ИВАНА ВЕСЕЛИНОВИЋ[1]
Учитељски факултет у Београду

ОРИГИНАЛНИ НАУЧНИ ЧЛАНАК
UDK: 511.13-057.87
BIBLID: 0353-7129, 25(2020)2, p.217-238

РАЗУМЕВАЊА РАЗЛОМАКА УЧЕНИКА ЧЕТВРТОГ РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Резиме: У раду се разматрају различити приступи разломцима који су основа за концептуално разумевање значења разломака, а то су: 1) однос део–целина; 2) однос две величине, размера; 3) разломак као рачунска операција на интуитивном нивоу; 4) разломак као количник; 5) представљање разломака на бројевној полуправој (Lamon, 1999; Charalambos and Pitta-Pantazi, 2007). Циљ истраживања је испитивање ученичких знања која показују разумевање наведених приступа. У истраживању је коришћена дескриптивна метода и техника тестирања. Резултати истраживања показују да је разумевање разломака ограничено на разумевање полазног приступа „део–целина”. У решавању задатака ученици не користе довољно визуелизацију и моделовање, који олакшавају процес решавања задатака и показују степен разумевања разломака. Постигнућа ученика сагледана су у контексту потреба и начина увођења различитих приступа разломцима у програм и наставну праксу.
Кључне речи: начини разумевања разломака, разломци, део–целина, бројевна полуправа, однос (размера).

Теоријске основе

Предуслов за учење са разумевањем је правилно формирање схема од почетка изучавања садржаја из математике. Како Брунер истиче, разумевање подразумева „да смо у стању да уз једну чињеницу вежемо читав низ других чињеница, које се налазе са првом у блиској и смисаоној вези” (Bruner, 1988: 36). Скемп разликује две врсте разумевања, а то су инструментално и релационо разумевање (Skemp, 1993). Када је реч о разломцима, инструментално разумевање се односи на одређивање вредност одређеног дела целине приме-

1 ivanaveselinovic94@gmail.com

ном правила научених напамет (прво се дели број имениоцем, а затим множи бројиоцем). Релационо разумевање подразумева да су ученици у стању да објасне свој одговор реторички или да га поткрепе одговарајућом иконичком репрезентацијом, као и способосност ученика за откривање насталих грешака уз објашњење где је настала грешка и због чега. Уколико се садржаји о разломцима усвајају кроз релационо разумевање, постоји велика вероватноћа да ће ученици бити у стању да реше проблемске реалистичне ситуације које захтевају познавање разломака. Правилна употреба схема је нужна уколико желимо да ученици поседују релационо разумевање математичких садржаја. Знања која се повезују током изучавања представљају концептуална знања, под којима се подразумева разумевање концепата и односа међу њима и примена процедура (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick, Swafford and Findell 2001; Rittle-Johnson and Schneider 2015). Основна одлика концептуалног знања јесте повезаност знања. За ова знања су битна сва знања са којима су се ученици некада и негде срели, а под условом да се односе на математички садржај који се изучава. Насупрот концептуалном знању јавља се процедурално знање, које се односи на учење дефиниција, процедура, симбола, без претходног осмишљавања значења појмова и поседовање знања о начину коришћења и флексибилног извршавања процедура како би се проблем тачно и ефикасно решио (Zeljić i Dabić, 2014; Kilpatrick, Swafford and Findell 2001; Rittle-Johnson and Schneider 2015). Како би ученици успешно савладали математичке садржаје, потребно је њихово учење организовати тако да се заснива на интеграцији процедуралног и концепуталног учења, односно оспособити их да решавају задатке употребом алгоритама, али уз њихово разумевање. Многа истраживања су се бавила наведеним проблемом испитујући концептуално разумевање кроз упоређивање разломака (Fuchs et al., 2013; Hallett et al., 2012; Hecht and Vagi, 2010, 2012; Niemi, 1996; Resnick et al., 1989; Schneider and Siegler, 2010; Siegler and Pyke, 2014; Siegler et al., 2011; Sprute and Temple, 2011; Stafylidou and Vosniadou, 2004), уз адекватна објашњења које дају ученици, док се друга истраживања баве стратегијама које ученици користе за решавање задатака и тако проверавају концептуално разумевање (Mack, 1995; Siegler et al., 2011; Sielger and Pyke, 2013; Vamvakoussi and Vosniadou, 2004, 2010). Концептуална разумевања математичких појмова се често користе за проверавање дубљег разумевања математичких појмова. Ученици који поседују непотпуна концептуална разумевања разломака могу применити своја знања за решавање специфичних проблема, чиме се ствара основа за развој других објашњења, односно правила, насупрот ученицима који поседују само процедурална знања и приликом решавања задатака се придржавају научених правила која не разумеју, што доводи до грешака (Geller, et al., 2017).

У истраживању које су спровели Хасмен и Мансфајлд (Hasemann and Mansfield, 1995) испитивано је разумевање ученика од 4. до 8. разреда у садржајима о разломцима путем мрежа појмова. Резултати су показали да мреже појмова обезбеђују информације о разумевању појмова и везама између појмова боље него писани текстови. Млађи ученици користе мреже које су мање структурисане и окренуте знањима из свакодневног живота, док старији ученици имају склоност ка коришћењу структурисанијих мрежа и у центар стављају математичке појмове. Пошто је истраживање рађено пре и после обраде наставних садржаја и давања инструкција, показало се да су претходна знања веома важна и да у значајној мери утичу на успешност решавања, док је утицај инструкција слабији. Посредством инструкција ученици уче термине и правила, али без адекватних инструкција не активира се значење појмова (Hasemann and Mansfield, 1995). Значај искуства у усвајању математичких садржаја истичу и други аутори наглашавајући да „увођење садржаја о позитивним рационалним бројевима у почетну наставу математике треба заснивати на претходном знању и искуству и интегрисати га са осталим програмским садржајима наставе математике, али и са другим предметним областима" (Лазић и др., 2015), при чему наведени аутори истичу значај употребе вишеструких визуелних репрезентација које стварају основу за концептуално разумевање појма разломка. Овакав приступ обради садржаја о разломцима омогућава усвајање садржаја о разломцима уз постепено проширивање, при чему се повећава самосталност ученика у решавању проблемских задатака и примена стечених знања у реалистичном контексту (Лазић и др., 2015).

При почетном увођењу разломака, основни приступ који се користи јесте приступ „део–целина" (Lamon, 1999; Mashall, 1993). Он представља основу за учење и разумевање разломака, као и интерпертацију осталих значења разломака (Kieren, 1976). Акценат се ставља на број и еквивалентност делова на које је дата целина подељена. Наведеним приступом се ученици оспособљавају за „уочавања броја делова на које је подељена једна целина, поделу целине на делове и формирање целине од датог дела/делова" (Charalambos and Pitta-Pantazi, 2007: 296). Приступ „део–целина" је погодан за разумевање појмова бројилац и именилац, проширивање разломака и проналажење еквивалентног разломка, што је важно за упоређивање разломака и обављање рачунских операција на разломцима, као и за схватање односа две величине. Како би ученици у потпуности разумели наведено, потребно је користити задатке отвореног типа, односно омогућити откривање различитих начина поделе целине на једнаке делове, као што су делови који имају једнаке површине и конгруентни делови (Čadež, et al., 2018). С друге стране, овај приступ није довољан јер води ка разумевању разломака као дела који је увек мањи од целине (Bonotto, 1993), при чему се занемарују остала значења разломака и не ставара основа за разумевања скупа рационалних бројева.

У литератури Кеирен и Бер (Keiren, 1976; Behr, 1983) предлажу коришћење и других приступа приликом обраде разломака, а то су: однос две величине, разломак као операција и количник и разломак као рационални број уз употребу бројевне полуправе. Различите приступе значењу разломака подржавају и други аутори (Behr, et al., 1983; Freudenthal, 1983; Vergnaud, 1983; Ohlsson, 1988; Behr et al., 1983) наглашавајући значај употребе приступа „део–целина” као основног за разумевање свих значења разломака.

Приступ однос–размера оспособљава ученике за разумевање разломака као односа између различитих величина и упоређивање две различите величине (Lammon, 1993). Даље, доприноси разумевању еквивалентности разломака и разумевању односа две величине (Carraher, 1996). Ово значење разломака је ближе свакодневном искуству ученика и истовремено их оспособљава за процену односа две величине. Истраживање је показалао да ученици често имају проблем да схвате однос две величине (једна величина се мења пропорционално промени друге величине) (Charalambos and Pitta–Pantazi, 2007: 297). Ламон и Машал (Lamon, 1999; Mashall, 1993) истичу идеје које прате овај приступ, а то су: а) идеја стопе, процене – пореде се две количине различите врсте и б) идеја односа – пореде се две величине исте врсте.

Ученици се са разумевањем разломака као рачунских операција и вршењем рачунских операција на разломцима упознају тек у старијим разредима, али их на интуитивном нивоу упознају раније. До тог тренутка одређивање дела ($\frac{2}{3}$) неке величине се ограничава на одређивање једног дела задате величине (трећине једне целине), а затим издвајање одређеног броја делова (два таква дела), што представља множење разломака на инутитивном нивоу. Рационални бројеви се посматрају као функције примењене на неки број, објекат и сл. (Behr et al.,1993; Mashall, 1993). Овај приступ се односи на две мултипликативне операције, где се једна изводи на резултатима друге, које се у почетној настави математике врше преко графичких приказа.

У старијим разредима ученици схватају улогу разломачке црте и изједначавају је са знаком „:” – подељено и тада разломак разумеју као количник два броја (a подељено са b; a, b ϵ N (Z)) (Kieren, 1993). У овом случају дељеник (бројилац) се односи на број узетих делова у (свакој) целини, а делилац (именилац) на број делова на које је подељена једна целина. Истичу се два приступа, а то су: „део–целина” и „количник ситуације”. Код разломака приказаних као „количник ситуација”, који су описали аутори Мек и сарадници (Mack, 2001; Nunes, et al., 2004), именилац означава број прималаца, а бројилац означава број објеката који се деле, док разломак означава количину коју сваки прималац добија, без обзира на то како је целина подељена. Овакав приступ захтева постојање више једнаких целина које се деле, а ученици се оспособљавају за самостално уочавање величина које се стављају у однос.

Представљање разломака на бројевној полуправој помаже ученицима да посматрају разломак као „разломљени број” (Ball, 1993) и доприноси разумевању разломака као рационалних бројева. Разломак представља број, али и вредност која је додељена интервалу. За увођење бројевне полуправе и њено лакше разумевање погодне су мерне јединице за дужину као уводне активности. У почетку се може користити дуж дужине 1dm, на којој се јасно уочава однос дециметара и центиметара као мерних јединица. Подела те дужи на половину, четвртину, петину, десетину дециметра и изражавање тих делова разломком представља добру основу за увођење и разумевање бројевне полуправе и обележавање разломака на њој. Како наводе Кејзер и Травел (Keijzer and Terwel, 2003), веома је важно да се код деце развија осећај за одређивање разломка на бројевној полуправој и осећај за идентификовање разломака на бројевној полуправој која није ограничена бројем 1. „Увођењем разломка као рационалног броја шири се и знање о бројевима и њиховим својствима" (Charalambos and Pitta-Pantazi, 2007: 300). Рационалних бројева има бесконачно много и потребно је да ученици схвате да између два разломка чији су имениоци два узастопна природна броја увек постоји неки број. Акценат треба ставити на дељење једне целине (дужи) на све мање делове уз примену адекватних графичких приказа како би се уочило постојање разломка између два разломка. Претходна истраживања су показала да деца имају тешкоћа када је бројевна полуправа подељена на делове једнаке вишеструком имениоцу датог разломка (Baturo, 2004), као и при представљању разломака на бројевној полуправој следећег изгледа (Baturo, 2004):

За потпуно, концептуално разумевање разломака потребно је да у наставној пракси буду заступљени сви приступи. Ранија истраживања су показала да је у уџбеницима, а и у наставној пракси у највећој мери заступљено разумевање разломака кроз приступ „део–целина" (Pantziara and Philippou, 2012; Castro-Rrodriguez, et al., 2016).

Методолошки оквир истраживања

Предмет овог истраживања су различити начини разумевања разломака у нижим разредима основне школе. Акценат је стављен на могућност интуитивног разумевања различитих приступа разломцима, који нису предвиђени наставним програмом.

Циљ истраживања је испитивање знања ученика која показују различите начине разумевања разломака: део–целина, односа две различите величине, операције, разломак као рационални број и представљање разломака мањих и већих од 1 на бројевној полуправој.

Истраживање има карактер примењеног истраживања. Значај овог истраживања се огледа у доприносу за примену другачијег приступа изучавању садржаја разломака.

У истраживању је коришћена дескриптивна метода и техника тестирања. Тест чини дванаест задатака, који су груписани према приступима разломцима. Узорак истраживања чине два одељење четвртог разреда (49 ученика) једне основне школа из Београда.

Анализа и интерпретација резултата истраживања

Наш први задатак се односио на испитивање могућности ученика за разумевање разломака као дела целине, што смо проверили кроз прва три задатка на тесту. Успешност ученика у графичком представљању означеног дела у облику разломка смо испитали кроз први задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр.1.

Табела бр. 1
Успешност ученика у изражавању означеног дела у облику разломка

	Слика 1.	*Слика 2.*	*Слика 3.*
	Фреквенција	**Фреквенција**	**Фреквенција**
Тачан одговор	36	43	38
Нетачан одговор	4	4	32
Није урађено	9	2	9
УКУПНО	49	49	49

Наши резултати показују да деца имају тешкоће када је именилац који је представљен на графичком приказу једнак вишеструком имениоцу датог разломка, што је у складу са резултатима до којих је дошао Батуро (Baturo, 2004). Ученици су најуспешнији у изражавању означеног дела разломком када је именилац једнак броју делова на које је подељена целина и одговоре најчешће везују за проналажење разломка чији бројилац или именилац одговарају броју означених делова.

Успешност ученика у графичком представљању целине на основу датог дела и подели добијене целине на мање делове је представљена у Табели бр. 2. Овај део истраживачког задатка смо испитали кроз други задатак на Тесту (Прилог 1).

Табела бр. 2
Успешност ученика у графичком представљању целине на основу датог дела

	Представљање целине на основу датог дела	*Подела целине на мање делове*
	Фреквенција	**Фреквенција**
Тачан одговор	46	31
Нетачан одговор	1	13
Није урађено	2	5
УКУПНО	49	49

На основу резултата истраживања може се закључити да ученици разумеју појам разломка, појмове бројилац и именилац, однос између два разломка и имају развијену способност за представљање целине на основу датог дела.

Нетачни одговори (доцртавање четири иста дела) показују да ученици у свести имају формирану идеју о подударности делова на које се дели целина, односно посматрају делове целине као конгруенте, али не разумеју идеју једне целине која се дели и односе између различитих делова целине, што је од суштинског значаја за разумевање разломака мањих и већих од 1. Допуна цртежа од дела до целине одговара приступу „део–целина", док подела на мање делове одговар разумевању разломака као односа две величине (Norton and Wilkins, 2012). Велики проценат ученика успешно решава задатке који се односе на посматрање разломака на наведени начин, што је потврђено и ранијим истраживањима (Charalambous and Pitta-Pantazi, 2007). Овај приступ игра значајну улогу и представља основу за разумевање осталих приступа разломцима, са чиме се слажу и други аутори (Baturo, 2004; Kieren, 1995; Marshall, 1993).

Успешност ученика у упоређивању разломака кроз реалистичну ситуацију смо испитали кроз трећи задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 3.

Табела бр. 3
Успешност ученика у упоређивању разломака

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор представљен и цртежом и разломцима	28
Тачан одговор представљен само разломцима	10
Тачан одговор представљен само цртежом	3
Тачан одговор исказан реторички	2
Тачан одговор дат кроз конкретне примере	1
Нетачан одговор	2
Није урађено	3
УКУПНО	49

Највећи део ученика је решење задатка представио графички, симболички и реторички, што је у складу са тврдњом аутора (Nicolaou and Pitta–Pantazi, 2015) да ученик разуме разломке ако може да их представи графички, симболички и вербално, али и да их препозна у свим овим облицима и конструише одговарајуће цртеже за њих, што представља концептуално разумевање разломака (Geller, et al., 2017). Симболички одговори показује да ученици имају формирану менталну слику о датом појму, док графичка решења показују да процес формирања појма још увек није завршен.

Наш други задатак истраживања односио се на испитивање способности ученика за интуитивно разумевање и вршење рачунских операција са разломцима облика облика $\frac{a}{b}$ (a ≤ b; a, b ≤ 10). Успешност ученика у обављању рачунских операција сабирања и одузимања на интуитивном нивоу смо испитали кроз 4. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 4.

Табела бр. 4
Успешност ученика у обављању рачунских операција – сабирање и одузимање

Одговор	Део чоколаде који је поједен	Део чоколаде који је остао
	Фреквенција	Фреквенција
Тачан одговор представљен цртежом и разломком	1	1
Тачан одговор представљен цртежом	1	1
Тачан одговор представљен као збира разломака и преко цртежа	3	3
Тачан одговор представљен као збира разломака	4	2
Нетачан одговор уз добар цртеж	8	8
Потупно нетачан одговор	22	23
Није урађено	10	11
УКУПНО	49	49

Иако ученици нису упознати са рачунским операцијама сабирање и одузимање разломака, они их обављају тачно уз правилно записивање једнакости и употребу графичких приказа, што показује да их ученици на итнуитвном нивоу разумеју. Непрецизни графички прикази и недоследна подела целина на једнаке делове често су разлог јављања грешке у задацима. Употреба два цртежа ученике удаљава од решења и ствара потешкоће када је потребно спојити цртеже у један цртеж. С друге стране, ученици цртају добре графичке приказе, али због недостатка разумевања односа два разломка јављају се грешке.

Успешност ученика у дељењу разломака на интуитивном нивоу смо испитали кроз 5. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 5.

Табела бр. 5
Успешност ученика у дељењу два разломка

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор без цртежа	19
Тачан одговор са цртежом	4
Непотупн одговор	5
Нетачан одговор	6
Није урађено	15
УКУПНО	49

Највећи број решења ученика је био усмерен на проширивање разломака ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) и одређивање количине воде која се потроши за једну саксију цвећа, што показују интуитивно разумевање односа две величине. Због недостатка знања које се односи на примену рачунских операција, ученици се користе речима и проналажењем еквивалентног разломка, што је добра основа за касније разумевање рачунских операција. Резултати показују да ученици имају потешкоће када је потребно поделити целину на делове различите величине. Када процес формирања појмова није завршен, потребно је користити графичке приказе који омогућавају очигледно решење и интуитивно вршење рачунских операција.

Успешност ученика у дељењу целог броја и разломка смо испитали кроз 6. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 6.

Табела бр. 6
Успешност ученика у дељењу целог броја и разломка

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор	48
Нетачан одговор	1
УКУПНО	49

Уз адекватне графичке приказе ученици разумеју и успешно врше дељење целог броја и разломка на интуитивном нивоу, што је основа за разумевање осталих значења разломака и разломака већих од 1.

Успешност ученика у множењу два разломка на интуитивном нивоу смо испитали кроз 7. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 7.

Табела бр. 7
Успешност ученика у множењу разломака

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор представљен цртежом	7
Тачан одговор представљен цртежом и разломком	3
Тачан одговор представљен цртежом и реторички	4
Нетачан одговор	16
Није урађено	19
УКУПНО	49

На основу резултата може се закључити да ученици успешно примењују постојећа знања на нове ситуације. Издвајање половине од $\frac{3}{4}$ кроз графичке приказе представља множење два разломка, које ученици обављају на интуитивном нивоу. Овакви одговори потврђују тврдњу да ученик разуме разломке ако може да их представи графички, симболички и вербално, али и да их препозна у свим овим облицима и конструише одговарајуће цртеже за њих (Nicolaou and Pitta−Pantazi, 2015). Графички приказ решења без симболичког записа показује да ученици разумеју значење поступка, које манифестују графичким представљањем дате математичке ситуације, што је основа за изражавање исте ситуације симболичким математичким језиком у следећем кораку. С обзиром да ученици нису били изложени инструкцијама, може се приметити разумевање наведеног поступка који изражавају цртежом и реторички, што је основа за коцептуално разумевање рачунских операција са разломцима. Употребом различитих репрезентација, пажња се не усмерава само на процедуре већ и на разумевање значења операција уз способсност њиховог реторичког, симболичког и графичког приказивања (Graber, 1999; Thurtell, et al., 2019).

Наш трећи истраживачки задатак се односио на испитивање могућности ученика за разумевање разломака као односа између две различите величине, односно пропорције. Успешност ученика у разумевању приступа „количник ситуације" смо испитали кроз 8. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 8.

Табела бр. 8

Успешност ученика у разумевању приступа „количник ситуације"

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор за дечаке и девојчице представљен разломком	11
Тачан одговор представљен речима	3
Тачан одговор за дечаке и девојчице представљен цртежом и разломцима	1
Тачан одговор само за дечаке представљен разломком	12
Тачан одговор само за дечаке представљен цртежом и разломцима	4
Нетачан одговор	4
Није урађен	14
УКУПНО	49

Решења ученика показују да они могу да разумеју разломак и као однос две величине и као количник два броја. Само један ученик је решење представио и графички и симболички, што је показатељ потпуног разумевање разломака. Његов одговор приказује идеју стопе коју истичу Ламон и Маршал (Lamon, 1999; Mashall, 1993), а односи се на поређење две количине различите врсте, чиме се истиче однос две величине. Симболички представљено решење показује разумевање разломачке црте као знака „:", што је у складу са тврдњама Киерена (Kieren) да разломак представља количник два броја $\frac{a}{b}$ (Kieren, 1993). Реторички одговори показују да они не разумеју разломке као однос две величине. Решења ученика су настала на основу упоређивања броја кутија и броја деце и процене ко добија већи део, што осликава идеју односа коју истичу Ламон и Маршал (Lamon, 1999; Mashall, 1993).

Успешност ученика у разумевању разломака као односа две различите величине смо испитали кроз 9. задатак на Тесту (Прилог 1) и представљена је у Табели бр. 9а и Табели бр. 9б.

Табела бр. 9а
Успешност ученика у разумевању разломака као односа две различите величине

Већа концентрација поморанџе	
Одговор	Фреквенција
Тачан одговор исказан реторички	21
Тачан одговор представљен цртежом и разломком	4
Тачан одговор представњен разломком и реторички	2
Тачан одговор представњен цртежом и исказан реторички	1
Нетачан одговор	6
Није урађен	15
УКУПНО	49

Због саме конструкције задатка сматрамо да је 21 ученик закључак извео на основу броја чаша поморанџе у оба рецепта (9. задатак на Тесту – Прилог 1). Решење исказано разломком показује да су ученици упоређивали удео сока у оба рецепта, што осликава идеју стопе коју истичу Ламон и Машал (Lamon, 1999; Mashall, 1993). Ниједан ученик није користио симболички запис како би објаснио свој одговор, што показује да ученици не разумеју идеју односа када се од њих очекује да самостално објасне и представе решење. За решењем трагају изван контекста задатка.

Табела бр. 9б
Успешност ученика у разумевању разломака као односа две различите величине

Већа концентрација воде	
Одговор	Фреквенција
Тачан одговор исказан реторички	8
Нетачан одговор	13
Није урађен	28
УКУПНО	49

Симболички и реторички исказано решење показује да ученици на интуитивном нивоу разумеју разломак као однос две величине. С друге стране, мали је проценат ученика који интуитивно разумеју однос две величине, што је потврђено и ранијим истраживањима. Старија деца, која су усвојила правила и алгоритме, овим корпусом замењују своје интуитвне стратегије резоновања и решавање проблема темеље на примени правила (Lo and Watanabe, 1997; Karplus et al., 1983b). Увођење нових математичких садржаја, конкретно садржаја који се односе на појам разломка, треба заснивати на интуитивним знањима ученика (Kieren et al.. 1992; Pitkethly and Hunting, 1996; Mack, 1993), односно надограђивати већ постојеће математичке схеме.

Наш четврти истраживачки задатак се односио на испитивање могућности ученика за представљање разломака на бројевној полуправој, што смо испитали кроз 10. задатак на Тесту (Прилог 1). Успешност ученика у обележавању разломака на бројевној полуправој која је подељена на делове једнаке вишеструком имениоцу датог разломка, представљена је у Табели бр. 10.

Табела бр. 10
Успешност ученика у обележавању разломака на бројевној полуправој која је подељена на делове једнаке вишеструком имениоцу датог разломка

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор	6
Нетачан одговор	25
Није урађен	18
УКУПНО	49

Резултати истраживања потрвђују став аутора да деца имају потешкоће када је бројевна полуправа подељена на делове једнаке вишеструком имениоцу датог разломка (Baturo, 2004).

Успешност ученика у представљању разломака на бројевној правој ограниченој бројем 1 и бројевној полуправој ограниченој бројем 2 је представљена у Табели бр. 11.

Табела бр. 11
Успешност ученика у представљању разломака на бројевној полуправој која је ограничена бројем 1 и бројевној полуправој која је ограничена бројем 2

	Бројевна полуправа ограничена бројем 1		Бројевна полуправа ограничена бројем 2	
Одговор	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
	Фреквенција	Фреквенција	Фреквенција	Фреквенција
Тачан одговор	6	2	2	0
Нетачан одговор	9	4	7	5
Није урађен	34	43	40	44
УКУПНО	49	49	49	49

Резултати показују да ученици нису савладали приступ теми бројевна полуправа иако је његова употреба предвиђена Наставним планом и програмом и од суштинског је значаја за учење и разумевање значења разломака, као и рационалних бројева, што потврђују и ранија истраживања (Siegler et al., 2010). Претходна истраживања су показала да ученици имају велике тешкоће приликом представљања разломака на бројевној полуправој (Novilis-Larson, 1980; Hannula, 2003), а нарочито при представљању разломака на бројевној полуправој ограниченој бројем 2 (Baturo, 2004). Овакве резултате смо добили и у нашем истраживању. Нетачни одговори су у највећој мери резултата посматрања бројевне праве као дужи, односно целине. Погрешно обележавање разломака је последица неразумевања разломка као броја чија је вредност мања од 1.

Успешност ученика у обележавању броја 1 на бројевној полуправој је представљена у Табели бр. 12.

Табела бр. 12
Успешност ученика у обележавању броја 1 на бројевној полуправој

Одговор	Прва бројевна полуправа	Друга бројевна полуправа	Трећа бројевна полуправа
	Фреквенција	Фреквенција	Фреквенција
Тачан одговор	9	7	4
Нетачан одговор	7	7	8
Није урађен	33	35	37
УКУПНО	49	49	49

Тачни одговори су показатељ разумевања разломка као броја једнаког, мањег или већег од 1. Најчешће грешке су настале због фиксирања положај броја 1 на бројевној полуправој, што показује да ученици не разумеју да јединични подеок „није никако и ничим фиксиран на бројевној полуправој" (Дикић, 2010).

Наш пети задатак истраживања се односио на испитивање могућности ученика за проналажење разломка који се налази између два разломка (11. задатак на тесту – Прилог 1). Успешност ученика у проналажењу разломка између два разломка је представљена у Табели бр. 13.

Табела 13.
Успешност ученика у проналажењу разломка између два разломка

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор представљен на бројевним полуправама и изражен у разломцима	2
Тачан одговор представљен само на бројевној полуправој	7
Тачан одговор изражен разломком без приказа на бројевној полуправој	1

НЕ као одговор на прво питање у задатаку	10
ДА као одговор на прво питање у задатку без проналажења разломка	2
Није урађен	27
УКУПНО	49

Став аутора да се увођењем разломака као рационалног броја шири и знање о бројевима (Charalambos and Pitta-Pantazi, 2007: 300) су показали и наши резултати истраживања. Код једног дела ученика постоји развијена свест о томе да се поделом целине на мање делове добија део/више делова, односно разломак који се налази између трећине и половине, што показује да ученици интуитивно разумеју наведене особине рационалних бројева.

Наш шести истраживачки задатак се односио на испитивање могућности ученика за разумевање разломака већих од 1 на основу постојећих знања, што смо испитали кроз 8. задатак под б) и 9. задатак под б) на Тесту (Прилог 1). Успешност ученика у разумевању разломака већих од 1 на примерима из реалног окружења је представљена у Табелама бр. 14а и 14б.

Табела бр. 14а
Успешност ученика у разумевањеу разломака већих од 1
на основу деобе више целина

Одговор	Фреквенција
Тачан одговор исказан разломком и представљен на цртежу за дечаке и девојчице	3
Тачан одговор исказан реторички за дечаке и девојчице	1
Тачан одговор исказан разломком и представљен на цртежу само за дечаке	6
Тачан одговор исказан разломком само за дечаке	7
Нетачно урађен	2
Није урађен	30
УКУПНО	49

Одговор 1 и $\frac{1}{2}$ показују разумевање разломака већих од 1 и способност правилног симболичког записивања на основу постојећих знања. Графички и реторички исказано решење показује разумевање разломака већих од 1 на интуитивном нивоу, што је основа за увођење разломака већих од 1. Одговори $\frac{1}{2}$ и 2 кутије колача показује да ученик у свести има формирану идеју о разломцима већим од 1, коју не уме да изрази симболички. Ученик чији је одговор $\frac{2}{3}$, у свести има идеју о томе које величине треба ставити у однос, али не зна правилно да их

стави у однос, што је добра основа за увођење значења разломака као односа две величине, као и разломака већих од 1.

Табела бр. 14б
Успешност ученика у разумевању разломака већих од 1 на основу попуњавања целине

Одговор	Фреквенција
Одговор „ДА”	9
Одговор „НЕ”	0
Није урађен	40
УКУПНО	49

Ниједан ученик није покушао да изрази укупну количину сока у децилитрима и упореди је са запремином бокала. Може се закључити да ученици не успостављају везу између података датих у задатку, већ се фокусирају само на конкретно питање не узимајући у обзир остале сегменте задатка, што доводи до нетачних одговора.

Успешност ученика у разумевању разломака већих од 1 преко поделе две дужи различите дужине представљена је у Табелама бр. 15а и 15б.

Табела бр. 15а
Успешност ученика у подели дужи на $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$

Одговор	Фреквенција
Тачно означени сви делови дужи	8
Тачно означене $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ дужи AB и $\frac{1}{2}$ дужи AC	1
Тачно означена само $\frac{1}{2}$ дужи AB	1
Није урађен	39
УКУПНО	49

Табела бр. 15б
Успешност ученика у представљању дела једне дужи преко друге дужи разломком

Одговор	$\frac{1}{2}$ дужи AB	$\frac{1}{2}$ дужи AC	$\frac{3}{4}$ дужи AB	$\frac{3}{4}$ дужи AC
	Фреквенција	Фреквенција	Фреквенција	Фреквенција
Тачан одговор	8	9	0	2
Нетачан одговор	6	5	55	7
Није урађен	35	35	44	40
УКУПНО	49	49	49	49

Анализа резултата истраживања је показала да су ученици успешнији у изражавању дела веће целине преко мање целине него у изражавању дела мање целине (краће дужи) преко веће целине (дуже дужи). Нетачни одговори су настали као последица неадекватних цртежа дужи или покушаја да се без цртања дужи део једне дужи изрази преко друге дужи. На основу извршене анализе резултата може се закључити да је за увођење разломака већих од 1 погодније кренути од реалистичних ситуација него од поделе дужи. Ове ситуације су ближе искуству ученика, очигледније су им, што олакшава процес превођења реалног у математички контекст.

Резулатати до којих смо дошли током истраживања показују да ученици у највећој мери покушавају да ураде задатке који су слични задацима које су радили у уџбенику и на часовима математике, док остале задатке прескачу јер их не разумеју, што је последица инструменталног учења. До сличних резултата су дошли и други аутори, код којих је потврђено да ученици најбоље разумеју први приступ „део–целина“ (Hannula, 2003; Charalambous and Pitta-Pantazi, 2007; Ni, 2001; Tunç-Pekkan, 2015), док су најслабије резултате постигли у делу који се односи на разумевање разломака као мере, односно код представљања разломка на бројевној правој, што показује неразумевање разломка као рационалног броја (Charalabous and Pitta-Pantazi, 2007, Tunç-Pekkan, 2015). У нашем истраживању најслабије је разумевање разломака као односа две величине и разломака већих од 1, што је последица незаступљености наведених појмова у настави. Такође, мали проценат ученика успешно представља разломке на бројевној полуправој, што показује да овај приступ, иако је заступљен у уџбеницима и Наставном програму, у пракси није довољно афирмисан. Иако је мали број ученика покушао да уради „нетипичне” задатке, на основу њихових одговора може се закључити да ученици могу успешно разумети и остала значења разломака, само их је потребно постепено уводити уз примену одговарајућих методичких поступака у раду и коришћењем адевкатних репрезентација. Значај употребе различитих репрезентација и приступа разломцима којима се доприноси проширивању стечених знања о разломцима у 5. разреду, потврђен је и истраживањем код нас (Лазић и др., 2015), при чему је истакнут и значај употребе бројевне полуправе у циљу разумевања разломака као количника два броја, разломака већих од 1, као и рационалних бројева у целини (Лазић и др., 2015). Значај употребе бројевне полуправе је наведен и у нашем истраживању, при чему је доказано слабо разумевање и заступљеност бројевне полуправе у настави. Задаци који се односе на рачунске операција се лакше решавају коришћењем модела и визуелизацијом, али ученици их користе у малом проценту. Генерално, ученици не користе довољно визуелизацију и моделовање у решавању задатака, који су од суштинске важности за разумевање свих значења разломака, односно разумевање разломака као рационалних бројева, чиме се ствара основа за разумевање скупа рационалних бројева у целости.

Закључак

Разумевање разломака на различите начине подстиче мишљење деце и оспособљава их да самостално долазе до решења када се сретну са проблемским ситуацијима из области разломака. Поред тога, припрема их за даље разумевање и учење разломака са разумевањем, без било каквих потешкоћа, већ уз потпуно разумевање сваке операције која се изводи на њима. Циљ нашег истраживања био је да испитамо знања ученика која показују различите начине разумевања разломака

Целокупан поглед на истраживање и резултате доводи до закључка да је разумевање разломака ограничено на разумевање полазног приступа „део–целина”. При томе и разумевање овог приступа је недовољно и потребно је радити на побољшању. У решавању задатака ученици не користе довољно визуелизацију и моделовање, који олакшавају процес решавања задатака, а и показују степен разумевања разломака. Ученици у највећој мери покушавају да ураде задатке који су слични задацима које су радили у уџбенику и на часовима математике, док остале задатке прескачу јер их не разумеју, што је последица инструменталног учења. Ученици могу разумети и остале начине разумевања разломака (однос две величине, рачунске операције, бројевна полуправа), само их је потребно постепено уводити.

Разломци су врста рационалних бројева и разумевање значења разломака је основа за разумевање рационалних бројева, а касније и реалних бројева. Из тог разлога потребно је радити на развијању и осталих начина разумевања разломака. Пре свега, акценат треба ставити на оспособљавање и мотивисање учитеља да у свом наставном раду користе што разноврсније активности и задатке који ће обухватити све наведене начине разумевања разломака. То ће допринети разумевању свих значења разломака. Један од начина да се ови садржаји уведу у наставу јесте њихова имплементација у Наставни програм са јаснијим и детаљнијим објашњењима, што би помогло и ауторима уџбеника и учитељима.

Овим радом смо описали тренутно стање у нашим школама и могућности ученика за разумевање других значења разломака. Истраживање представља добру основу за даље експериментално истраживање.

Литература

Дејић, М. и Егерић М. (2010). *Методика наставе математике*. Београд: Учитељски факултет.

Дикић, Т. (2013). Приказивање разломака на бројевној полуправој. *Настава математике*, XLVIII (3−4), 8–13.

Мићић, В. (2010). Од природних до реалних бројева у старијим разредима основне школе. *Настава математике*, LV (1−2), 20−29.

Мићић, В. и Вуковић, Љ. (1992). Један начин увођења разломака. *Настава математике*, XXXVIII (1), 8–13.

Geller, E. H., Son, J. Y. and Stigler, J. W. (2017). Conceptual explanantions and understanding fraction comparisons. *Learning and Instruction*, 52, 122−129.

Hannula, M. S. (2003). Location fractions on number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, and J. T. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 17–24). Honolulu: PME

Keijzer, R., and Terwel, J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 53–73.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–668). Charlotte: Information Age.

Лазић, Б., Маричић, С. и Милинковић, Ј. (2015). Пропедевтичко учење разломака засновано на интеграцији садржаја у почетној настави математике. *Настава и васпитање*, вол. 65, бр. 4, 679–695.

Mamede, E. (2009). *Early Years Mathematics – The Case of Fractions*. Преузето са сајта 20.3.2018. године: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg14-08-mamede.pdf

Nicolaou, A. and Pitta-Pantazi, D. (2015). *A new theoretical model for understanding fractions at the elementary school*. University of Cyprus. Преузето са: https://www.researchgate.net/publication/262057950_A_new_theoretical_model_for_understanding_fractions_at_elementary_school (10.3.2018. године)

Charalambos Y. C. and Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293–316.

Čadež Hodnik, T. and Kolar Manfreda, V. (2012). How fifth-grade pupils reason about fractions: a reliance on part-whole subconstructs. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 335–357.

Skemp, Richard (1993). *Mahtematics in the Primary School*. London: Routledge Falmer

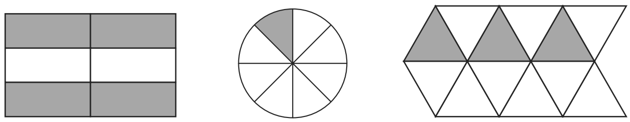
Thurtell, E., Forrester, T. and Chinnappan, M. (2019). Building conceptual knowledge of fraction operations among pre-service teachers: Effect of a representation-based teaching approach within a teacher education program. *Mathematics Teacher Education and Development*, Vol. 1, 100−124.

Understanding fractions in the fourth grade of elementary school

Summary: In the paper is considered about the different approaches of fractions that are the basic for conceptual understanding all meanings of the fractions: 1) the part-whole relationship; 2) a relationship of two sizes,of scale; 3) a fraction as an operation resulting from the combination of two multiplicativeoperations at an intuitive level; 4) a fraction as an amount (Lamon, 1999; Charalambos andPitta-Pantazi, 2007). The aim of the research is to test knowledge of students that shows understanding of the above approaches. In the study was used a descriptive test method and techigue. The results of the research show that understanding the fractions is limited with understanding the part-whole starting approach. In solving problems, students don`t use e visualization and modeling to facilitate the process of solving problems and show a degree of understanding of the fractures. The student's achievements are viewed in the context of the needs and ways of introducing different approaches to fractions into the curriculum and teaching practice.
Keywords: the ways of understanding fractions, breaks, part whole, number rights, relationship (difference).

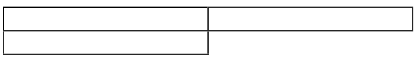
Прилог – Тест истраживања

1. Повежи слику са одговарајућим разломком, који је представљен датом сликом.



$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{2}{3}$$

2. На слици су приказане $\frac{3}{4}$. Нацртај цело, а затим обележи $\frac{5}{8}$.



3. Марко и Ана имају свако по једну чоколаду исте величине. Марко је поделио чоколаду на два једнака дела и појео један. Ана је поделила на три дела и појела један. Ко је појео више, Марко или Ана? Зашто тако мислиш? Резултате напиши у облику разломка и представи цртежом.

4. За рођендан сам добила чоколаду. Јуче сам појела трећину чоколаде, данас сам појела још $\frac{3}{6}$ чоколаде. Колики део чоколаде сам појела? Колики део чоколаде ми је остао да поједем? Резултате напиши у облику разломка и представи цртежом.

5. За заливање цвећа Мина сваки дан употреби $\frac{1}{2}$ l воде. Ако је за једну саксију потребно $\frac{1}{4}$ l воде, колико саксија цвећа Мина залије сваки дан? Резултат напиши у облику разломка и представи цртежом.

6. Маја има 5 јабука и жели да их подели са својим другарима тако да свако добије по половину јабуке. Колико има деце?

7. Никола је наручио пицу. Када је отворио пицу, унутра су се налазиле $\frac{3}{4}$ пице. Он је појео половину те пице. Колико парче пице је појео Никола? Резултат напиши у облику разломка и представи цртежом.

8. а) Јана је на рођендан позвала 3 дечака и 7 девојчица. Јанина мама је купила за дечаке 1 кутију колача, а за девојчице 3 кутије колача. Да ли ће дечаци и девојчице добити исту количину колача? Образложи свој одговор.

У облику разломка напиши колики део кутије колача ће добити сваки дечак, а колики део свака девојчица.

Девојчице су поделиле сваку кутију колача на једнаке делове. Представи цртежом поделу кутија колача на једнаке делове.

На цртежу је приказана једна кутија колача. Прикажи и упореди део колача који је добио сваки дечак и део колача који је добила свака девојчица. Резултат напиши у облику разломка.

Дечаци: Девојчице:

б) На рођендан су дошла 2 дечак и 2 девојчице. Ко је добио више колача, дечаци или девојчице? Образложи свој одговор.

У облику разломка напиши колики део кутије колача је добио сваки дечак, а колики део свака девојчица. Представи решење цртежом.

Дечаци:

Девојчице

На следећем цртежу је приказана само једна кутија колача. Представи део који је добио сваки дечак и део који је добила свака девојчица.

Дечаци: Сваки дечак је добио__кутије колача.

Девојчице: Свака девојчица је добила__кутије колача.

9. Маја и Миша имају рецепте по којима праве сок.

Мајин рецепт: 2 чаше поморанџе – 4 чаше воде

Мишин рецепт: 4 чаше поморанџе – 6 чаша воде

Мајин рецепт Мишин рецепт

а) Наранџастом бојом обоји део који представља сок од поморанџе, а плавом бојом делове који се односе на количину воде.

− По Мајином рецепту добијени сок садржи укупно ______ чаша течности. По Мишином рецепту добијени сок садржи укупно ______ чаша течности.

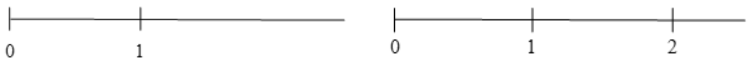
− Чији би рецепт изабрао ако желиш да направиш сок који садржи већу количину поморанџе? Зашто би одабрао/ла тај рецепт? Свој одговор представи цртежом и напиши у облику разломка који део добијених сокова чине „поморанџе" без воде.

− Да ли би правио сок по истом рецепту ако желиш да направиш већу количину сока, а да потрошиш мању количину поморанџи? Зашто?

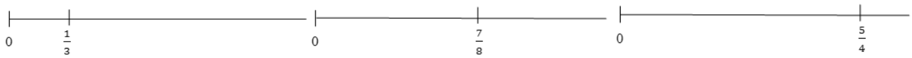
б) У бокал може да стане 14dl течности. Да ли би могао/ла да правиш здравији сок у овом бокалу? Образложи свој одговор и представи га цртежом. (1 чаша = 200ml)

10. а) На бројевној полуправој обележи $\frac{4}{5}$.

б) На свакој бројевној полуправој обележи $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$.



в) На бројевним полуправама обележи број 1.



11. а) Да ли постоји разломак између $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$? Користи бројевне полуправе приликом тражења решења и покушај да резултате представиш на њима.

12. а) Нацртај дуж AB=1dm. Обележи $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ те дужи. Затим нацртај дуж AC=2dm тако да садржи тачку B. Обележи $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ дужу AC.

б) Допиши на празним линијама одговарајући разломак.

$\frac{1}{2}$ дужи AB = ___ дужи AC $\qquad$ $\frac{1}{2}$ дужи AC = ___ дужи AB

$\frac{3}{4}$ дужи AB = ___ дужи AC $\qquad$ $\frac{3}{4}$ дужи AC = ___ дужи AB

в) На бројевној полуправој и представи решења која си добио под б).