

Оригинални
научни рад

Оливера Ј. Ђокић¹
Универзитет у Београду, Учитељски факултет, Београд, Србија

Предраг С. Поповић
ОШ „Светозар Марковић”, Београд, Србија



Интиеракције између различитих врста математичког знања у ученицима математике за зајремину шела²

Резиме: Резултати међународног истраживања ТИМСС (2011, 2015, 2019) за Србију за ученике четвртог разреда основне школе показују да су постигнућа ученика у области геометрије и мерења нижа у односу на постигнућа у другим областима (као што је број). Како бисмо истражили могуће узроке, анализирали смо ученике за четврти разред основне школе који су у години истраживања коришћени у школама у Србији. Циљ истраживања је истраживање две врсте знања – концептуалног и процедуралног – у ученицима математике за тему зајремина шела. На основу истраживања постигнућа ученика у различитим врстама знања при мерењу дужине, површине и зајремина (Тап Шиџан, 2010) формирали смо листу индикатора који указују на прилике за учење из ученика математике и различите врсте знања о зајремини шела које се постилају пред ученике четвртих разреда основне школе. У раду је примењена дескриптивна метода за анализу садржаја ученика и остварених интиеракција између различитих врста знања у математичким задацима. Основни резултати истраживања показују да индикатори који су оријентисани на препознавање концептуалног разумевања показују знатно мању учешћалост јојављивања у односу на индикаторе који указују на процедурална знања. Разлој овоме видимо у почетном формирању јојма зајремина шела. Закључци рада упућују на забринутост збој зајечене интиеракције између различитих врста знања, а ошварају се ишћања за даља истраживања, јоседно са аспекти истраживања и развоја ученика математике у математичком образовању.

Кључне речи: мерење зајремина, концептуално и процедурално знање, ученици математике, наставни програм, Србија

¹ olivera.djokic@uf.bg.ac.rs

² Истраживање представља резултате прерађеног и у теоријском делу допуњеног мастер дипломског рада *Почетно разумевање јојма зајремина ученика четвртог разреда основне школе*, одбрањеног на Учитељском факултету Универзитета у Београду 13. 7. 2020. године (под менторством проф. др Оливере Ј. Ђокић).

Copyright © 2023 by the authors, licensee Teacher Education Faculty University of Belgrade, SERBIA.

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original paper is accurately cited.

Увод

Још од предшколског васпитања и образовања деца се упознају са мерењем различитих величина, на пример, дужине. Поред дужине, ученици већ у почетној настави уче и о мерењима површине и запремине. Увођење сваког од наведених математичких појмова захтева добру припрему учитеља, а важним фактором у процесу формирања наведених појмова сматра се и учбеник математике. Начин на који се наведени математички појмови о мерењу величина представљају у учбеницима у великој мери утиче на то како ће ученици формирати математичке појмове у области мерења.

Теоријски оквири истраживања

Мерење у настави математике. Већ у почетној настави математике постепено се замењују мерења нестандартним мерним јединицама и коришћење алата и почињу да се користе формуле и формулска рачунања у области мерења (нпр. површине и запремине). Иако се површина и запремина обично дефинишу у просторном смислу, фокус мерења ових величина управо укључује нумеричко резоновање. Формуле за површину или запремину, дакле, замењују коришћење мерног инструмента и мерење нестандартним јединицама мере. Овај прелаз од једних ка другима укључује више од нумеричког рачунања; укључује упознавање ученика са конструисањем нових величина од познатих мултипликативних композиција (Vergnaud, 1983; Smith III and Barrett, 2017). Тамо где мултипликативна композиција подржава напредовање у учењу, учioniчке дискусије о томе како су нове количине мултипликативно створене су ретке. Уместо тога, фокус учioniчких дискусија постаје рачунски (нпр. „4 центиметра дуго” постаје „4”).

Смит и Берет (Smith III and Barrett, 2017) истичу да се мерењу често придаје много мање

пажње у настави од, на пример, броја. Сматра се да би то могао да буде један од разлога за слабија постигнућа ученика у односу на постигнућа у домену број и домену подаци, иако ово није општи случај (Smith III and Barrett, 2017). У многим учбеницима тема мерење се појављује готово по правилу на крају. Будући да садржај учбеника у многим земљама снажно обликује наставу и шта учитељи раде (нпр. Jelić i Đokić, 2017; Smith III and Barrett, 2017), садржај и структура наставних програма обликују искуство ученика у мерењу у многим учioniцама. Задаци мерења високо су процедурално засновани у учбеницима почетне наставе математике (Smith III and Barrett, 2017). Мало се пажње посвећује концептуалном разумевању и то ограничава поступке мерења. Не посвећује се пажња испитивању како обе врсте знања удружено структурирају мерења величина, односно каква је интеракција наведених врста знања.

Ученичко разумевање појма запремине

Мерне јединице, јојединачне и композиционе. И са чврстим и са течним материјалом ученици при одређивању запремине интуитивно схватају улогу мерних јединица. На питање која од две посуде ваљкастог облика садржи више течности деца предшколског узраста обично се фокусирају на висину течности у посуди, не обазирјући се на њену ширину. Међутим, већ од првог разреда иста деца која су истраживала запремину течности могу да предвиде која посуда има већу запремину, проверавајући је пресипањем и пребројавањем узастопних корака, те навођењем да јединице веће запремине течности садрже оне мање (Smith III and Barrett, 2017). До трећег разреда ученици схватају да се количина затвореног простора може одредити попуњавањем простора мањим јединицама. Међутим, ове интуитивне представе могу да буду и погрешне у структурирању простора и да доведу

до формирања погрешних мера запремине (нпр. бројање само видљивих коцки у блоковима сложених коцки).

Ученичко резонување при преласку од појединачних јединица на *композиционе* важно је у развојном смислу. Истраживања показују да ученици уз одређену подршку могу да пређу са размишљања о запремини у смислу спољних површи на организоване групе јединица (нпр. зид или под слоја коцки у блоковима сложених коцки). Батиста и Клеменц (Battista and Clements, 1996) открили су да су ученици трећег разреда имали користи у поновљеним искуствима при предвиђању и провери величине куле састављене од коцки. Ово је омогућило размишљање о слојевима састављеним од коцки. Ученици петог разреда чешће су могли да координирају и објасне односе бочне и предње или горње површи коцке на основу њене дводимензионалне мреже. Они ученици који су видели процес изграђивања у смислу узастопних слојева коцки једног сложеног тела састављеног од мањих, јединичних коцки, увиђали су да се појединачне коцке морају бројати само једном.

Као и код мера за површину, конструкција и употреба композитних јединица за запремину представља део шире способности структуре тродимензионалног простора. Како су ученици развијали способност за конструисање низова квадратних јединица (понављањем редова или колона) (Battista et al., 1998), уз одговарајуће искуство и подршку, они долазе до организације простора као низова кубних јединица (путем колекције слојева који испуњавају простор) (Battista, 2004; Battista and Clements, 1996). Ипак, чини се да способност ученика у структурирању тродимензионалног простора као низова заостаје за њиховом способношћу у две димензије (Curry et al., 2006). Ова просторна компетенција, посебно способност да се виде и користе композитне јединице, представља кључну компетенцију за разумевање формуле за запремину

(као што је и разумевање формуле за површину) (Zeljić i Ivančević, 2019; Milošević, 2020). Треба имати на уму претходно развијену способност за мерење дужине из које су изведене и површина и запремина (Antić, 2017; Antić i Đokić, 2018).

Прелазак са композиционих јединица на множење. У неком тренутку, било да су их изазвали учитељи или њихова сопствена радозналост, ученици почињу да повезују бројање појединачних и сложених јединица запремине са дужинама ивица и површинама страна геометријског тела (у нашем случају квадрата или коцке). Разумевање формула запремине за квадрат (и коцку) обично укључује координацију броја јединица у основној површи или почетном слоју са висином која одређује број слојева потребних за попуњавање простора које заузима геометријско тело (Battista and Clements, 1996). Ако ученици структурирају простор у слојевима, на крају се бројање слојева може превести у нумеричку операцију множења површине основног слоја са висином. Али, ова транзиција може потрајати код многих ученика, а захтеви наставног програма да се користе формуле често претходе ученичком разумевању. Инструкције обично наглашавају ефикасност формула у односу на јединице за бројање без покушаја да их ученици разумеју (нпр. слагање слојева и њихово набрајање).

Врсте знања – концептуално и процедурално

У литератури (Tirosh, 1999) често се помињу различите врсте знања, нпр. инструментално, релационо, концептуално, процедурално, алгоритамско, формално, визуелно, интуитивно, имплицитно, експлицитно, елементарно, напредно, знати нешто, знати зашто и како. Настава се све више препознаје као професија која захтева доношење одлука и решавање проблема у сложеном и динамичном окружењу. Све више је увиђања да математичко знање само по себи не гарантује бољу наставу и чине се покушаји да

се дефинишу различите врсте знања потребних за наставу.

Под процедуралним знањем подразумевамо знање о специфичним алгоритамским поступцима и њиховом коришћењу, а под концептуалним разумевање математичких принципа и процеса кроз које се тренутно стање знања ученика повезује са претходним (Skemp, 1993). Поступци усмерени на развијање концептуалног знања подразумевају проблемску ситуацију која захтева резонување ученика и повезивање појмова који се формирају са претходно формираним (Henning, 2004). Резултати истраживања указују на потребу за истовремено изграђивање и повезивање процедуралног и концептуалног знања (Baroody et al., 2007; Henning, 2004; Schneider and Stern, 2010; Zeljić i Dabić, 2014; Zeljić, 2021; Đokić, 2013; Antić i Đokić, 2019).

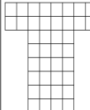
Концептуално знање. Концептуално знање подразумева разумевање математичких принципа и процеса који повезују нова знања са претходно стеченим знањима. Главна карактеристика концептуалног знања јесте хијерархијска повезаност знања, што подразумева да сваки појам настаје из других појмова и сам доприноси формирању наредних. Ова повезаност указује на важност тзв. претходног знања, знања са којима су се ученици раније срили. Претходна знања служе као добра основа за грађење нових. Хијерархијска повезаност је присутна у наставном програму математике, јер обрада једне теме представља услов за обраду следеће (Tan Şişman and Aksu, 2016; Zeljić i Dabić, 2014; Zeljić, 2021). На Слици 1 дат је пример задатка који код ученика развија концептуално знање о појму запремине тела.

Приказани квадар треба испунити јединичним коцкама. Колика је запремина квадра испуњеног јединичним коцкама?

Запремина квадра: _____

Објасни своје размишљање.

Task 7: The Volume of a Prism through its Net



Find the volume of rectangular prism whose net is given at the left side and explain your reasoning.

→ The volume of rectangular prism: _____

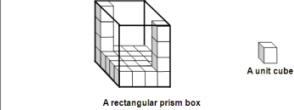
→ Explanation: _____

Measurement Domain: Volume

Concept(s) embedded in the task:

- The concept of volume
- Spatial structuring

Task 8: The Number of Unit Cubes in the Prism



A rectangular prism box

A unit cube

→ The rectangular prism box shown above will be filled with unit cubes whose edges are 1 unit long. What is the volume of the box when it is filled up with unit cubes completely?

→ The volume of the box: _____

→ Explain your reasoning: _____

Measurement Domain: Volume

Concept(s) embedded in the task:

- The concept of volume
- Spatial structuring
- Enumeration of arrays of cubes

Слика 1. Пример задатка концептуалног знања (Tan Şişman and Aksu, 2016: 6).

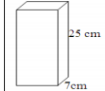
Задатак приказан на Слици 1 код ученика развија концептуално знање о запремини тела, јер од њих тражи да, служећи се знањима о особинама и димензијама геометријских тела, израчунају запремину тела изражену преко јединичних коцки. Осим тога, од ученика се тражи и да објасне начин на који су дошли до решења.

Процедурално знање. Процедурално знање подразумева знање специфичних алгоритамских процедура и њихове примене. Оно се састоји од знања математичких симбола и познавања алгоритама или поступака који воде ка решавању задатка (Tan Şişman and Aksu, 2016; Zeljić, 2021). Пример задатка који води ка процедуралном знању дат је на Слици 2.

Израчунај запремину квадра.

Task 7: The Volume of a Rectangular Prism

Find the volume of a rectangular prism given below.



25 cm

9 cm 7 cm

Measurement Domain: Volume

Skill(s) embedded in the task:

- To calculate volume of a rectangular prism

Слика 2. Пример задатка процедуралног знања (Tan Şişman and Aksu, 2016: 7).

Задатак на Слици 2 код ученика развија процедурално знање о рачунању запремине тела, јер од ученика тражи познавање формуле за израчунавање запремине тела и просту примену израчунавања њене запремине. Од ученика се не захтева да објасне начин на који долазе до решења, а ни не проверава се да ли ученик разуме формулу коју примењује како би израчунао запремину.

Итерације између различитих врста математичког знања. На основу историјских и теоријских анализа о две наведене врсте знања у бројним истраживањима (Hurrell, 2021; Putarek, 2018; Rittle-Johnson and Schneider, 2015; Rittle-Johnson et al., 2015; Rittle-Johnson, 2017) наводе се следећи ставови истраживача по питању редоследа конструисања одређене врсте знања. *Прво – концептуални ставови* истраживача износе да ученици у почетку конструишу концептуално знање, на пример, кроз објашњења одраслих, а затим из њега изводе и изграђују процедурално знање кроз поновљено решавање проблема. *Друго – процедурални ставови* истраживача постављају да ученици прво уче процедуре, на пример, истражујући, а затим постепено извлаче концептуално знање из њих путем процеса апстракције. Трећа могућност, понекад означена као *инактивациони поглед*, јесте да се концептуално и процедурално знање развијају независно један од другог. Четврта могућност је *итеративни поглед*. За узрочне везе се каже да су двосмерне, са повећањем концептуалног знања које доводи до накнадног пораста процедуралног знања, и обрнуто. Итеративни поглед је истраживачки најприхваћенија перспектива. Ритл-Џонсон у својим истраживањима (Rittle-Johnson et al., 2015; Rittle-Johnson, 2017) отвара и истраживачки пут о двосмерности конструисања две врсте знања наводећи резултате њихових секвенцијалних јављања.

Хурел (Hurrell, 2021) наводи да би многи учитељи са становишта претежно присут-

ног процедуралног знања вероватно користили уџбенике као значајан извор у свом поучавању. Овакав приступ наглашава рачунања и процедуре и подстиче ограничено, нефлексибилно учење, а не концептуално знање. Тада би могло бити разумно тврдити да фаворизовање процедуралног знања иде управо кроз употребу уџбеника. Оно што је, такође, уочено у детаљним анализама уџбеника математике на које се Хурел ослања јесте да они теже представљању типичних задатака и предлагању начина за њихово решавање. Најчешће се дају у форми алгоритамијских корака као што су поступци решених примера задатака и стварање прилика за учење у кратком року, али које указују да они не успевају да унапреде дугорочно концептуално знање ученика.

Улога уџбеника при формирању појма запремина

Садржаји представљени у уџбенику ученике воде путем формирања појмова. У математици је јако значајан начин на који су ученицима појмови уведени.

Истраживање Хонга и Руналса (Hong, Runnalls, 2020) показатељ је какву улогу заузима уџбеник математике при формирању појма запремине тела. Оно што је Хонга и Руналса занимало јесте како је могуће трансформисати задатке у уџбеницима математике тако да они помогну ученицима у разумевању појма запремине тела и разумевању формуле за израчунавање запремине. Наведени аутори су кренули од анализе претходних истраживања која су показала да постоје три кључне идеје за разумевање појма запремине, реч је о:

1. испуњавању тродимензионалног простора мерним јединицама једнаких величина;
2. структурирању слоја и

3. повезивању структуре слоја са формулом за рачунање запремине.

Видимо да ово истраживање Хонга и Руналса (Hong, Runnalls, 2020) прати путање учења Клеменца и Сараме (Clements and Sarama, 2009), као и саму идеју појединачних и композитних мерних јединица и прелазак са композитних јединица на множење (Battista and Clements, 1996).

Индикатори који указују на различите врсте знања у ученицима математике при мерењу запремине. Иако говоримо о две врсте знања, процедуралном и концептуалном, Ритл-Джонсон и сарадници (Rittle-Johnson et al., 2001) их именују *процедуралним знањем и концептуалним разумевањем*, наглашавајући да је за концептуално знање потребно дубље разумевање математичких појмова. Ми смо ове термине преузели од њих. Ауторка Тан Сисман (Tan Şişman, 2010) испитивала је различите врсте знања које се захтевају од ученика у математичком задатку при мерењу дужине, површине и запремине, као и постигнућа ученика на таквим задацима. На основу ових резултата дедуктивним путем смо формирали листу индикатора и помоћу њих пратили смо која врста знања се захтева од ученика у ученичкој теми запремина тела (видети Прилог 1).

Појам запремине у математици у првом циклусу основног образовања у Србији

Наставни програми математике у Србији за време нашег истраживања доживљавали су промене. Нови наставни програми у школама за први и пети разред ступили су на снагу школске 2018/19. године, за други и шести разред наредне 2019/20, а програми за трећи и седми, те четврти и осми разред сукцесивно у годинама које су уследиле. У оквиру садржаја математике једна од области у којој се јављају промене јесте геометрија и мерење. Према сада већ старим наставним програмима, обим геометријских фигу-

ра – правоугаоник и квадрат – ученици су учили у трећем разреду основне школе (*Pravilnik o nastavnom programu za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2005), док, према новом програму, са тим садржајима се упознају већ у другом разреду (*Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2018). Садржаји који се тичу запремине тачности, према старом наставном програму, обрађивани су у трећем разреду (*Pravilnik o nastavnom programu za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2005) и остали су у новом програму, те се ученици са овим садржајима упознају и према новом програму за трећи разред (*Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2019). Промена се догодила код садржаја запремине геометријских тела – квадрата и коцка. Наиме, те садржаје, према сада већ старом програму, ученици четвртог разреда могли су изучавати као опције (*Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2006). Ово је значило да је учитељ могао да одлучи да ли ће их обрађивати са својим ученицима. Промена наставног програма ове садржаје ставља као обавезне, а ученике упознаје са појмом запремина тела и израчунавање запремине тела – квадрата и коцке (*Pravilnik o programu nastave i učenja za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2019). Подстакнути чињеницом да ће ученици четвртог разреда у Србији на часовима математике у оквиру обавезних садржаја изучавати времеину тела, као и резултатима истраживања Хурела (Hurrell, 2021) и Хонга и Руналса (Hong, Runnalls, 2020), поставили смо следећа истраживачка питања:

1. На који начин су структурисане теме запремина тела у ученицима математике?
2. Каква је интеракција две врсте знања у ученицима математике за тему запремина тела?

Методолошки део истраживања

Циљ истраживања је испитивање две врсте знања – концептуалног и процедуралног – у уџбеницима математике за тему запремина тела. *Задачи* истраживања који произлазе из овог циља су:

1. Испитати начин на који су уведене и структуриране уџбеничке теме запремине тела.
2. Утврдити интеракцију две врсте знања – концептуалног и процедуралног – у уџбеницима математике према индикаторима који указују на одређену врсту знања.

У овом истраживању користили смо дескриптивну *методу* тежећи да опишемо уочене елементе концептуалног разумевања и процедуралног знања који указују на тежњу и стварање прилика за учење из уџбеника математике за четврти разред основне школе. У оквиру дескриптивне методе користили смо се *техником* анализе садржаја. Као *инструмент* истраживања користили смо протокол индикатора (видети Прилог 1). Дати протокол представља преглед индикатора путем којих се прати присуство елемената концептуалног разумевања и процедуралног знања издвојених из рада Тан Сисман (Tan Şişman, 2010). Протокол је формиран тако да истраживачу омогући да путем индикатора уочи и забележи присуство сваке од врста знања у задацима из уџбеника математике. Овим ћемо стећи јасан увид колико и како се у задацима мерења запремине јављају захтеви (инструкције) за конструисање математичког знања – концептуалног разумевања и процедуралног знања – у сваком од уџбеника математике који су званично одобрени и који се користе у настави математике у Србији, а које смо анализирали. Истраживање је изведено у периоду март – мај 2020. године.

Узорак истраживања чинили су уџбеници математике за четврти разред основне шко-

ле следећих издавача: Вулкан издаваштво, Клет, Фреска, Креативни центар, Нови Логос, Едука, ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство, који имају одобрене уџбеничке комплете за трећи разред основне школе за школску 2019/20. годину (*Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2019), под претпоставком да ће исти издавачи имати уџбеничке комплете за четврти разред основне школе, према новом наставном програму. Међутим, издавачи Вулкан издаваштво и Фреска нису имали актуелне уџбенике за четврти разред основне школе, те су наш узорак чинили уџбеници следећих шест издавача: Клет, Креативни центар, Нови Логос, Едука, ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство. За *јединицу анализе* узели смо математички задатак.

Резултати истраживања

Структурирање уџбеничких тема заједина теме. Наш први истраживачки задатак био је да испитамо на који начин су структуриране теме запремина тела у уџбеницима математике. Од шест уџбеничких комплета различитих издавача у четири је опционо уведена запремина тела. Према наставном програму за четврти разред који је био актуелан док је наше истраживање трајало (и закључно са школском 2020/21. годином), то је и препорука, јер је појам запремине тела сврстан у групу опционих садржаја (*Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2006). Појам запремине тела уведен је у уџбенике следећих издавача: Клет, Креативни центар, ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство.

Након што смо утврдили у које уџбенике математике за четврти разред основне школе је уведен појам запремине тела, испитали смо како су структуриране њихове теме. За какву структуру су се аутори уџбеника определили видети у Табели 1.

Табела 1. Структурирање уџбеничких тема зајремина тела.

Издавач уџбеника	Уџбеничке јединице	Садржај уџбеничких јединица
Клет	Запремина тела	Појам запремине и начин мерења запремине тела употребом јединичних коцки и одређене мерне јединице.
	Јединице мере за запремину	Увођење мерне јединица за израчунавање запремине тела од mm^3 до m^3 .
	Запремина коцке	Увођење формуле за израчунавање запремине коцке.
	Запремина квадра	Увођење формуле за израчунавање запремине квадра.
	Научили смо	Преглед мерних јединица за запремину тела, формуле за израчунавање запремине коцке и квадра.
Креативни центар	Запремина тела	Увођење појма запремине и уочавање димензија тела.
	Јединице за запремину	Увођење мерне јединица за запремину од mm^3 до m^3 .
	Израчунавање запремине квадра и коцке	Испуњавање простора јединичним коцкама, уочавање димензија геометријских тела и увођење формуле за израчунавање запремине квадра и коцке.
	Шта смо научили	Преглед мерних јединица за запремину тела и формула за израчунавање запремине квадра и коцке.
ЈП Завод за уџбенике	Мерење запремине	Увођење појма запремине, поређење предмета према димензијама и испуњавање простора јединичним коцкама. Подсећање на мерне јединице за запремину течности, дужину и површину и увођење мерних јединица за запремину.
	Запремина коцке	Пребројавање јединичних коцки које испуњавају простор и увођење формуле за запремину коцке.
	Запремина квадра	Уочавање димензија квадра, пребројавање јединичних коцки које испуњавају простор из којих се сложено тело састоји и увођење формуле за запремину квадра.
БИГЗ школство	Мерење запремине	Увођење појма запремине, поређење тела према величини, подсећање на мерне јединице за дужину и површину, испуњавање простора јединичним коцкама из којих се сложено тело састоји и увођење мерне јединица за запремину.
	Запремина квадра	Осврт на димензије квадра, испуњавање простора јединичним коцкама и увођење формуле за израчунавање запремине квадра.
	Запремина коцке	Пребројавање јединичних коцки којима је простор испуњен и увођење формуле за израчунавање запремине коцке.

Из података приказаних у Табели 1 закључујемо следеће. Аутори свих уџбеника почињу са увођењем самог појма запремине, а затим уводе мерне јединице за запремину и представљају израчунавање запремине тела – квадра и коцке. Разлике међу издавачима су у броју уџбеничких јединица за тему запремина тела и у томе што се структурно и редослед уџбеничких јединица разликује. Два смо битна елемента уочили при анализи уџбеника: 1) издавач Клет за разлику од других издавача нема разрађене елементе испуњавања простора јединичним коцкама које воде идеји мерних јединица, појединачних и композитних, и сам прелазак од композитних јединица ка множењу, тј. рачунању запремине тела – коцке и квадра и 2) издавачи Клет и ЈП Завод за уџбенике прво су обрадили запремину коцке, а затим запремину квадра, што може да утиче на мисаоне процесе апстраховања и генерализовања, специјализације да је коцка квадар чије су све стране квадрати.

Инџеракције две врсте знања у уџбеницима мајмајшике. Други постављени истраживачки задатак био је да утврдимо каква је интеракција две врсте знања. У Табели 2 приказали смо добијене податке. Дискутујмо о оствареној интеракцији између различитих врста знања.

На основу података датих у Табели 2 уочавамо да уџбенички комплети који су чинили узорак нашег истраживања у знатно већем проценту постављају захтеве за процедурално знање у односу на концептуално разумевање при увођењу запремине тела у четвртом разреду основне школе. Приметимо да је највише индикатора препознато код издавача Клет, следе ЈП Завод за уџбенике и Креативни центар, те БИГЗ школство.

Највише индикатора концептуалног разумевања идентификовано је у уџбеничком комплету издавача Креативни центар, чак 35,71%, а најмање у уџбеничком комплету издавача Клет 5,81%. Издавачи ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ

школство имају редом 15,39% и 10,81% забележених индикатора. Када је реч о процедуралном знању, имамо исте издаваче и њихове уџбеничке комплете али са супротним смером у односу на концептуално разумевање, дакле, Клет са највећим процентом идентификованих индикатора за процедурално знање – 94,19% и Креативни центар са најмањим – 64,29%. Издавачи БИГЗ школство и ЈП Завод за уџбенике опет имају сличан проценат идентификованих индикатора, 89,19% и 84,62%.

У сету индикатора који препознају и указују на врсту знања концептуално разумевање у уџбеничким комплетима нисмо препознали нити код једног од издавача за мрежу геометријског тела нити за запремину тела и његове димензије, осим једном у уџбенику издавача Креативни центар, 2,38%. Слично је и за бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери, БИГЗ школство 5,41% и ЈП Завод за уџбенике 3,08%. За индикаторе број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји и број јединичних коцки и запремина тела сви издавачи указују на присуство захтева усмерених ка концептуалном разумевању. Препознали смо их у највећем броју за оба индикатора код Креативног центра, 21,43% и 11,90%, а најмање код БИГЗ школство – 2,70% за број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји и код Клета – 1,16% за број јединичних коцки и запремину тела. Издавачи ЈП Завод за уџбенике и Клет имају редом заступљеност 9,23% и 4,65% за индикатор број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји, док за индикатор број јединичних коцки и запремина тела ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство имају најмању и сличну заступљеност, 3,08% и 2,70%. У овом сету индикатора приметимо да готово изостају они који се односе на мреже тела, сам појам запремине тела и његових димензија, као и на бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери. Ово може код ученика да отежа визуелизацију, уочавање слојева сложеног

Табела 2. Подаци о врстама знања у ученицима математике.

Индикатор	Клет	Креативни центар	ЈП Завод за уџбенике	БИГЗ школство
	f (%)	f (%)	f (%)	f (%)
<i>Концептуално разумевање</i>				
Мрежа геометријског тела	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Запремина тела и његове димензије	0 (0)	1 (2,38)	0 (0)	0 (0)
Бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери	0 (0)	0 (0)	2 (3,08)	2 (5,41)
Број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји	4 (4,65)	9 (21,43)	6 (9,23)	1 (2,70)
Број јединичних коцки и запремина тела	1 (1,16)	5 (11,90)	2 (3,08)	1 (2,70)
Концептуално разумевање Σ	5 (5,81%)	15 (35,71%)	10 (15,39%)	4 (10,81%)
<i>Процедурално знање</i>				
Упознавање мерних јединица за запремину тела од mm ³ до m ³	35 (40,70)	17 (40,48)	22 (33,85)	15 (40,54)
Одређивање висине тела на основу познатих запремине тела, те дужине и ширине тела	15 (17,44)	2 (4,76)	8 (12,31)	4 (10,81)
Одређивање запремине тела (познате све димензије)	31 (36,05)	8 (19,05)	25 (38,46)	14 (37,84)
Процедурално знање Σ	81 (94,19%)	27 (64,29%)	55 (84,62%)	33 (89,19%)
Σ	86 (100%)	42 (100%)	65 (100%)	37 (100%)

тела и идеју издвајања мерне јединице, појединачне и композитне, па и сам прелазак ка множењу. Више су присутни индикатори број јединичних коцки од којих се састоји геометријско тело и број јединичних коцки и запремина тела, али је питање како ученици разумевају тај прелазак са захтевима нимало лак. Посебно ако имамо на уму да концептуално разумевање тражи дужи процес поучавања и учења. Овде постављамо питање интеракције између две врсте математичког знања, концептуалног разумевања и процедуралног знања, и стварања потпоре једна другој, јер се из наведених података анализе уџбеника види да изостају интеракције у суштинском смислу. Наведене врсте знања се према Ритл-Донсону (Rittle-Johnson, 2017) често развијају двосмерно и итеративно (у понављању-

ма), са побољшањима у једној врсти знања која подржавају побољшања у другој.

У сету индикатора који препознају и указују на процедурално знање у уџбеничким комплетима за индикатор упознавање мерних јединица за запремину тела од mm³ до m³ највише их је за издаваче Клет, БИГЗ школство и Креативни центар и слични су у процентуалном односу (40,70%, 40,54% и 40,48%), а нешто мање их је код ЈП Завод за уџбенике (33,85%). Индикатор одређивање висине тела на основу познатих запремине тела, те дужине и ширине тела највише их је препознато код издавачке куће Клет – 17,44%, најмање код Креативног центра – 4,76%, док их је код ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство сличан проценат, 12,31% и 10,81%. Инди-

катор одређивање запремине тела (познате све димензије) највише их је препознато код ЈП Завод за уџбенике, БИГЗ школство и Клет, редом 38,46%, 37,84% и 36,05%, а најмање код Креативног центра – 19,05%. У овом сету индикатора приметимо да су у великом проценту присутни они који указују на познавање мерних јединица, њихова претварања из већих у мање, и обрнуто, и одређивање запремине тела када су познате све његове димензије. Реч је о типичним алгоритамским рачунањима у математичким задацима са запремином, и то у великом присуству кроз инструкције уџбеника. Чим се инструкције нешто усложе, што видимо у индикатору одређивања непознате једне димензија тела, а познате запремине и друге две димензије, индикатори који указују на ову врсту знања знатно су мање присутни.

Појединачном анализом уџбеничке теме за увођење појма запремине тела код издавачких кућа Клет, ЈП Завод за уџбенике и БИГЗ школство идентификовали смо већу присутност ин-

дикатора који указују на процедурално знање, док уџбеник Креативног центра указује и на веће обраћање пажње на концептуално разумевање. Наши резултати се слажу са резултатима опсежног истраживања Тан Сисман (Tan Şişman, 2010) и Хурела (Hurrell, 2021) за обе врсте знања. Запазили смо у оквиру уџбеничке теме при самом увођењу појма запремине тела издавача Креативни центар однос који је нешто другачији, где смо идентификовали приближно једнак број индикатора концептуалног разумевања и процедуралног знања. Међутим, при сагледавању целог уџбеничког комплета (уџбеника и радне свеске) тај однос се нешто променио.

Добили смо и податке о врстама знања у математичким задацима. Погледајмо Табелу 3. Дискутујмо и овде о оствареној интеракцији различитих врста знања.

Од свих идентификованих индикатора концептуалног разумевања и процедуралног знања свега 14,78% указује на концептуално, док

Табела 3. Подаци о врстама знања у математичким задацима.

Индикатор	f (%)
<i>Концептуално разумевање</i>	
Мрежа геометријског тела	0 (0)
Запремина тела и његове димензије	1 (0,43)
Бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери	4 (1,74)
Број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји	20 (8,70)
Број јединичних коцки и запремина тела	9 (3,91)
Концептуално разумевање Σ	34 (14,78%)
<i>Процедурално знање</i>	
Упознавање мерних јединица за запремину тела од mm^3 до m^3	89 (38,70)
Одређивање висине тела на основу познатих запремине тела, те дужине и ширине тела	29 (12,61)
Одређивање запремине тела (познате све димензије)	78 (33,91)
Процедурално знање Σ	196 (85,22%)
Σ	230 (100%)

преосталих 85,22% индикатора указује на процедурално знање. Ако погледамо сваки од индикатора издвојених у Табели 3, за појам мреже геометријског тела нити један од издавача за концептуално разумевање нема инструкције (захтеве и задатке). Ово може да створи мање јасну слику код ученика о самом појму тродимензионалних објеката, а веома је важно да ученици знају да запремину могу да израчунају само за 3Д објекте. Повезаност запремине тела са димензијама уочили смо само на једном месту у учбенику издавача Креативни центар 0,43%. Та веза је доста значајна за разумевање саме формуле којом ученици треба да овладају и у потпуности је схвате. Такође, учесталост појављивања индикатора који указују на бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери је свега 1,74%, а то је прилика да са ученицима разговарамо, дајемо им могућности да процењују и сами закључују којом мерном јединицом је најпгодније изразити запремину одређеног тела. Последња два индикатора која указују на концептуално разумевање нешто су више присутна у учбеницима који су чинили наш узорак. Када је реч о броју јединичних коцки геометријског тела, идентификовано је 8,70% индикатора који указују на његово присуство. Бавити се јединичним коцкама које испуњавају неко сложено тело је веома значајно, јер самим поступком испуњавања простора ученици могу да уоче један од суштинских елемената за разумевање самог појма запремине тела, а то је да запремина представља укупан простор који то тело запрема (заузима). Број јединичних коцки и запремина тела, као последњи индикатор концептуалног разумевања у нашем узорку, идентификован је у 3,91% узорка. Задаци у оквиру којих можемо уочити овај индикатор представљају везу између јединичних коцки које испуњавају тело и запремине тог тела. Ученици ће формулу за израчунавање запремине тела лакше разумети ако је повежемо са поступком испуњавања простора јединичним коцкама. Приметимо да је учесталост појављивања овог индикатора у анализираним учбеницима мала, што свакако може да утиче на учење и поучавање у настави мерења запремине.

Ако погледамо заступљеност индикатора који указују на процедурално знање, уочавамо доста већу присутност у односу на индикаторе концептуалног разумевања. Опажамо да упознавање мерних јединица за запремину тела од mm^3 до m^3 има највећу заступљеност у нашем узорку истраживања, са чак 38,70%, затим следи одређивање запремине тела када су све димензије познате – 33,91% и на крају са нешто мањом присутношћу од 12,61% појављује се одређивање висине тела на основу запремине, дужине и ширине. Из знатно већег присуства захтева у математичким задацима оријентисаних на процедурално знање видимо да су они заправо усмерени на алгоритме рачунања запремине или рачунања непознате димензије тела према познатој запремини и другим двама димензијама.

Закључак са дискусијом

Циљ истраживања био је да испитамо две врсте знања – концептуално и процедурално – у учбеницима математике за тему запремина тела према индикаторима који указују на две наведене врсте знања.

На основу података које смо добили анализом учбеничких комплеката за четврти разред основне школе Нови Логос, Едука, Клет, Креативни центар, ЈП Завод за учбенике и БИГЗ школство који су чинили узорак овог истраживања можемо закључити да појам запремине тела није уведен у све учбенике математике. Код издавача чији су аутори увели овај појам у своје учбеничке комплете – Клет, Креативни центар, ЈП Завод за учбенике и БИГЗ школство – уочавамо сличност у структурирању теме, а разлике у варирању броја учбеничких јединица, непосвећеност пажње испуњавању простора јединичним коцкама које води идеји о мерним је-

диницама, појединачним и композитним, и сам прелазак од композитних јединица ка множењу, тј. рачунању запремине тела код издавача Клет, као и опредељеност издавача Клет и ЈП Завод за уџбенике да прво обраде запремину коцке, па онда квадра, што може да утиче на мисаоне процесе ученика. Оно што нам је истраживање ауторке Тан Сисман (Tan Şişman, 2010) обезбедило јесу индикатори помоћу којих смо пратили различите врсте знања и који се захтевају у математичким задацима мерења запремине тела и њихов смер појављивања у структурирању уџбеничких тема запремина тела.

Појединачном анализом задатака уџбеничке теме која се односи на запремину тела код издавача који су овај појам увели у своје уџбенике идентификовали смо већу присутност индикатора који указују на процедурално знање у односу на оне који указују на концептуално разумевање. Наш резултат се слаже са резултатима до којих су дошли истраживачи у својим радовима (Hong and Runnalls, 2020; Hurrell, 2021). На основу ових резултата можемо закључити да појам запремина тела није уведен на начин који би код ученика подстицао развијање концептуалног разумевања. Издвојићемо уџбенички комплет издавача Креативни центар у којем смо при анализи идентификовали већу заступљеност индикатора концептуалног разумевања при самом увођењу појма запремина тела (у самом уџбенику), али се тај однос нешто променио након што смо анализирали цео уџбенички комплет (уџбеник и радну свеску). Највећу присутност индикатора концептуалног разумевања идентификовали смо управо у уџбеничком комплету издавача Креативни центар, док смо најмању заступљеност индикатора ове врсте знања уочили у уџбеничком комплету издавача Клет. Индикатори процедуралног знања најзаступљенији су у уџбеничком комплету издавача Клет, а најмање смо их идентификовали у уџбеничком комплету издавача Креативни центар. Отворили смо питање интеракције између две врсте матема-

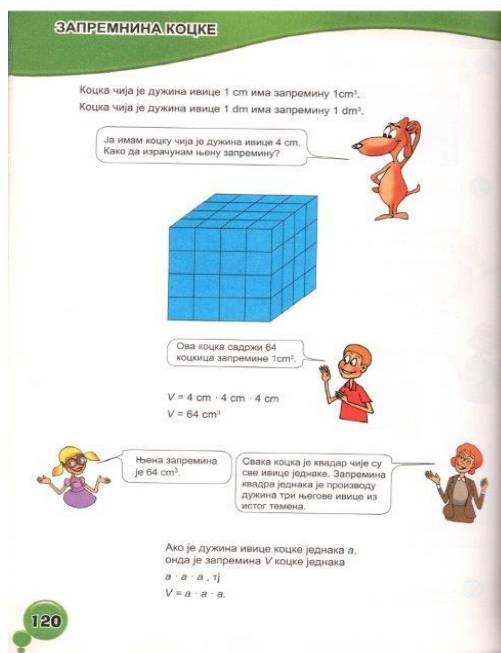
тичког знања, концептуалног и процедуралног, и стварања међусобне потпоре, на шта су нам поприлично јасно указали издвојени индикатори.

Резултати нашег истраживања корисни су за развијање приступа увођењу појма запремине тела у почетну наставу математике. Значајни су јер нам указују на недостатке које можемо отклонити како бисмо ученицима помогли при формирању нових појмова, и то водећи их концептуалном разумевању и процедуралном знању.

Током истраживања наилазили смо на неколико неочекиваних места која су нам стварала потешкоће у истраживању. Први проблем на који смо наишли при анализи уџбеничке теме запремина тела јесу бројни задаци у оквиру којих смо истовремено препознавали индикаторе који су указивали на захтеве за концептуално разумевање, али и на процедурално знање. Такве математичке задатке смо сврставали као оне које воде ученике ка процедуралном знању, јер, укупно гледано, они су постављали захтеве ученицима ка специфичним алгоритамским процедурама и њиховим применама, а не ка идеји о појединачним и композитним јединицама за мерење запремине, те прелазак са композитних јединица на множење. Илуструјмо једним уџбеничким примером (Слика 3).

Илустровани математички задатак на почетку има постављен захтев за израчунавање запремине дате непрозирне коцке која је испуњена јединичним коцкама. Ово можемо да сматрамо добрим почетком како би ученици разумели појам запремине тела који води ка концептуалном разумевању. Али, у наставку задатка нема приказа коцке на којима би ученици уочавали слојеве коцке и дошли до укупног броја јединичних коцки. Такође, нема ни приказа коцке која није испуњена јединичним коцкама, нити захтева у којима би ученици могли да самозакључују о наведеним идејама и тако индуктивним пу-

тем уопште идеју композитних јединица множењем, тј. формулом за рачунање запремине коцке. Овакав математички задатак својим захтевима ипак ученике води ка процедуралном знању. Друго, док је трајало наше истраживање у условима пандемије изазване вирусом корона, били су промењени услови публикавања нових учбеника математике, тиме и формирања нашег узорка учбеника. Стога, наше истраживање у неком следећем кораку можемо проширити новим учбеницима математике, и за трећи и за четврти разред основне школе, испитујући интеракције различитих врста знања у математичким задацима при мерењу запремине течности и запремине тела.



Слика 3. Математички задатак који својим захтевима од постојног концептуалног разумевања ипак прелази у захтеве за процедурално знање (Maksimović, 2016: 120).

Методичке импликације. На основу резултата нашег истраживања и истраживања Хонга и Руналса (Hong and Runnalls, 2020) дајемо предлог разрађеног модела учења који се односи на увођење/формирање појма запремине у учбеник математике. Наш предлог је да се у учбеницима нађу предложене фазе учења и у њима такви задаци који ће ученике водити ка концептуалном разумевању појма запремина тела, али не занемарујући ни процедурално знање. Овде дајемо кратак преглед модела који су разрадили Хонг и Руналс (Hong and Runnalls, 2020). У оквиру фаза на које се ослањамо битним елементима у учењу ученика и поучавању у настави сматрају се инструкције у учбенику (Ковачевић, 2011). Овде под инструкцијама подразумевамо термин који смо преузели од Ковачевић а који означава системско упућивање у процес поучавања у настави математике и самосталног учења ученика, а која могу да претходе учењу или да усмеравају његов ток како би се остварили постављени циљеви и задаци. Погледајмо Табелу 4 и предложени модел.

Приказаним моделом Хонга и Руналса отварамо питања за даља истраживања о различитим врстама знања при мерењу запремине тела. Анализа нових програма за трећи и четврти разред и њихове интерпретације учбеника математике, као и поређење резултата два узастопна циклуса ТИМСС истраживања (2019-2023) били би даљи смер истраживања, посебно ако се има на уму да је на последњем тестирању ученика четвртх разреда забележен пад, иако не статистички значајан, за област геометрија и мерење (Ђерић и сар., 2021). Наши ученици који су тестирани у циклусу ТИМСС 2019 учили су по старом наставном програму математике за четврти разред и учбеницима који чине наш узорак истраживања, док за текући циклус ТИМСС 2023 уче по измењеном новом наставном програму и проистеклим новим учбеницима математике. С обзиром на то да запремина није била обавезан део наставног

Табела 4. Обједињујући модел фаза учења за запремину тела према Хонгу и Руналсу (Hong and Runnalls, 2020).

Фаза учења	Резиме фазе учења
Појам запремина тела	Разумевање појма запремина тела аналогно појму запремина течности.
Мерне јединице за запремину тела	Упознавање ученика са мерним јединицама за израчунавање запремине тела. Упознавање са јединичном коцком (запремине 1 cm^3).
Испуњавање тродимензионалног простора јединичним коцкама	Ученици рачунају запремину најпре једноставних тела састављених од јединичних коцки, а затим и сложених. У почетку тела треба да буду прозирна због лакшег уочавања и пребројавања јединичних коцки, а касније и непрозирна.
Структура слоја	Ученици се упознају са димензијама тела (дужина, ширина и висина). Најпре се упознају са једнослојним прозирним телима, да би се касније захтеви усложњавали све до вишеслојних непрозирних тела. Уочавање слојева треба да прати низ адекватних питања као помоћ ученицима при самозакључивању.
Повезивање испуњавања тродимензионалног тела и структуре слоја са формулом за израчунавање запремине тела	Ученици се упознају са формулом за израчунавање запремине тела ослањајући се на структуру слоја и повезивања димензија тела са начином на који се долази до запремине тела (множењем мерних бројева дужине, ширине и висине тела, тј. димензија тела).

програма математике за четврти разред основне школе у време када је извршено истраживање анализе садржаја, могли бисмо да кажемо да није ни посебно релевантна структура садржаја у уџбеницима, јер она није детерминисана јасним исходима и упутствима датим у програму. Рад би, стога, имао знатно већу вредност када би предмет анализе били уџбеници који су сада актуелни. Међутим, овај рад сматрамо значајним и оправданим са аспекта методичке дискусије и аргументованих објашњења, иако се наши резултати већ сада могу сматрати неактуелним будући да су у међувремену ступили на снагу нови наставни програми и нови уџбеници са новим структурама тема запремина тела. Континуирано истраживање и развој уџбеника математике је више него неопходна карика у истраживању математичког образовања у Србији (Jelić i Ђokić, 2017). Сами индикатори које смо дедуктивним путем издвојили из ширег истраживања ауторке Тан Сисман (Tan Şişman, 2010) представљају потенцијалне прилике за учење и поучавање у учioniци, чак и без

употребе уџбеника математике. Стога сматрамо важним да се развој просторне компетенције ученика о запремини тела формира на основу резултата оваког и сличних истраживања у математичком образовању.

На основу разматрања Хуреловог истраживања (Hurrell, 2021) у вези са процедуралним и концептуалним знањем учитељи заслужују да буду упознати са резултатима савремених истраживања у вези са процедуралним и концептуалним знањем како би могли да доносе одлуке приликом стварања прилика за учење и поучавање, па и прилика за учење и поучавање из уџбеника математике. Разговори око поучавања и учења математике морају бити уоквирени на основу доброг разумевања процедуралног и концептуалног знања, а не на ограниченим, а понекад и погрешним (не)споразумима.

Наведено истраживање Хонга и Руналса (Hong and Runnalls, 2020) промовише ученичка размишљања о математичким појмовима и поступцима, без понављања процедура демонстрираних уџбеником или од стране учитеља (Rittle-

Johnson, 2017). Компетенције у математици захтевају да ученици развију концептуално разумевање, процедурално знање, као и процедуралну флексибилност као трећу врсту знања која подразумева извођење процедура флексибилно, тачно, ефикасно и одговарајуће (Zeljić, 2021). Ове три врсте знања се често развијају двосмерно и итеративно, са побољшањима у једној вр-

ти знања која подржавају побољшања у другим врстама. Ритл-Џонсон (Rittle-Johnson, 2017) истиче да поређења, самообјашњења/самозакључивања и истраживања промовишу концептуално разумевање и процедурално знање, али и флексибилност процедура. Зато је пожељно да буду саставни део инструкција у (новим) уџбеницима математике.

Литература

- Antić, M. (2017). *Uvođenje pojma merenja dužine u početnoj nastavi matematike* (master rad). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Antić, M. i Đokić, O. (2018). Razvijenost komponenti pojma merenja dužine kod učenika prvog razreda osnovne škole. *Inovacije u nastavi*. 31 (1), 58–74. <https://doi.org/10.5937/inovacije1801058A>
- Antić, M. D. and Đokić, O. J. (2019). The Development of the Components of the Length Measurement Concept in the Procedure of Measurement Using a Ruler. *한국수학교육학회지 시리즈D:수학교육연구*. 22 (4), 261–282. <https://doi.org/10.7468/JKSMED.2019.22.4.261>
- Baroody, A. J., Feil, Y. and Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*. 38 (2), 115–131. <https://doi.org/10.2307/30034952>
- Battista, M. T. and Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27 (3), 258–292. <https://doi.org/10.2307/749365>
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. and Borrow, C.V.A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (5), 503–532. <https://doi.org/10.2307/749731>
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*. 6 (2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6
- Clements, D. H. and Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883389>
- Curry, M., Mitchelmore, M. and Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of length, area, and volume measurement principles. In: Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. and Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2* (377–384). Prague, Czech Republic: PME.
- Đerić, I., Gutvajn, N., Jošić, S. i Ševa, N. (2021). *Nacionalni izveštaj: TIMSS 2019 u Srbiji – pogled osnovnih nalaza*. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.
- Đokić, O. (2013). Mathematical exercises as a basis for pupils' mathematical thinking development. In: Radovanović, I. and Zaclona, Z. (Eds.). *Theoretical and methodological basis of quality education* (79–95). University of Belgrade, Serbia, Teachers' Training Faculty and State Higher Vocational School in Nowy Sacz, Poland.
- Henning, P. H. (2004). Everyday Cognition and Situated Learning. In: Jonassen, D. H. (Ed.). *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (143–168). Mahwah, New Jersey & London: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hong S. D. and Runnalls C. (2020). Understanding length $\times$ width $\times$ height with modified tasks. *International Journal of Mathematical Education*. 51 (4), 614–625. <https://doi.org/10.1080/0020739X.019.1583383>
- Hurrell, D. P. (2021). Conceptual knowledge OR Procedural knowledge OR Conceptual knowledge AND Procedural knowledge: Why the conjunction is important for teachers. *Australian Journal of Teacher Education*. 46 (2), 57–71. <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2021v46n2.4>
- Jelić, M. i Đokić, O. (2017). Ka koherentnoj strukturi udžbenika matematike – analiza udžbenika prema strukturnim blokovima TIMSS istraživanja, *Inovacije u nastavi*. 30 (1), 67–81. <https://doi.org/10.5937/inovacije1701067J>
- Kovačević, Z. (2011). *Instrukcije za samostalno učenje u udžbenicima za mlađe razrede*. Beograd: Učiteljski fakultet.
- Milošević, M. (2020). *Konceptualno razumevanje površine u udžbenicima matematike* (master rad). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Popović, P. (2020). *Početno razumevanje pojma zapremine učenika četvrtog razreda osnovne škole* (master rad). Beograd: Učiteljski fakultet.
- Putarek, V. (2018). Pregled teorijskih okvira i suvremenih pristupa za poticanje konceptualnog i proceduralnog znanja u matematici. *Psiholgijske teme*. 27 (3), 453–479. <https://doi.org/10.31820/pt.27.3.6>
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. and Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*. 93 (2), 346–362. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Rittle-Johnson, B., Schneider M. and Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*. 27 (4), 587–597. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x>
- Rittle-Johnson, B. and Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In: Cohen Kadosh, R. and Dowker, A. (Eds.). *Oxford handbook of numerical cognition* (1102–1118). Oxford, UK: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Rittle-Johnson, B. (2017). Developing Mathematics Knowledge. *Child Development Perspectives*. 11 (3), 184–190. <https://doi.org/10.1111/cdep.12229>
- Schneider, M. and Stern, E. (2010). The cognitive perspective on learning: Ten cornerstone findings. In: Organisation for Economic Co-Operation and Development (OECD) (Ed.), *The nature of learning: Using research to inspire practice* (69–90). Paris: OECD.
- Skemp, R. R. (1993). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.
- Smith III, J. P., Barrett, J. E. (2017). The learning and teaching of measurement: Coordinating quantity and number. In: Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education* (355–385). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tan Şişman, G. (2010). *Sixth grade students' conceptual and procedural knowledge and word problem solving skills in length, area, and volume measurement* (doctorial dissertation). Ankara: Middle East Technical University.
- Tan Şişman, G. and Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 14 (7), 1293–1319. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5>
- Tirosh, D. (Ed.) (1999). *Forms of Mathematical Knowledge. Learning and Teaching with Understanding*. Kluwer Academic Publishers.

- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh, R. and Landau, M. (Eds.). *Acquisition of math concepts and processes* (127–174). London: Academic Press.
- Zeljić, M. i Dabić, M. (2014). Odnos proceduralnog i konceptualnog znanja učenika u procesu ovladavanja postupcima računanja u početnoj nastavi matematike. *Nastava i vaspitanje*. 63 (4), 653–668.
- Zeljić, M. i Ivančević, M. (2019). Algoritamski i konceptualni pristup merenju površine figura. *Inovacije u nastavi*. 32 (1), 64–73. <http://www.doi.org/10.5937/inovacije1901064Z>
- Zeljić, M. (2021). *Učenje i poučavanje matematike – jednakost sa više (ne)poznatih*. Beograd: Učiteljski fakultet.

Извори

- Dejić, M., Milinković, J. i Đokić, O. (2017). *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Kreativni centar.
- Dejić, M., Milinković, J. i Đokić, O. (2017). *Matematika 4: radna sveska za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Kreativni centar.
- *Katalog udžbenika za treći i sedmi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2020). Službeni glasnik Republike Srbije, br. 88/17, 27/18, 10/19, 6/20.
- Maksimović, M. (2016). *Matematika 4: radna sveska za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: BIGZ školstvo.
- Maksimović, M. (2016). *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole. Deo 2*. Beograd: BIGZ školstvo.
- Popović, B., Vulović, N., Anokić, P. i Kandić, M. (2016). *Maša i Raša, Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Klet.
- Popović, B., Vulović, N., Anokić, P. i Kandić, M. (2016). *Maša i Raša, Matematika 4: radna sveska za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Klet.
- *Pravilnik o nastavnom programu za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2005). Prosvetni glasnik, br. 62.
- *Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2006). Prosvetni glasnik, br. 101.
- *Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2018). Prosvetni glasnik, br. 16.
- *Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2019). Prosvetni glasnik, br. 5.
- *Pravilnik o programu nastave i učenja za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja* (2019). Prosvetni glasnik, br. 11.
- Tahirović, S. (2016). *Matematika: udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Novi Logos.
- Todorović O. i Ognjanović S. (2011). *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Zavod za udžbenike.
- Todorović O. i Ognjanović S. (2011). *Matematika 4: vežbanka za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Zavod za udžbenike
- Zarupski, S. (2016). *Matematika: udžbenik za četvrti razred osnovne škole*. Beograd: Eduka.

Прилози

Прилог 1. Протокол за бележење индикатора који указују на врсту знања за запремину тела у уџбеничким задацима

Уџбеник	
I Индикатори концептуалног разумевања	Заступљеност у уџбенику
Мрежа геометријског тела.	
Одређивање запремине тела помоћу мреже и објашњење поступка.	
Појам запремине тела путем просторне визуелизације.	
Запремина тела и његове димензије.	
Објашњен однос запремине тела и његових димензија.	
Појам запремине тела и однос између запремине тела и његових димензија.	
Бирање погодних мерних јединица за тело чија се запремина мери.	
Однос између запремине тела и мерних јединица.	
Број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји.	
Проналажење броја јединичних коцки од којих се тело састоји.	
Начин на који се долази до броја јединичних коцки.	
Појам запремине тела путем просторне визуелизације – број јединичних коцки од којих се геометријско тело састоји.	
Број јединичних коцки и запремина тела.	
Проналажење броја јединичних коцки које су потребне да испуне одређени простор.	
Проналажење запремине тела уз објашњење начина на који се долази до запремине.	
Појам запремине тела путем просторне визуелизације – одређивање запремине тела служећи се низовима јединичних коцки.	
II Индикатори процедуралног знања	Заступљеност у уџбенику
Упознавање мерних јединица за запремину тела од mm^3 до m^3 .	
Односи између мерних јединица и претварање мањих јединица у веће, и обрнуто.	
Одређивање висине тела на основу познатих запремине тела, те дужине и ширине тела.	
Употреба формуле за израчунавање запремине тела.	
Одређивање запремине тела (познате све димензије).	
Израчунавање запремине тела помоћу формуле.	

Summary

The results of the international TIMSS research (2011, 2015, 2019) for Serbia for pupils of the fourth grade of primary school show that their achievement in the field of geometry and measurement is lower than in other areas (such as number). In order to examine the possible causes, we analysed the textbooks for the fourth grade of primary school that were used in schools in Serbia in the year of the research. The aim of the research is to examine two types of knowledge – conceptual and procedural – in mathematics textbooks on the topic of body volume. Based on the research of pupils' achievement in different types of knowledge in measuring length, area, and volume (Tan Şişman, 2010), we formed a list of indicators that indicate opportunities for learning in mathematics textbooks and different types of knowledge about body volume that are presented to the fourth-grade primary school pupils. In the paper, a descriptive method was applied to analyse the content of the textbooks and the interactions among different types of knowledge in mathematical tasks. The main results of the research show that the indicators that are oriented towards the recognition of the conceptual understanding show a significantly lower frequency of occurrence compared to the indicators of procedural knowledge. We see the reason for this in the initial formation of the concept of body volume. The conclusions of the paper point to the concern regarding the interaction among different types of knowledge, and open up questions for further research, especially from the perspective of the research and development of mathematics textbooks in mathematics education.

Keywords: *volume measurement, conceptual and procedural knowledge, mathematics textbook, curriculum, Serbia*