност приликом менталног одузимања, што може бити показатељ недовољног концептуалног разумевања структуре бројева и рачунских процедура. Резултати истраживања указују на потребу да се измене приступи аритметичким садржајима померањем фокуса са развијања вештина алгоритамског рачунања на развијање дубљег разумевања и коришћења различитих поступака рачунања.*

Кључне речи: *ментална аритметика, стратегије одузимања, стратешка флексибилност.*

[1] marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs

Увод

Као део светског покрета реформи основношколске математике осамдесетих година прошлог века истакнута је нова тема – ментална аритметика као значајна тема школске математике (Kilpatrick et al., 2001; Torbeyns & Verschaffel, 2013; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Verschaffel et al., 2007). Увођење систематског учења менталне аритметике у школски програм и данас је тенденција у многим земљама (Maclellan, 2001; Van de Walle, 2007). Према међународној литератури, ментални рачун има важно место у настави и учењу математике. Конкретно, он развија вештине решавања проблема, пружа могућности за прецизније процене у рачунању, доприноси разумевању појма броја (Threlfall, 2002) и декадног система (Carpenter et al., 1998; Fuson et al., 1997).

Аритметичке операције и алгоритми рачунања највећи су део наставног плана и програма основношколске математике широм света (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Verschaffel et al., 2007). Ови алгоритми састоје се од добро дефинисаних корака, а уз њихово стриктно и правилно провођење тачан одговор је очекиван. Типично, овај алгоритамски поступак врши се у ситуацији папир–оловка, иако је могуће да се и ментално изведе, све док је број цифара бројева коришћених у задатку релативно мали (Torbeyns & Verschaffel, 2013). Ментално рачунање је процес у којем нумерички рачун може бити изведен брзо и прецизно без помоћи спољашњих средстава (на пример, манипулативног материјала, оловке и папира, рачунаљке и тако даље) уз свесно коришћење неке стратегије рачунања (Maclellan, 2001). Менталне стратегије (Verschaffel et al., 2007) могу се дефинисати као „паметне“ методе рачунања засноване на разумевању основних карактеристика система бројева и аритметичких операција, као и добро развијеном осећају за бројеве. Менталне стратегије се у суштини разликују од алгоритма цифарског рачунања у следећем (Linsen et al., 2015): (1) рачуна се бројевима, а не цифрама; (2) не постоји само један исправан поступак рачунања; (3) бројеви се обично налазе у хоризонталном запису и (4) има мање писане нотације или се уопште не ослања на њу. Ментална аритметика искључује цифарско рачунање (у нашем образовном систему писмени поступак), рачуна се бројевима. То значи да разлику 78 – 23 рачунамо, на пример, као 78 – 20 = 58, 58 – 3 = 55, а не као 8 – 3 = 5, 7 – 2 = 5. Рачунање применом менталних стратегија може укључивати писане ознаке, на пример, када се записује један парцијални резултат или више њих али коришћење није доминантно (Linsen et al., 2015). Као доминантну карактеристику менталне аритметике Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2010) виде флексибилно прилагођавање структури проблема. На пример, разлику када је умањилац мали број, као у примеру 72 – 8, рачунамо директним одузимањем 8 од 72 (72 – 2 = 70 и 70 – 6 = 64), док вредност израза, када је разлика умањеника и умањиоца мала, рационално је рачунати допуњавањем умањиоца, односно стратегијом индиректног сабирања (72 – 66: 66 + 4 = 70 и 70 + 2 = 72, 4 + 2 = 6).

Стратегије менталног одузимања

Истраживања су показала (Selter et al., 2012) да деца имају уско схватање операције одузимања, а то доводи до тога да имају потешкоћа са рачунањем, а те тешкоће посебно су изражене приликом менталног рачунања. Ментални рачун укључује широк спектар стратегија, што показује велики број истраживања (Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012; Torbeyns et al., 2009b; Verschaffel et al., 2007).

Селтер и сарадници (Selter et al., 2012) наводе следеће стратегије менталног одузимања за двоцифрене бројеве: 1) стратегије декомпозиције: одузети десетице од десетица и јединице од јединица, сабрати/одузети те резултате: (83 – 79: 80 – 70 = 10, 3 – 9 = – 6, 10 – 6 = 4); 2) секвенционалне стратегије: одузети десетице умањиоца од умањеника, одузети јединице од претходног резултата (83 – 79: 83 – 70 = 13, 13 – 9 = 4); 3) стратегије компензације: а) одузети „округли“ број, компензовати (83 – 79, 83 – 80 = 3, 3 + 1 = 4) и б) балансирање: сабрати или одузети исти број од оба броја како би се поставио једноставнији проблем (83 – 79, 84 – 80 = 4).

Торбејнс и сарадници (Torbeyns et al., 2009b) такође су класификовали стратегије које ученици користе за ментално одузимање у домену 20–100: 1) директно одузимање (63 – 47: 63 – 40 = 23, 23 – 3 = 20, 20 – 4 = 16); 2) индиректно сабирање: допуњавање умањиоца до умањеника (62 – 58: 58 + 2 = 60, 60 + 2 = 62, 2 + 2 = 4); 3) индиректно одузимање: одузимати од умањеника док се не достигне умањилац (62 – 58 : 62 – 2 = 60, 60 – 2 = 58, 2 + 2 = 4. Прихватајући наведену класификацију у описивању менталних стратегија одузимања, Пелтенбург и сарадници (Peltenburg et al., 2012) додају четврту категорију, а то су 4) вишеструке операције: коришћење више операција при операцији одузимања (77 – 29: 77 – 30 = 47, 47 + 1 = 48 или 78 – 30 = 48).

Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2007) истраживали су и стратегије које ученици примењују при одузимању вишецифрених бројева и идентификовали су следеће стратегије: (а) стратегије разлагања (декомпозиције) укључују разлагање на декадне суме и њихово одузимање/сабирање (457 – 298: 400 – 200 = 200, 50 – 90 = – 40, 7 – 8 = –1, 200 – 40 – 1 = 159); (б) секвенционалне стратегије, које подразумевају одузимање редом почев од највеће декадне суме умањиоца (457 – 298: 457 – 200 = 257, 257 – 90 = 167, 167 – 8 = 159); (в) различите стратегије које укључују флексибилно прилагођавање бројевима у задатку. Пример различитих стратегија је стратегија компензације, која се користи када умањеник има јединице 1 или 2 или када су јединице умањиоца 8 или 9 (601 – 234 = (600 – 234) + 1 = 366 + 1 = 367 или 457 – 298 = 457 – (300 – 2) = 157 + 2 = 159). Слично, Фјусон и сарадници (Fuson et al., 1997) наводе следеће стратегије за одузимање двоцифрених и троцифрених бројева: 1) стратегије у којима један број остаје непромењен, а други број се раставља – те стратегије су сличне секвенционалним стратегијама; 2) комбинована метода (mixed methods) – комбинација секвенционалне и декомпозиционе методе (64 – 24, 60 – 20 → 40 + 4 → 44 – 6 → 38); 3) стратегије у којима се оба броја „мењају“, односно заокружују како би се одржала разлика, такве су стратегије компензације.

Уколико сумирамо претходна истраживања, видимо да се наведене класификације стратегија менталног рачуна одузимања донекле преклапају, с тим да аутори користе различите називе за исте стратегије. У литератури се најчешће издвајају стратегије декомпозиције, компензације, секвенционална стратегија и стратегија индиректног сабирања. Селтер и сарадници (Selter et al., 2012) стратегију где се најпре одузимају десетице умањиоца од умањеника, а потом и јединице од добијеног резултата називају секвенционалном стратегијом, док Торбејнс и сарадници (Torbeyns at al., 2009b) наведену стратегијом сматрају подврстом секвенционалне стратегије и називају је директно одузимање. Такође, Селтер и сарадници (Selter et al., 2012) стратегију при којој се одузима „округли“ број, а затим компензује, називају стратегијом компензације, док је Пелтенбург и сарадници (Peltenburg et al., 2012) називају стратегијом „вишеструких операција“.

Као доминантну карактеристику менталног рачуна видимо прилагођавање стратегија структури задатка. Стратешко понашање укључује препознавање циља, те избор средстава којима се тај циљ може остварити. Стратешка флексибилност у менталном рачунању односи се на степен у коме је начин решавања под утицајем околности (Star & Seifert, 2006). Торбејнс и сарадници (Torbeyns et al., 2009c) сматрају да се различите околности односе на карактеристике конкретног задатка, индивидуалне карактеристике ученика или на контекстуалне варијабле, као што је оно што се највише вреднује у друштвено-културном окружењу (учионици). Блете и сарадници (Blöte et al, 2001) наводе да ученик поседује флексибилност у менталном рачунању ако бира стратегије у зависности од карактеристика бројева у задатку. Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2009) сматрају да значај различитих врста стратешке флексибилности у оквиру менталног рачуна зависи од система вредности и погледа на математичко образовање. На пример, ако учитељ тражи да ученици раде једноставне задатке ефикасно и са мало труда, онда стратешка флексибилност не може бити развијена (Imbo & Vandierendonck, 2006).

Значај флексибилног менталног рачуна не огледа се само у користи за ученика у конкретном рачунању, већ зато што је почетак или показатељ развијања математичких способности и мишљења које превазилазе знање чињеница и процедурално знање (Threlfall, 2009). Блете и сарадници (Blöte et al., 2000) наводе да постоји много студија које показују да ученици са знањем стратегија не доносе увек рационалне одлуке при избору стратегије. То може бити повезано са метакогнитивним питањима, са питањем напора за избор стратегија, са мотивационим факторима. Ученици најчешће примењују стратегију коју виде као добро познати алгоритам и сигурнији су да ће успети (Baranes et al., 1989) или зато што верују да се од њих очекује да ураде баш то. Специфичан пример наводе Блете и сарадници (Blete i sar., 2000) – употреба стратегије компензације на примеру 84 – 29, где су ученици као одговарајућу стратегију навели компензацију (прво се одузме 30, 84 – 30), али је нису користили зато што нису сигурни да ли затим треба да додају или одузму 1. Таква несигурност произлази из неадекватног концептуалног знања о бројевима и неразумевања одузимања.

Избор стратегије зависи од више фактора (Peltenburg et al., 2012): карактеристика ученика, као и њихове опште математичке способности, узрасног нивоа, карактеристике наставе (да ли су ученици учили одређену процедуру), утицаја карактеристика задатка који укључује бројеве у задатку и контекста задатка (реални проблеми или голи контекст). Ради јаснијег разумевања стратегија одузимања ученицима треба давати контекстуалне проблеме. Неколико студија (Torbeyns et al., 2009a; Blöte et al., 2000) показује да голи контекст проблема тешко објашњава употребу индиректног сабирања, што се може објаснити присуством знака минус, који наглашава акцију „узимања“. Контекстуални задаци не садрже симбол операције и стога могу сугерисати различите стратегије одузимања, а ситуација описана у контексту проблема може подстаћи употребу одређене стратегије (Van den Heuvel Panhuizen, 2005).

Истраживања показују да постоји повезаност између дечјег разумевања појма броја и њихове способности у менталној аритметици, док је много мања или чак одсутна повезаност са способношћу писменог рачунања (Carpenter et al., 1998; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Verschaffel et al., 2007; Linsen et al., 2015). Бароди и Тиликејнен (Baroody & Tiilikainen, 2003) такође сматрају да је разумевање значења и смисла броја у корелацији са способношћу менталног рачуна, а избор стратегије доминантан је показатељ способности у менталној аритметици.

Методолошке основе истраживања

У истраживањима (Selter et al., 2012; Fuson et al., 1997; Cooper & Warren, 2011; Ilić, Zeljić, 2016; Ilić, 2016) приметно је да постоји разлика у степену разумевања сабирања и одузимања код ученика, то јест да су ученици успешнији у поступцима сабирања него одузимања. Разлози који се наводе у литератури су следећи (исто): код одузимања не важе асоцијативност и комутативност као код сабирања; активности у настави су такве да недовољно и на неадекватан начин наглашавају супротност и везу сабирања и одузимања; ученици одузимање разумеју готово једино као инструкцију одузми (одвоји, уклони); потребно је извесно разумевање негативних бројева како би се разумели неки од поступака одузимања.

Предмет истраживања које смо реализовали јесу менталне стратегије одузимања ученика трећег разреда. У оквиру школског програма математике у Србији (*Pravilnik o nastavnom planu za prvi, drugi, treći i četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja i nastavnom programu za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja; Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*) стратегије декомпозиције и секвенционалне стратегије препознајемо као варијанте поступка усменог рачунања, а стратегије компензације као примену правила зависности разлике од промене компоненти и сталности разлике.

Циљ истраживања био је да се испита способност ученика при менталном одузимању, као и да ли ученици поседују стратешку флексибилност у том процесу. Под менталним одузимањем подразумевамо поступке рачунања у којима ученици оперишу бројевима (а не цифрама) без записивања парцијалних резултата (Linsen et al., 2015). Под стратешком флексибилношћу сматрамо бирање стратегије у зависности од карактеристика бројева у задатку (Blöte et al., 2001). Из постављеног циља произашли су следећи задаци истраживања:

1. Истражити и идентификовати стратегије менталног одузимања ученика.
2. Испитати да ли ученици поседују стратешку флексибилност при менталном одузимању.
3. Испитати да ли избор неадекватне стратегије може условити грешке у рачуну и испитати карактер грешке у рачуну у односу на изабрану стратегију.

Ментални рачун није једноставно истражити. Два главна приступа која се користе у истраживању менталног рачуна јесу самоизвештај (енг. *self-reports*) и експеримент (Threlfall, 2009). У самоизвештају од ученика се тражи да објасне шта раде или како то раде, а најчешће се користи метода интервјуа.

У овом истраживању коришћене су дескриптивна метода и техника интервјуисања. Коришћен је стандардизовани интервју са питањима отвореног типа. Питања и њихов редослед одређени су унапред и исти су за сваког ученика (Cohen et al., 2000).

Узорак истраживања чини шездесет и шест ученика трећег разреда из две различите школе у Београду. Учесници су појединачно интервјуисани, а направљен је и аудио-запис сваког разговора. Интервју је трајао око десет минута са сваким учеником и одржан је у посебној просторији, тако да су ученици могли да изразе своје мисли слободно и без напетости.

Задатак ученика је био да израчунају вредност пет израза (605 – 98, 107 – 95, 178 – 96, 95 – 88, 87 – 49). Интервју је текао на следећи начин: испитивач на папиру покаже један пример, затим ученик рачуна у глави, каже резултат, а потом треба да објасни како је рачунао; и тако за сваки од примера одузимања. Интервјуиста бележи одговоре. Садржај интервјуа анализиран је дедуктивном методом. За анализу прикупљених података коришћене су следеће категорије: 1) стандардни поступак писменог (цифарског) рачунања; 2) стратегије декомпозиције/разлагања (Selter et al., 2012; Verschaffel et al., 2007); 3) секвенционалне стратегије (Selter et al., 2012; Verschaffel et al., 2007; Torbeyns et el., 2009b); 4) комбинована метода (Fuson et al., 1997) 5) стратегије компензације (Selter et al., 2012; Peltenburg et al., 2012; Verschaffel et al., 2007): a) одузети „округли" број, компензовати (Пелтенбург и сарадници ову стратегију називају стратегијом вишеструких операција), код нас правило зависности разлике од промене умањиоца; б) балансирање, код нас правило сталности разлике; 6) индиректно сабирање (Torbeyns et al., 2009b); 7) индиректно одузимање (Torbeyns et al., 2009b).

Као прву категорију за прикупљање података навели смо цифарско рачунање, али напомињемо да стандардни поступак писменог (цифарског) рачунања не представља стратегију менталног рачуна јер се оперише цифрама, а не декадним сумама које цифре означавају.

Резултати и интерпретација резултата истраживања

Стратегије рачунања. Први задатак истраживања односио се на идентификовање различитих стратегија које ученици користе при менталном одузимању, као и учесталости њиховог коришћења. За анализу добијених одговора користили смо седам стратегија одузимања (цифарско, декомпозиција, секвенционална, комбинована метода, компензација, индиректно сабирање и индиректно одузимање). Учесталост стратегија на коришћеним примерима приказана је у Табели 1. Идентификовали смо шест различитих стратегија које су ученици користили у примерима одузимања двоцифреног броја од троцифреног и пет стратегија одузимања двоцифреног броја од двоцифреног. Стратегију индиректног одузимања ученици нису користили ни у једном од понуђених примера.

Наши резултати показују да ученици користе стратегије менталног одузимања, али је доминантна стратегија коју бирају цифарско рачунање (које не представља ментални рачун). За поређење учесталости коришћења стратегија рачунања користили смо хи-квадрат тест подударања (Chi-Square Goodness of Fit Test). Резултати показују да постоје статистички значајне разлике у броју ученика који користе одређене стратегије. Ученици значајно чешће (у односу на остале) користе стратегију цифарског рачунања, а значајно ређе (у односу на остале) користе секвенционалну стратегију (χ^2 (5. 326)=210.761, p=0.000). Ипак, ако све стратегије менталног рачунања посматрамо као једну категорију, ученици су статистички значајно радије бирали стратегије менталног рачунања него алгоритам цифарског рачунања (χ^2 (1. 326)= 6.491, p=.011).

Најчешће коришћен поступак рачунања, након цифарског, јесте комбинована метода (Табела 1). Остале стратегије се јављају спорадично, што нам је показатељ ученичких неформалних

Табела 1. Фреквенције и ūроценūи коришћених сūраūеīија.

	Пример, f (%)				
Стратегија	605 – 98	107 – 95	178 – 96	**95 – 88**	**87 – 49**
Цифарско рачунање	24 (36,36%)	27 (40,91%)	31 (46,97%)	28 (42,42%)	30 (45,45%)
Комбинована метода	18 (27,27%)	12 (18,18%)	12 (18,18%)	16 (24,24%)	18 (27,27%)
Секвенционална стратегија	1 (1,52%)	1 (1,52%)	1 (1,52%)	2 (3,03%)	2 (3,03%)
Декомпозиција	8 (12,12%)	11 (16,67%)	12 (18,18%)	6 (9,09%)	8 (12,12%)
Индиректно сабирање	2 (3,03%)	5 (7,58%)	7 (10,61%)	11 (16,67%)	8 (12,12%)
Компензација	12 (18,18%)	10 (15,15%)	3 (4,55%)	0 (0%)	0 (0%)
Индиректно одузимање	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Без објашњења	1 (1,52%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (4 ,55%)	0 (0%)

(интуитивних) знања о менталним стратегијама рачунања. Стратегију декомпозиције која у одређеним случајевима растављања подразумева негативне парцијалне резултате (у примерима у којима су јединице умањеника мање од јединица умањиоца: 605 – 98, 95 – 88, 87 – 49) нисмо могли да очекујемо од наших ученика који се у првом циклусу образовања не упознају са скупом целих бројева. Међутим, испитивани ученици су одузимали јединице умањеника од јединица умањиоца и на тај начин добијали позитиван резултат који накнадно одузимају од претходно добијеног резултата, па је добијени резултат тачан, а операције са негативним бројевима избегнуте. Покажимо то на примеру 95 – 88: 90 – 80 = 10, 8 – 5 = 3, 10 – 3 = 7.

Иако ученици чешће користе стратегије менталног рачунања при рачунању без папира и оловке, изненађујући је резултат да је у таквој ситуацији доминантна стратегија цифарског рачунања. Способност менталног рачуна је повезана са концептуалним разумевањем декадног система (Carpenter et al., 1998; Fuson et al., 1997; Threlfall, 2009). Поставља се питање да ли је ово показатељ одсуства концептуалног разумевања бројевног система и правила која важе у њему (Blöte et al., 2000) или ученици бирају стратегију која им је позната (Baranes et al., 1989) и мисле да се то очекује од њих (Torbeyns et al., 2008; Imbo & Vandierendonck, 2006). Одговор на ова питања покушаћемо да дамо кроз испитивање стратешке флексибилности ученика при менталном рачунању.

Стратешка флексибилност. Наш други задатак односио се на испитивање стратешке флексибилности ученика при менталном одузимању. Истраживали смо да ли ученици бирају стратегије одузимања у односу на карактеристике бројева у задатку. Ментална аритметика подразумева коришћење широког спектра стратегија и флексибилно прилагођавање структури проблема (Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012; Torbeyns et al., 2009a; Verschaffel et al., 2007), односно бројевима у задатку. У том смислу, примери су одабрани тако да су погодни за различите стратегије рачунања.

Цифарско рачунање, које ученици најчешће користе (Табела 1), није погодно без коришћења папира и оловке и због тога се јавља и највећи број грешака, о чему ће бити речи у наставку рада. Следећа метода коју ученици често бирају јесте комбинована метода. Мишљења смо да ученици ове методе (цифарско рачунање и комбиновану методу) бирају као алгоритме који засигурно доводе до тачног резултата јер их често употребљавају у учионици (Blöte et al., 2000), а не на основу разматрања структуре примера.

Коришћење поступка цифарског рачунања, када ученици долазе до тачног резултата, илустроваћемо следећим парадигматским примером: 605 – 98: 5 – 8 → „не може", 15 – 8 = 7, 9 – 9 = 0, „и остаје нам 5, па је резултат 507". Може се уочити да је цифарско рачунање у овом примеру доста сложено, постоји велика могућност грешке. Најједноставнија стратегија би била компензација, односно рачунање на следећи начин: 605 – 98: 607 – 100 = 507, то јест заокружујемо умањилац на 100, и самим тим додајемо и умањенику 2. Могуће је и променити умањеник тако што ћемо број „заокружити" на вишеструку стотину. Ученици су, у највећем броју (њих двадесет и четворо, то јест 36,36%) применили алгоритам писменог (цифарског) рачунања. У овом примеру цифарско рачунање није погодно јер су и десетице и јединице умањеника мање од десетица и јединица умањиоца. Компензацијом коју сматрамо најадекватнијом у овом примеру рачунало је дванаест (18,18%) ученика (Табела 1).

Нефлексибилност приликом избора стратегије најбоље илуструје четврти пример. За пример 95 – 88 је очекивано да ученици трећег разреда одмах виде одговор. Најједноставнија стратегија је индиректно сабирање јер су бројеви „близу", па је могуће умањилац допунити до умањеника, али је ту стратегију користило само једанаест (16,67%) ученика. Погодна и очекивана стратегија је и индиректно одузимање, где је потребно одузети 5 јединица да би се дошло до вишеструке десетице, а потом још 2 јединице до умањиоца, а ту стратегију није користио ниједан ученик. Ученици који су користили индиректно сабирање, односно који су уочили да је разлика између бројева мала, коментарисали су: „близу су", „то је лако, 2 + 5 = 7". Чак двадесет и осам (42,42%) ученика и овај пример рачуна цифарски, иако се одузимање двоцифрених бројева учи, пре свега, усменим поступцима рачунања, и то секвенционалном методом, коју одабирају само два (3,03%) ученика. Цифарски рачун су ученици користили на следећи начин: „5 – 8 не може, па одузимамо једну десетицу, 15 – 8 = 7, 8 – 8 = 0, па је резултат 7". Остављамо отворено питање за даља истраживања да ли би ученици у већој мери користили индиректно сабирање у задатку са реалним контекстом где знак минус не би сугерисао операцију одузимања.

Пети пример: 87 – 49 погодан је за примену стратегије компензације када се заокружује умањилац, међутим, ниједан ученик није рачунао помоћу компензације. Највећи број ученика овај пример рачуна цифарски, чак њих тридесет (45,45%).

Анализа броја стратегија које користи сваки појединачни ученик кроз различите примере такође показује да ученици не поседују флексибилност при рачунању. Више од половине ученика, њих тридесет и шест (54,55%), кроз све примере користи само једну стратегију (Табела 2). Две стратегије је користило деветнаест (28,79%) ученика, три стратегије девет (13,64%) ученика, један (1,52%) ученик је користио четири стратегије и један (1,52%) пет различитих стратегија одузимања. Чак једна трећина ученика (двадесет и два ученика, 33,3%) користила је искључиво стратегију цифарског (писменог) рачунања кроз све примере.

Табела 2. Број коришћених сӣраӣеīија ӣојединачноī ученика.

Број коришћених стратегија	*F*	%
једна	36	54,55%
две	19	28,79%
три	9	13,64%
четири	1	1,52%
пет	1	1,52%
Укупно	66	100%

Менталне стратегије одређују се као паметне стратегије (Verschaffel et al., 2007) које су показатељ разумевања основних карактеристика система бројева и аритметичких операција. Доминантна карактеристика менталне аритметике је стратешка флексибилност која се, углавном, одређује као флексибилно прилагођавање стратегија структури проблема (Verschaffel et al., 2010; Blöte et al., 2001; и други). С обзиром на то да су испитивани ученици у највећем броју користили једну стратегију рачунања на примерима различите структуре (Табела 2) и да при рачунању без папира и оловке користе као доминантну стратегију цифарско рачунање (која није стратегија менталног рачунања), можемо закључити да не поседују стратешку флексибилност. Значај флексибилног менталног рачуна је показатељ развијања математичких способности и мишљења које превазилазе процедурално знање (Threlfall, 2009). У том смислу, даље нас је интересовало да ли је стратешка нефлексибилност узрок грешака при рачунању.

Избор сӣраӣеīије као факӣор īрешке у рачунању. Интересовало нас је да ли избор стратегије која није подесна за ментално рачунање може узроковати грешке у рачуну. У Табели 3 приказана је фреквенција тачних и нетачних одговора за сваку од идентификованих стратегија. Иако су ученици у малом броју бирали стратегију индиректног сабирања, секвенционалне или стратегије компензације, фреквенције (Табела 3) пока-

Табела 3. Успешност рачунања при коришћењу различитих стратегија.

Стратегија	**Успешно** *f* (%)		**Неуспешно** *f* (%)		**Укупно** *f*
Цифарски	93	66,43%	47	33,57%	140
Комбинована	64	84,21%	12	15,79%	76
Компензација	20	80,00%	5	20,00%	25
Декомпозиција	33	73,33%	12	26,67%	45
Индиректно сабирање	32	96,97%	1	3,03%	33
Секвенционална	6	85,71%	1	14,29%	7
Укупно	248		78		326

зују да применом тих стратегија ученици ретко греше (при индиректном сабирању и секвенционалним стратегијама само по једна грешка).

За примере који су дати ученицима на крају трећег разреда могло би се очекивати да су готово тривијални са аспекта рачуна. Доминантан метод рачунања који су ученици користили био је алгоритам писменог (цифарског) рачунања (који су спроводили у глави без папира и оловке). У Табели 4 представљене су фреквенције тачног и нетачног рачуна применом цифарског начина рачунања и применом менталних стратегија рачунања.

Поређењем успешности ученика приликом примене алгоритма цифарског рачунања и примене стратегија менталног рачуна може се закључити да су ученици статистички значајно успешнији када користе стратегије менталног рачунања. Хи-квадрат тест независности (Chi-sqare test of Independence) показао је да постоји статистички значајна повезаност између начина на који су ученици рачунали и тачности резултата (χ^2 (1. 326)= 12.541, p=.000). Ученици су статистички значајно више грешили када су користили алгоритам цифарског рачунања. Најчешће грешке које су правили у том поступку су следеће: пермутације цифара, проблем сагледавања резултата као броја (резултат интерпретирају само набрајањем цифара: пет-нула-седам); ученици заборављају да су „позајмили“ једну десетицу, одузимање цифре умањеника од цифре умањиоца. Парадигматски пример за проблем пермутације цифара је следећи (107 – 95): *10 минус 9 је 1, 7 минус 5 је 2, резултат је 21*. На примеру 87 – 49 илустроваћемо грешку када ученици заборављају да су позајмили десетицу: *7 минус 9 не може, 17 минус 9 је 8, 8 минус 4 је 4, резултат је 48*. Последњи тип грешке илустроваћемо на примеру 95 – 88: *9 минус 8 је 1, 8 минус 5 је 3, резултат је 13*.

Наше мишљење је да је извор грешака које су ученици правили неадекватан избор стратегије, то јест да алгоритам цифарског рачунања није погодан за рачунање „у глави“. Верујемо да је примена стратегија менталног рачунања показатељ концептуалног разумевања декадног система и рачунских операција, па ученици који не поседују то разумевање нису бирали страте-

Табела 4. Успешност у рачунању применом менталних стратегија и применом цифарског алгоритма.

Стратегија	нетачан рачун *f* (%)	тачан рачун *f* (%)	укупно *f* (%)
Цифарско рачунање	47 (33,6%)	93 (66,4%)	140 (100,0%)
Стратегије менталног рачуна	31 (16,7%)	155 (83,3%)	186 (100,0%)
Укупно	78 (23,9%)	248 (76,1%)	326 (100,0%)

гије менталне аритметике јер поступак не могу провести до краја (Blöte et al., 2000). Приказаћемо неке одговоре ученика који су нас довели до наведеног закључка. Ученик бира комбиновану методу на примеру 95 – 88 и рачуна на следећи начин: *90 минус 80 је 10, 10 плус 8 је 18, 18 минус 5 је 13*. Сабирањем разлике и умањиоца ученик не добија умањеник и говори: *90 минус 80 је 10, 10 плус 5 је 15, 15 минус 8 је 7, мислим да је тако*.

Рачунајући комбинованом методом ученици греше у „враћању јединица умањеника“, на које заборављају. Грешка коју праве ученици рачунајући декомпозицијом јесте да одузимају поједине резултате уместо да их сабирају. Покажимо то на примеру 107 – 95: *100 минус 90 је 10, 7 минус 5 је 2, 10 минус 2 је 8*. Ученици су одузимали јединице умањеника од јединица умањиоца јер обрнуто није могуће у скупу природних бројева, и тиме показали неразумевање и стратегије декомпозиције и самог одузимања. На примеру 87 – 49 то изгледа овако: *80 минус 40 је 40, 9 минус 7 је 2, 40 минус 2 је 38.* Дакле, резултат је тачан, али се поставља питање значења и разумевања оваквог начина рачунања.

Закључак

Значај менталног рачуна огледа се и у практичној примени у свакодневном животу, као и у поступцима решавања проблема јер њихова адекватна примена растерећује пажњу и омогућава фокус на проблемску ситуацију. Способност менталног рачуна је и индикатор разумевања значења броја, декадног система и правила која га одређују.

Наравно, не споримо значај упознавања и разумевања стандардних алгоритама рачунања, али сматрамо да стратегије менталног рачунања треба имплементирати у наставни програм математике за почетну наставу. Иако је истраживање спроведено на малом узорку, отворена су значајна питања која могу бити предмет даљих истраживања:

1. Да ли ученици који су успешнији у математици чешће бирају стратегије менталне аритметике приликом рачунања?
2. Да ли би ученици користили више стратегија или показали већу флексибилност у одабиру стратегије у задацима са реалним контекстом (Torbeyns et al., 2009a; Blöte et al., 2000)?
3. Поставља се питање колико учитељи стварају образовне прилике за оспособљавање ученика у менталном рачунању независно од коришћеног уџбеника.
4. Колико ученике треба подстаћи да буду креативни и „измисле“ своје методе рачунања? Хердсфилд и сарадници (Heirdsfield et al., 2007) говоре о изазовима одржавања равнотеже између експлицитно уведених поступака и развоја сопствених ученичких стратегија. Уколико се ученици превише охрабрују, елаборација сопствених поступака постаје вреднија од ефикасности; премало охрабривања доводи до тога да ученици постају зависни од једног поступка.
5. Колико од ученика треба тражити да објасне и експлицирају своје методе и стратегије рачунања? Уколико учитељ превише инсистира на објашњењу поступака, ученици ће радије бирати методе које се лако артикулишу, а ако не инсистира на томе, поставља се питање разумевања поступака и стратегија.

Литература

- Baranes, R., Perry, M. & Stiegler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*. 6 (4), 287–318.
- Baroody, A. J. & Tiilikainen, S. H. (2003). Two perspectives on addition development. In: Baroody, A. J. & Dowker, A. (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills* (75–125). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Blöte, A. W., Klein, A. S. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*. 10, 221–247.
- Blöte, A. W., Van der Burg, E. & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instructional effects. *Journal of Educational Psychology*. 93 (3), 627–638. DOI:10.1037/0022-0663.93.3.627.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (1), 3–20.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Metode istraživanja u obrazovanju*. Zagreb: Naklada Slap.
- Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models. representations and theory. In: Cai, J. & Knuth, E. (Eds). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (187–214). Netherlands: Springer.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I. et al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28 (2), 130–162. DOI: 10.2307/749759.
- Heirdsfield, A., Dole, S. & Beswick, K. (2007). Instruction to support mental computation development in young children of diverse ability. In: Jeffery, P. L. (ed.). *Proceedings Australian Association for Research in Education Conference* (26–30). November 2006. Adelaide, Australia. Retrieved January 18, 2017. from: https://eprints.qut.edu.au/6604/1/6407.pdf.
- Ilić, S. (2016). *Razumevanje i primena pravila o stalnosti zbira i razlike* (master rad). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Ilić, S., Zeljić, M. (2016). Razumevanje i primena pravila aritmetike od strane učenika četvrtog razreda osnovne škole. *Pedagogija*. 71 (4), 419–432.
- Imbo, I. & Vandierendonck, A. (2006). The development of strategy use in elementary school children: Working memory and individual differences. *Journal of Experimental Child Psychology*. 96, 284–309.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Linsen, S., Verschaffel, L., Reynvoet, B. & De Smedt, B. (2015). The association between numerical magnitude processing and mental versus algorithmic multi-digit subtraction in children. *Learning and Instruction*. 35, 42–50. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2014.09.003.
- Maclellan, E. (2001). Mental Calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education.* 24 (2), 145–154. Retrieved January 18, 2017 from: https://pure.strath.ac.uk/portal/files/185113/strathprints007321.pdf.

- Peltenburg, M., Van Den Heuvel–Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 – A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*. 79 (3), 351–369. DOI:10.1007/s10649-011-9351-0.
- *Pravilnik o nastavnom planu za prvi, drugi, treći i četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja i nastavnom programu za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.* Prosvetni glasnik, br. 1/05, 15/06, 2/08, 7/10, 3/11, 7/11, 1/13 i 11/14.
- *Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* Prosvetni glasnik, br. 3/06, 15/06, 2/08, 3/11, 7/11, 1/13 i 11/14.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2012). Taking away and determinig the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*. 79 (3), 389–408. DOI:10.1007/s10649-011-9305-6.
- Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*. 31 (3), 280–300. DOI: 10.1016/j.cedpsych.2005.08.001.
- Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics.* 50 (1), 29–47. DOI: 10.1023/A:1020572803437.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*. 41, 541–555. DOI:10.1007/s11858-009-0195-3.
- Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multidigit sums: a choice/no-choice study. *Research in Mathematics Education.* 15 (2), 129–140. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2013.797745.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009a). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning.* 11 (1–2), 79–91. http://dx.doi.org/10.1080/10986060802583998.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009b). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*. 71, 1–17. DOI: 10.1007/s10649-008-9155-z.
- Torbeyns, J., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009c). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction*. 19 (1), 1–12.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquiere, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction.* 24 (4), 439–465.
- Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (6th ed.). New York: Pearson Education. Inc.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2001). *Children learn mathematics. A teaching-learning trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute. University of Utrecht. Retrieved January 18, 2017 from: https://www.sensepublishers.com/media/161-children-learn-mathematics.pdf.
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics.* 25 (2), 2–23.

- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In: Lester, F. K. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (557–628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualising. investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*. 24 (3), 35–59.
- Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Peters, G. & *Ghesquière*, P. (2010). Solving subtraction problems flexibly by means of indirect addition. In: Cowan, R., Saxton, M. & Tolmie, A. (Eds.). *Special issue of the British journal of educational psychology*. Understanding number development and difficulties (monograph). 2 (7), 51–63.

Summary

Abstract: *Mental arithmetic plays an important role in teaching and learning mathematics. More precisely, it develops problem-solving skills, helps students to develop a skill of making estimations in calculations, and contributes to a better understanding of the concept of numbers and decade system. The basic characteristics of mental arithmetic are as follows: 1) mental calculation uses numbers, not digits (without recording partial results); 2) strategic flexibility in terms of selecting a strategy relative to the characteristics of numbers in a mathematics task. The aim of this paper is to examine pupils' ability to subtract two numbers without using paper and pencil (mentally) and to identify the strategies used by pupils while doing the calculations. The paper also focuses on the very important question of pupils' flexibility in using calculation strategies, or more specifically, whether the choice of a strategy depends on the structure of a mathematical task. The research was conducted on a sample of 66 third-graders from two primary schools in Belgrade. A descriptive method and interview were used in the research. The obtained results indicate that pupils predominantly use the algorithm of digital calculation in trying to do a calculation without a paper and pencil, which is the cause of many errors. Equally important, the pupils lack flexibility in doing mental calculation, which may indicate the insufficient understanding of the structure of numbers and calculation procedures. In addition, the results point to the need to change the approaches to arithmetic content by shifting the focus from developing algorithm calculation skills to developing a more in-depth understanding and use of different calculation procedures.*

Keywords: *mental arithmetic, subtraction strategies, strategic flexibility.*