

RACIONALIZACIJA EKSPERIMENTALNIH ISTRAŽIVANJA PRIMENOM TEORIJE VIŠEFAKTORNOG EKSPERIMENTA

Dr Velibor MARINKOVIC

Kategorizacija rada: ORIGINALNI NAUČNI RAD

Recenzent: Prof. dr. Miroslav Plančak

Rad primljen: 05.07.2007.

Adresa:

Mašinski fakultet

Niš, A. Medvedeva 14

Rezime:

U radu su na konkretnom primeru prikazana preimućstva teorije višefaktornog planiranja eksperimenta u odnosu na tradicionalni jednofaktorni eksperiment. Znacajna prednost se odnosi na minimizaciju materijalnih i vremenskih gubitaka (utrošaka) pri realizaciji konzistentno planiranog eksperimenta. Pri tome je svaka proizvoljnost i subjektivnost eksperimentatora isključena.

Izborom adekvatnih tipova eksperimentalnih planova i matematičkih modela moguće je broj neophodnih (serija) opita dodatno redukovati. S druge strane, primenom teorije planiranja eksperimenta moguće je egzaktno utvrditi kvantitativni i kvalitativni uticaj svakog pojediniog faktora i njihovih interakcija na funkciju cilja (izlaz).

Osim navedenog, teorija (višefaktornog) planiranja eksperimenta omogućava i veoma racionalnu optimizaciju nedovoljno istraženih (tehnoloških i dr.) procesa.

Ključne reci: planiranje eksperimenta, uticajni faktori, funkcija cilja, minimalni troškovi

1. U V O D

Sve do dvadesetih godina prošlog veka plan i program eksperimentalnih istraživanja zasnivao se na iskustvu, intuiciji, poznavanju problema i primitivnih eksperimentalnih metoda.

Tih godina se pojavljuju radovi engleskog naučnika R.Fišera, koji razvija metod višefaktorne statističke (regresione i disperzione) analize. Time je "jednofaktorni" metod planiranja eksperimenta i obrade eksperimentalnih rezultata umnogome izgubio na znacaju [1].

Kvalitativni skok u razvoju (matematičke) teorije planiranja višefaktornog eksperimenta nastao je početkom druge polovine prošlog veka. Najveći doprinos razvoju ove teorije dali su G.P.Boks sa svojim saradnicima [2], [3] i kasnije V.V.Nalimov sa svojim saradnicima [4], [5].

Naime, pojavom ove teorije prekinuta je isključiva primena koncepcije "jednofaktornog" eksperimenta, čija se suština sastoji u tome da se u toku eksperimenta menja (varira) samo jedna ulazna velicina (uticajni factor, nezavisno promenljiva) i utvrđuje njen uticaj na izlaznu veličinu (rezultat merenja, odziv, funkciju cilja, zavisno promenljivu), dok se svi ostali faktori drže fiksirani na nekom izabranom nivou, a zatim postupak sukcesivno ponavlja za ostale uticajne faktore, sve dok se ne pretraži ceo eksperimentalni prostor. Ovakav eksperiment se tretira kao pasivni eksperiment.

S druge strane, teorija planiranja eksperimenta omogućava pripremu, fizicku realizaciju eksperimenta i obradu i analizu eksperimentalnih rezultata po unapred utvrđenom planu. Samom procedurom se može aktivno upravljati, pa se zato eksperiment koji se realizuje na bazi ove teorije svrstava u aktivne eksperimente.

Suštinska razlika u odnosu na koncepciju "jednofaktornog" eksperimenta ogleda se u tome što teorija planiranja eksperimenta omogućava variranje uticajnih faktora na različitim nivoima simultano, odnosno u svakoj narednoj seriji opita.

U tom smislu teorija planiranja eksperimenta predstavlja kvalitativno nov pristup u teorijsko-eksperimentalnoj analizi i optimizaciji složenih procesa (sistema, objekata), sa univerzalnom primenom i nizom prednosti u odnosu na koncepciju i praksu "jednofaktornog" metoda (*one factor at a time method*).

Osnovne karakteristike i prednosti teorije planiranja eksperimenta (koje dolaze narocito do izražaja kod složenih objekata istraživanja, sa većim brojem uticajnih faktora) su sledeće:

- minimalni broj potrebnih (serija) opita,
- maksimalna količina informacija iz datog broja opita,
- sukcesivno izvođenje eksperimenta u etapama (korak po korak), iduci od jednostavnijih planova ka složenijim planovima,

- jednostavna statisticka (regresiona i disperziona) analiza eksperimentalnih rezultata,
- mogućnost kvalitativne i kvantitativne ocene dejstva svakog uticajnog faktora (i, eventualno, njihovih interakcija) na funkciju cilja,
- laka optimizacija procesa (sistema) koji je predmet istraživanja, na osnovu dobijenog empirijskog (regresionog) modela funkcije cilja, koja obuhvata ceo eksperimentalni proctor,
- minimalni vremenski i materijalni gubici (troškovi) za realizaciju eksperimenta,
- eliminisanje subjektivnog uticaja istraživača (eksperimentatora) itd.

2. OBIM EKSPERIMENTA

Jedna od najznacajnijih prednosti teorije planiranja eksperimenta jeste maksimalna redukcija broja potrebnih (serija) opita, bez smanjenja kolicine i kvaliteta informacija, tako da se mogu izvesti validni i objektivni zaključci.

Inace, eksperiment se može realizovati kao (randomizovani) sled pojedinačnih opita ili u serijama opita, u kojima se opiti, pojedini ili svi, ponavljaju isti ili razliciti broj puta.

Na broj (serija) opita direktno uticu:

- vrsta matematickog modela,
- broj izabranih uticajnih faktora,
- nivoi variranja uticajnih faktora,
- tip plana eksperimenta.

Izbor matematičkog modela se vrši u početnoj fazi planiranja eksperimenta i predstavlja njen najznacajni segment, bez obzira na krajnji cilj preduzetih istraživanja.

Kvalitet i tacnost matematickog modela (funkcije cilja), odnosno regresione jednacine, ne zavisi samo od složenosti izabrane funkcije (polinoma), vec i od napred navedenih cinilaca.

Složenost matematickog modela (cisto sa teorijskog aspekta) se povecava sa povecanjem broja izabranih uticajnih faktora, što prouzrokuje veci broj (serija) opita, složeniju eksperimentalnu proceduru, složeniju i dugotrajniju obradu i analizu eksperimentalnih rezultata i, u krajnjem bilansu, poskupljenje preduzetog istraživanja.

Medutim, složeniji matematički modeli obebeđuju veću tačnost u predikciji ponašanja istraživanog procesa (sistema) u izabranom eksperimentalnom domenu (eksperimentalnom hiper-prostoru).

S druge strane, neopravdana redukcija broja uticajnih faktora (zbog nedovoljnog znanja ili

smanjenja troškova istraživanja) može isključiti i pojedine faktore (i njihove interakcije) znacajne za funkcionisanje datog sistema (objekta, procesa), što može smanjiti tacnost matematickog modela i dovesti do izvođenja pogrešnih zaključaka pri analizi eksperimentalnih rezultata.

Ocigledno, selekcija uticajnih faktora predstavlja veoma važan segment u proceduri eksperimentalnih istraživanja.

Ukoliko eksperimentator ne poseduje verodostojne (apriorne) informacije o stepenu uticaja pojedinih faktora na funkciju cilja, neophodno je takve cinjenice utvrditi prethodnim eksperimentom. U te svrhe su razvijeni posebni statistički metodi, kao i specijalni metodi (planovi) u okviru opšte teorije planiranja eksperimenta, o čemu će kasnije biti reci.

Inace, broj (serija) opita (N) se drastično povecava sa brojem uticajnih faktora, prema relacijama:

a) za variranje faktora na dva nivoa,

$$N = 2^k \quad (1.a)$$

b) za variranje faktora na tri nivoa,

$$N = 3^k \quad (1.b)$$

gde je:

k - broj uticajnih faktora.

Relacije (1) važe za slucaj da se svi uticajni faktori variraju na isti nacin, istovremeno po svim osama k -tog eksperimentalnog hiper-prostora. Takode, navedene relacije se odnose na potpuni faktorni plan, kod kojeg su zastupljene sve nepovratne kombinacije nivoa uticajnih faktora, te se dejstvo pojedinih faktora i svih njihovih interakcija ocenjuju nezavisno.

Znacajno smanjenje broja (serija) opita može se postici primenom parcijalnih faktornih planova (polu-replika, cetvrt-replika i dr.), za koje vaze relacije:

a) za variranje faktora na dva nivoa,

$$N = 2^{k-p} \quad (2.a)$$

b) za variranje faktora na tri nivoa,

$$N = 3^{k-p} \quad (2.b)$$

gde je:

p - broj linearnih (glavnih) efekata

pridruženih efektima medjudejstva.

Primena parcijalnih faktornih planova je ponekad neophodna, na primer, kada je broj opita iz nekog razloga ogranicen. Nekada za zadati broj opita nije moguće formirati nijednu regularnu repliku, te se mora precu na objedinjavanje više replika u jednu tzv. neregularnu repliku [5],[6].

Za parcijalne faktorne planove je poznato da njihova pripadna plan-matrica zadržava svoja osnovna svojstva, ali u izvesnoj meri i gubi od informativnog sadržaja.

Najznacajnija negativna posledica toga je da se parametri matematickog modela ne mogu ocenjivati nezavisno. Korelacija parametara matematickog modela može dovesti do pogrešnog zaključka o njihovom kvantitativnom i kvalitativnom uticaja na funkciju cilja (odziv, izlaz). Zato se pri formiranju replika cesto postavlja zahtev da se izbor generatora (kontrasta) izvede tako da se najuticajni efekti ocenjuju nezavisno od interakcija. Ovde treba naglasiti da se parcijalni planovi istoga tipa, odnosno iste tzv. rezolucije mogu formirati na razlicite nacine, sa razlicitim plan-matricama.

Na primer, za formiranje polu-replike 2^{5-1} na raspolaganju su 22 varijante, a za cetvrt-repliku 2^{5-2} na raspolaganju je 12 varijanti. Razliciti parametri regresione jednacine, po intenzitetu i algebarskom predznaku, jesu posledica napred navedenog. Problem je još složeniji kod složenijih replika (sa više generatora). Zbog toga korišćenje parcijalnih faktornih planova zahteva dublje poznavanje teorije planiranja eksperimenta. Detalji vezani za parcijalne faktorne planove i njihova primena mogu se naci u literaturi [6],[7],[8],[9].

Da bi broj (serija) opita bio prihvatljiv sa stanovišta racionalnosti eksperimenatlnih istraživanja, sa retkim izuzecima, potpuni faktorni plan se primenjuje za relativno mali broj uticajnih faktora ($k \leq 4$). Ilustrativan primer za planove prvog reda dat je u tablici 1.

Treba imati u vidu da je za potrebe disperzione analize (ocena signifikantnosti koeficijenata regresione jednacine, ocena adekvatnosti matematickog modela) neophodno ponavljanje opita u pojedinim tackama eksperimentalnog hiper-prostora.

Sistemi ponavljanja opita mogu biti sledeci:

1. Ponavljanje opita n_0 puta samo u centralnoj tacki plana.
2. Ravnomerno ponavljanje opita n puta u svakoj tacki eksperimentalnog prostora ("paralelni" opiti).
3. Neravnomerno ponavljanje opita n_u ($u=1, 2, 3, \dots, N$) puta u pojedinim temenima hiperkuba (eventualno, samo u jednoj tacki).

Treci po redu sistem ponavljanja opita se retko primenjuje, odnosno samo onda ako to nije moguće izvesti iz tehnickih razloga ili ako je ponavljanje pojedinih opita ekonomski nedopustivo.

Kod prvonavedenog sistema ponavljanja opita ukupni broj (serija) opita u relacijama (1) i (2) se

povecava za n_0 .

Što se tiče nivoa variranja uticajnih faktora njihov uticaj na broj (serija) opita je ocigledan iz relacija (1) i (2).

Zato se variranje uticajnih faktora na tri nivoa primenjuje, po pravilu, za složenije (nelinearne) matematicke modele i planove višeg reda. Tada se, medutim, ukupan broj opita odreduje na specifičan način. Na primer, za simetricne kompozicione planove (ortogonalne, rotatabilne) broj opita iznosi:

$$N = N' + n_\alpha + n_0 = 2^{k-p} + 2k + n_0 \quad (p \geq 0) \quad (3)$$

gde su:

N' - broj serija opita u jezgru plana (plan 1. reda),

n_α - broj "zvezdanih" tacaka,

n_0 - broj opita u centru plana.

Broj opita u centru plana se kod planova prvog reda usvaja ($n_0 = 2 \div 5$), dok se kod planova drugog reda odreduje saglasno tipu plana. Na primer, za simetricne rotatabilne kompozicione planove važi obrazac:

$$n_0 = 4(\sqrt{N'} + 1) - 2k \quad (4)$$

Za ove planove "zvezdane" tacke nalaze se na sledecem odstojanju od centra plana:

$$\alpha = \sqrt[k]{N'} = 2^{(k-p)/4} \quad (5)$$

Iz napred navedenog se vidi da su u teoriji planiranja eksperimenta razvijeni planovi prvog i planovi drugog reda.

Planovi prvog reda se vezuju za linearne i kvazilinearne matematicke modele, kao i za stepene, eksponencijalne i druge funkcije, koje se logaritmovanjem mogu svesti na linearne [9].

U inženjerskoj praksi ubedljivo najširu primenu našli su Boks-Vilsonovi ortogonalni planovi prvog reda.

U Tab.1. dat je uporedno broj opita i broj parametara matematickog modela za planove prvog reda (tipa 2^k , odnosno 2^{k-p}).

Kao što je napred pomenuto primena ovih planova i modela za veliki broj uticajnih faktora nije racionalan. Za odabiranje signifikantnih uticajnih faktora u složenom procesu (objektu, sistemu) u teoriji planiranja višefaktornog eksperimenta su na raspolaganju specijalni planovi (*screening designs*), kao što su Plaket-Barmenovi planovi. Ovi planovi spadaju u planove prvog reda, za matematicki model i vidu (ciste) linearne funkcije, kod kojih broj opita tacno odgovara broju

koeficijenta nepoznate regresione jednacine (koje treba odrediti), dakle, za njih važi sledeća relacija:

$$N = k + 1 \quad (6)$$

U tom smislu ovakvi planovi nazivaju se zasíceni planovi.

Za kvadratne (nelinearne) matematičke modele razvijeni su mnogi planovi drugog reda (kompozicioni, nekompozicioni i dr.).

U opštem slučaju broj opita mora da zadovolji sledeću (ne)jednadbinu:

$$N \geq C_{k+2}^k = \frac{(k+2)!}{k!2!} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (7)$$

Broj opita je, po pravilu, veći od najmanjeg potrebnog broja, zbog specifičnosti njihove strukture.

Da bi se broj opita redukovao, mnogi autori su razvili specijalne planove (Tab. 2.).

U istom cilju planovi drugog reda su tako komponovani da nije neophodno ponavljanje opita, osim kog nekih (obično, u centralnoj tacki plana).

Od planova drugog reda najširu primenu su našli Boksovi simetrični kompozicioni planovi. Ovi planovi su dobili naziv otuda što se dobijaju dopunom planova prvog reda. Drugim rečima, oni se komponuju na osnovu planova prvog reda (potpunih, parcijalnih), koji cine "jezgro" plana, dodavanjem određenog broja na poseban način raspoređenih tacaka (prema tipu kompozicionog plana) u eksperimentalnom prostoru, koje se nazivaju "zvezdane" tacke. Ove tacke se raspoređuju, po pravilu, simetrično oko centra plana, pa se ovi planovi zovu još i centralni kompozicioni planovi drugog reda.

Ovi planovi su našli najširu primenu u praksi upravo zato što koriste sve informacije i eksperimentalne rezultate dobijene prethodnom primenom planova prvog reda i (kvazi)linearnih matematičkih modela. Jasno je da kompozicione planove treba primeniti tek kada se analizom utvrdi da su (kvazi)linearni modeli neadekvatni.

Prema tome, za realizaciju kompozicionih planova potrebno je sprovesti još dodatnu seriju opita u "zvezdanim" tackama i u centru plana (ukoliko nisu realizovani u prethodnoj eksperimentalnoj proceduri). Korišćenje ovih planova, odnosno procedure koja se odvija u etapama je očigledna.

Direktna primena planova drugog reda i složenih matematičkih modela može proizvesti nepotrebne troškove i vremenske gubitke, s obzirom na veći broj potrebnih opita.

S druge strane, poznata je činjenica da se mnogi složeni procesi (objekti, "difuzni" sistemi) mogu uspešno modelovati primenom planova prvog reda i (kvazi)linearnih matematičkih modela. Takode, primena planova drugog reda je ponekad otežana zbog potrebe izvođenja eksperimenta u "zvezdanim" tackama, čije koordinate obično nisu celi brojevi. Najzad, regresiona i disperziona analiza su znatno složenije, te je ponekad neophodna primena računara.

3. ANALIZA KONKRETNOG PRIMERA

Projektovanje i usavršavanje konvencionalnih i osvajanje novih procesa obrade materijala deformisanjem (OMD) zasniva se na poznavanju mehaničkih i složenih reoloških svojstava materijala (metala, legura) u različitim uslovima deformisanja. To je i osnovna pretpostavka za uspešno modelovanje i optimizaciju tehnoloških procesa OMD i dublje izučavanje prirode plastičnog deformisanja.

Standardna ispitivanja mehaničkih svojstava, kao i istraživanja ponašanja materijala u različitim temperaturno-brzinskim uslovima, složenim vidovima plastičnog deformisanja i drugim nekonvencionalnim uslovima obrade omogućavaju utvrđivanje optimalnih parametara režima obrade, intenzifikaciju tehnoloških procesa, smanjenja utroška energije (deformacionog rada), povećanje stepena iskorišćenja mašinskih sistema, kao i povećanje veka trajanja alata i kvaliteta proizvoda itd.

Pored standardnih pokazatelja za teoriju i tehnologiju OMD najvažnije je poznavanje krivih ojacavanja (tečenja) materijala, koje predstavljaju elementarni i najbitniji izvor informacija o ponašanju materijala u procesima OMD. Krive ojacavanja povezuju napon tečenja sa termomehaničkim faktorima procesa obrade i u opštem slučaju se izražavaju sledećom funkcijom:

$$K = K(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T) \quad (8)$$

gde su:

- K - napon tečenja (specifični deformacioni otpor),
- ε - stepen deformacije,
- $\dot{\varepsilon}$ - brzina deformacije,
- T - temperatura.

Krive ojacavanja se mogu prikazati grafički i analitički. Za potrebe inženjerskih proračuna pogodno je korišćenje grafika, dok je za potrebe numeričkih simulacija procesa OMD neophodno krive tečenja dati u analitičkom obliku [11],[12].

Tablica 1. Broj opita i parametara matematičkog modal za planove prvog reda

Broj faktora k	Oznaka		Broj opita		Broj parametara regresione jednacine ^{*)} $L = 1 + k + \binom{k}{2}$	Višak opita $\Delta = N - L$
	Potpuni faktorni plan 2^k	Parcijalni faktorni plan 2^{k-p}	Potpuni faktorni plan $N = 2^k$	Parcijalni faktorni plan $N = 2^{k-p}$		
2	2^2		4		4	0
3	2^3		8		7	1
4	2^4		16		11	5
(5)	(2^5)		(32)		(16)	(16)
5		2^{5-1}		16	16	0
6		2^{6-1}		32	22	10
7		2^{7-1}		64	29	35
8		2^{8-2}		64	37	27
9		2^{9-2}		128	46	82
10		2^{10-1}		512	56	456

^{*)} sa zanemarivanjem interakcija drugog i višeg reda

Tablica 2. Broj opita za planove drugog reda sa tri uticajna faktora ($k=3$)

PLAN	Broj tacaka u jezgru plana	Broj "zvezdanih" tacaka	Broj tacaka u centru plana	Ukupan broj tacaka
1) Boksovi simetrični rotabilni kompozicioni planovi ($\alpha = \pm 1.682$): - uniformni - ortogonalni	$N' = 2^3 = 8$	$n_\alpha = 2k = 6$	$n_0 = 6$ $n_0 = 9$	$N = 20$ $N = 23$
2) Simetrični kompozicioni planovi tipa B_k ($\alpha = \pm 1$)	$N' = 2^3 = 8$	$n_\alpha = 2k = 6$	-	$N = 14$
3) Nekompozicioni kvazi D- optimalni planovi Pesocinskog ^{*)}	$N' = 3 \cdot 2^2 = 12$	-	$n_0 = 1$	$N = 13$
4) Simetrični nekompozicioni planovi Boks-Benkena ^{*)}	$N' = 12$	-	$n_0 = 3$	$N = 15$
5) Kompozicioni kvazi D- optimalni planovi Hartlija ($\alpha = \pm 1$)	$N' = 2^3 = 8$	$n_\alpha = 8$	$n_0 = 1$	$N = 17$
6) Kompozicioni kvazi D- optimalni planovi Rehtšafnera ($\alpha = +1$) ^{*)}	$N' = 7$	$n_\alpha = k = 3$	-	$N = 10$

^{*)} Kod ovih planova se faktori variraju na tri nivoa (+1, 0 -1)

Eksperimentalni podaci navedeni u Tablici 3. upotrebljeni su za graficku i analiticku prezentaciju krive ojacavanja jednog legiranog celika (C.0361), koji se koristi u procesu toplog valjanja limenih traka [13]. Izvedeno je ukupno 210 opita, bez ponavljanja.

3.1. Primena linearnog i kvazi-linearnog matematičkog modela i plana prvog reda

S obzirom na mali broj uticajnih faktora, za pocetni stadijum analize može se usvojiti Boks-Vilsonov plan prvog reda, tipa 2^k , zbog napred navedenih njihovih dobrih svojstava, kao i linearni matematički model [2],[4],[6],[14],[15].

Inace, struktura Boks-Vilsonovih planova podrazumeva matematički model (funkciju cilja) u obliku polinoma:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \beta_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (9)$$

gde su:

$\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \dots$ - parametri matematičkog modela.

Tablica 3. Eksperimentalne vrednosti napona tecenja

$K \text{ (N/mm}^2\text{)}$								
C.0361		$T \text{ (}^\circ\text{C)}$						
$\varepsilon \text{ (-)}$	$\dot{\varepsilon} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	900	950	1000	1050	1100	1150	1200
0,1	0,1	98,88	88.84	79.83	71.72	64.45	57.91	52.03
	0,5	119.43	107.31	96.42	86.64	77.85	69.95	62.85
	1,0	129.55	116.41	104.59	93.98	84.44	75.87	68.17
	10,0	169.75	152.53	137.05	123.14	110.64	99.42	89.33
	50,0	205.05	184.24	165.54	148.74	133.65	120.09	107.90
	100,0	222.42	199.85	179.57	161.35	144.98	130.26	117.05
0.2	0,1	103.40	92.91	83.48	75.01	67.39	60.56	54.41
	0,5	124.90	112.22	100.83	90.60	81.41	73.15	65.72
	1,0	135.48	121.73	109.38	97.28	88.31	79.35	71.29
	10,0	177.52	159.50	143.32	128.77	115.71	103.96	93.41
	50,0	214.43	192.67	173.11	155.55	139.76	125.58	112.84
	100,0	232.60	208.99	187.79	168.73	151.61	136.22	122.40
0.3	0,1	106.14	95.36	85.69	76.99	69.18	62.16	55.85
	0,5	128.20	115.19	103.50	93.00	83.56	75.08	67.46
	1,0	139.07	124.95	112.27	100.88	90.64	81.45	73.18
	10,0	182.22	163.73	147.11	132.18	118.77	106.72	95.89
	50,0	220.10	197.77	177.70	159.66	143.46	128.90	115.82
	100,0	238.75	214.53	192.76	173.20	155.62	139.83	125.64
0,4	0,1	108.12	97.15	87.29	78.43	70.47	63.32	56.89
	0,5	130.60	117.35	105.44	94.74	85.12	76.49	68.72
	1,0	141.67	127.29	114.37	102.77	92.34	82.97	74.55
	10,0	185.62	166.79	149.86	134.65	120.99	108.71	97.68
	50,0	224.22	201.46	181.02	162.65	146.15	131.31	117.99
	100,0	243.22	218.54	196.36	176.44	158.53	142.44	127.99
0,5	0,1	109.68	98.55	88.55	79.57	71.49	64.24	57.72
	0,5	132.49	119.04	106.96	96.11	86.36	77.59	69.72
	1,0	143.72	129.13	116.03	104.25	93.67	84.17	75.63
	10,0	188.31	169.20	152.03	136.60	122.74	110.29	99.09
	50,0	227.46	204.38	183.64	165.00	148.26	133.21	119.70
	100,0	246.74	221.70	199.20	178.99	160.82	144.50	129.84

Tablica 4. Plan-matrica za linearni i kvazi-linearni matematički model

UTICAJNI FAKTORI ("Prirodne" koordinate)		$X_1 = \varepsilon$	$X_2 = \dot{\varepsilon}$	$X_3 = T$	Funkcija cilja (odziv) $y = K$		
GORNJI NIVO		0.50	100	1200			
OSNOVNI NIVO		0.30	50	1050			
DONJI NIVO		0.10	0.10	900			
R.br. opita	Kodovi	x_1	x_2	x_3 ⁴⁾	Merenje	Proračun	
					y	$\hat{y}$ ¹⁾	$\hat{y}$ ²⁾
1		+1	+1	+1	129.84	144.582	129.843
2		-1	+1	+1	117.05	132.182	117.055
3		+1	-1	+1	57.72	46.148	57.727
4		-1	-1	+1	52.03	32.748	52.035
5		+1	+1	-1	246.74	225.852	246.745
6		-1	+1	-1	222.42	212.452	222.425
7		+1	-1	-1	109.68	126.418	109.685
8		-1	-1	-1	98.88	113.018	98.885
9 ³⁾		0	0	0	159.66	129.250	129.250
¹⁾ Linearni matematički model ²⁾ Kvazi-linearni matematički model ³⁾ Opit br. 9 nije korišćen u proračunu, već je poslužio za procenu adekvatnosti matematičkog modela ⁴⁾ U plan-matrici nisu prikazani kolone sa interakcijama faktora: $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$							

Naznačeni polinom u opštem slučaju predstavlja beskonačan stepeni red, ali se u praktičnoj primeni ograničava na određeni broj članova, odnosno na polinom određenog stepena.

U tom smislu, izraz (9) do prve "masne" crte predstavlja linearni matematički model, do druge "masne" crte kvazilinearni matematički model, a ceo polinom – nelinearni (kvadratni) matematički model.

Vrednost parametara matematičkog modela se mogu oceniti samo statistički na osnovu rezultata eksperimenta. Time se, ustvari, matematički model svodi na jednačinu višestruke regresije, istoga oblika, u kojoj se umesto parametara modela (β) pojavljuju koeficijenti regresije (b).

U tablici 4. prikazana je plan-matrica, za izabrani linearni matematički model i plan prvog reda.

Kodirane koordinate (uticajni faktori) određene su jednačinama transformacije:

$$X_i = \frac{X_{i0} - X_{i10}}{\Delta X_i} \quad (= +1, 0, -1) ; i = 1, 2, \dots, k \quad (10)$$

gde su

X_i - fizicke vrednosti uticajnih faktora

("prirodne koordinate"),

ΔX_i - poluinterval variranja faktora,

X_{i0} - vrednosti faktora na osnovnom

("nultom") nivou, tj u centralnoj tački eksperimentalnog protora.

U plan-matrici navedeni su eksperimentalni rezultati, preuzeti iz Tablice 3. (iz zatamnjenih pravougaonika). Navedeni su, takode, i rezultati proračuna po regresionoj jednačini oblika:

$$\hat{y} = 129.3 + 6.7 x_1 + 49.717 x_2 - 40.135 x_3 \quad (11)$$

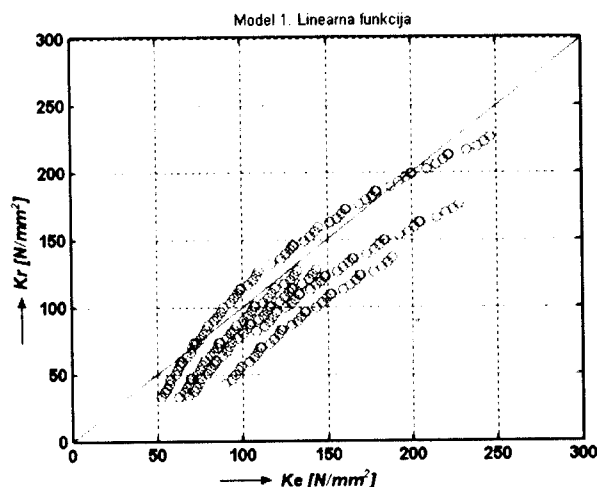
Koeficijenti regresione jednačine (11) određeni su na poznati način [4],[6],[7],[14],[15].

Poređenjem rezultata merenja i proračuna mogu se uočiti značajne razlike u vrednosti funkcije cilja (konkretno, napona tecenja). Po pravilu, u eksperimentalnim tačkama koje se ne koriste u regresionoj analizi disproporcije ovih rezultata su još veće, što je evidentno sa slike 1.

Sa slike 1. se uočava da postoji zadovoljavajuća korelacija između izmerenih i proračunatih vrednosti funkcije cilja, ali i da u većini tačaka datog eksperimentalnog prostora postoje značajna odstupanja.

Može se očekivati da će se greške proračuna smanjiti upotrebom kvazi-linearnog matematičkog modela.

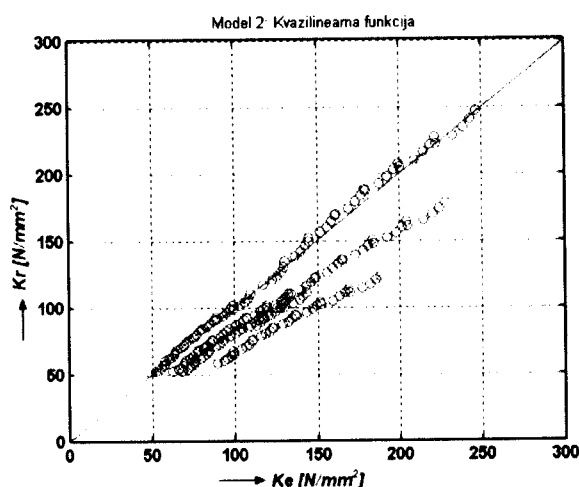
Za ovaj matematički model koristi se ista plan-matrica kao i za linearni matematički model¹. Nakon proračuna po poznatoj proceduri dobijena je sledeća regresiona jednačina:



Sl. 1. Poređenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata za linearni matematički model ($r^2=0.832$)

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 129.3 + 6.7 x_1 + 49.717 x_2 - 40.135 x_3 + \\ & + 2.577 x_1 x_2 - 2.08 x_1 x_3 - 15.433 x_2 x_3 - \\ & - 0.803 x_1 x_2 x_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Kao što se iz tablice 4. vidi, kvazi-linearni matematički model obezbeđuje visoku tačnost u tačkama eksperimentalnog hiper-kuba. Međutim, sa slike 2. se jasno uočava da i u ovom slučaju postoje značajne razlike između izmerenih i proračunatih vrednosti funkcije cilja u mnogim eksperimentalnim tačkama.



Sl. 2. Poređenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata za kvazilinearni matematički model ($r^2=0.839$)

Veličina greške proračuna u centralnoj tački plana jasan je pokazatelj da linearni i kvazi-linearni matematički modeli najverovatnije nisu adekvatni.

¹ Neki autori za ove modele prikazuju prošireni plan-matricu sa interakcijama faktora, što nije neophodno.

Egzaktan dokaz se može izvesti samo disperzionom analizom, koja se u konkretnom slučaju ne može sprovesti, jer nije bilo ponavljanja opita.

Po proceduri koja je napred opisana, kada se utvrdi ili proceni neadekvatnost (kvazi)linearnih matematičkih modela, prelazi se na planove drugog reda i nelinearne matematičke modele. Neki od takvih planova prikazani su u tablici 2.

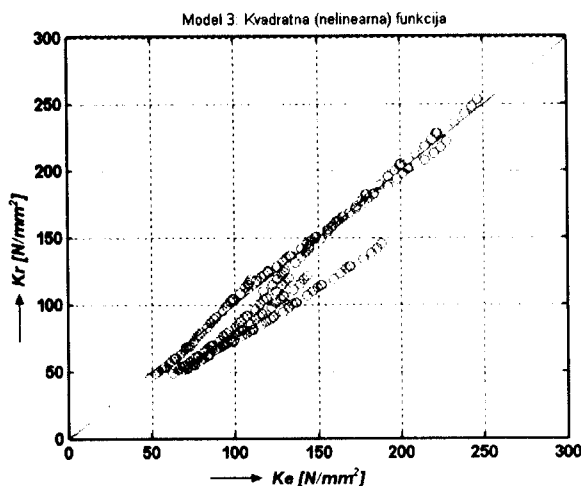
3.1. Primena kvadratnog matematičkog modela

Za dalju analizu odabran je plan drugog reda Pesocinskog i kvadratni matematički model [6], [16]. Odgovarajuća plan-matrica je data u Tab.5.

Nakon proračuna koeficijenata kvadratne regresione jednacine dobijen je sledeći izraz:

$$\hat{y} = 159.7 + 7.463x_1 + 48.931x_2 - 46.039x_3 + 2.448x_1x_2 - 2.653x_1x_3 - 15.705x_2x_3 - 1.66x_1^2 - 35.09x_2^2 + 7.03x_3^2 \quad (13)$$

Zbirni rezultati proračuna i eksperimenta dati su na slici 3. Očigledno je da kvadratni matematički model daje najtačnije rezultate, ali je, takode, jasno da greške proračuna u pojedinim tačkama eksperimentalnog prostora nisu zanemarljive.



Sl. 3. Poređenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata za kvadratni matematički model ($r^2=0.925$)

U vezi sa napred pomenutim matematičkim modelima, odnosno dobijenim regresionim jednacinama treba naglasiti da je analiza sprovedena pod pretpostavkom da su svi uticajni faktori i njihove interakcije signifikantni, što najčešće nije slučaj.

Kao što je već rečeno, provera statističke značajnosti koeficijenata regresione jednacine u ovom slučaju nije bila moguća, jer nije bilo ponavljanja opita ni u jednoj tački eksperimentalnog

prostora, u izvedenom eksperimentu koji je korišćen u ovoj analizi (v. Tab. 3.).

Ova situacija se često javlja pri korišćenju podataka iz režima neposredne eksploatacije sistema ili tekuće proizvodnje, koji ne podležu nikakvom planiranju u statističkom smislu. Za ovakav "eksperimentalan" materijal kaže se da ima loša statistička svojstva, te statistička obrada i analiza ovakvih podataka može dovesti do pogrešnih zaključaka. Dodavanjem nekoliko opita na adekvatan način, statistička svojstva datog skupa podataka se mogu bitno poboljšati i takav "eksperiment" prilagoditi principima teorije planiranja eksperimenta [17].

U konkretnom slučaju dovoljno bi bilo (bez ikakvog proračuna) dodati npr. dva opita u centru plana, čime bi se omogućila disperziona analiza, te utvrdila signifikantnost parametara regresije i adekvatnost matematičkog modela.

Plaket-Barmanovi planovi se svrstavaju u planove prvog reda tipa 2^k , bez ponavljanja opita (*unreplicated designs*), koji omogućavaju ocenu signifikantnosti koeficijenata regresione jednacine. Kako ovi planovi istovremeno spadaju u zasićene planove (v. relaciju (6)), pomenuta ocena je moguća pod pretpostavkom da neki od glavnih efekata nisu signifikantni.

U konkretnom slučaju analizira se uticaj tri faktora na funkciju cilja, sa pretpostavkom da su sva tri faktora značajna u statističkom smislu. Za formiranje klasičnog Plaket-Barmanovog plana sa 11 uticajnih faktora i 12 opita, neophodno je plan-matrici dodati 8 fiktivnih uticajnih faktora (Tablica 6.).

Koeficijenti regresione jednacine određeni su kao i u prethodnim primerima, na osnovu čega je između funkcije cilja i uticajnih faktora utvrđena sledeća relacija:

$$\hat{y} = 129563 + 11.844x_1 + 50411x_2 - 40994x_3 \quad (14)$$

Daljim proračunom utvrđeni su sledeći parametri disperzione analize [6]:

- * disperzija eksperimenta $S_y = 18.249$,
- * disperzija ocene koef. regresije $S_{b_i} = 5.268$,
- * stepen slobode $f_i = 12 - 3 - 1 = 8$,
- * t-kriterijum $t'_{0.10,8} = 1.86$; $t''_{0.05,8} = 2.31$,
- * interval poverenja $\Delta'_{b_i} = 9.8$; $\Delta''_{b_i} = 12.2$.

Na osnovu navedene analize sledi da su svi koeficijenti regresije signifikantni za nivo značajnosti $\alpha = 0.10$, dok se za nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ koeficijent b_1 može odbaciti, što znači da se u daljoj analizi uticajni faktor x_1 može isključiti.

Tablica 5. Plan-matrica za kvadratni matematički model

UTICAJNI FAKTORI	$X_1 =$ $= \varepsilon$	$X_2 =$ $= \dot{\varepsilon}$	$X_3 =$ $= T$							Funkcija cilja (odziv) $y = K$	
Gornji nivo	0.50	100	1200								
Osnovni nivo	0.30	50	1050								
Donji nivo	0.10	0.10	900								
↖ Kodovi ↓ R.br. opita	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2^{1)}$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	Merenje y	Proracun $\hat{y}$
1	0	+1	+1	0	0	+1	0	+1	+1	125.64	118.782
2	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	+1	55.85	52.330
3	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	+1	238.75	242.270
4	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1	106.14	112.998
5	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	119.70	123.763
6	-1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	107.90	114.146
7	+1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	227.46	221.114
8	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	205.05	200.889
9	+1	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	178.99	181.750
10	-1	+1	0	-1	0	0	+1	+1	0	161.35	161.928
11	+1	-1	0	-1	0	0	+1	+1	0	79.57	78.992
12	-1	-1	0	+1	0	0	+1	+1	0	71.72	68.962
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	159.66	159.660

¹⁾ Interakcije faktora višeg reda se zanemaruju

Tablica 6. Plan-matrica za linearni matematički model (Plaket-Barmen)

UTICAJNI FAKTORI	$X_1 =$ $= \varepsilon$	$X_2 =$ $= \dot{\varepsilon}$	$X_3 =$ $= T$	$X_4^{1)}$	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	Funkcija cilja (odziv) $y = K$	
Gornji nivo	0.50	100	1200	-	-	-	-	-	-	-	-		
Osnovni nivo	0.30	50	1050	-	-	-	-	-	-	-	-		
Donji nivo	0.10	0.10	900	-	-	-	-	-	-	-	-		
↖ Kodovi ↓ R.br. opita	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	Mere- nje y	Prora- cun $\hat{y}$
1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	246.74	232.81
2	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	117.05	127.14
3	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	57.72	50.00
4	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	222.42	209.12
5	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	52.03	26.31
6	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	98.88	108.30
7	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	109.68	131.99
8	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	246.74	232.81
9	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	129.84	150.82
10	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	117.05	127.14
11	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	57.72	50.00
12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	98.88	108.30

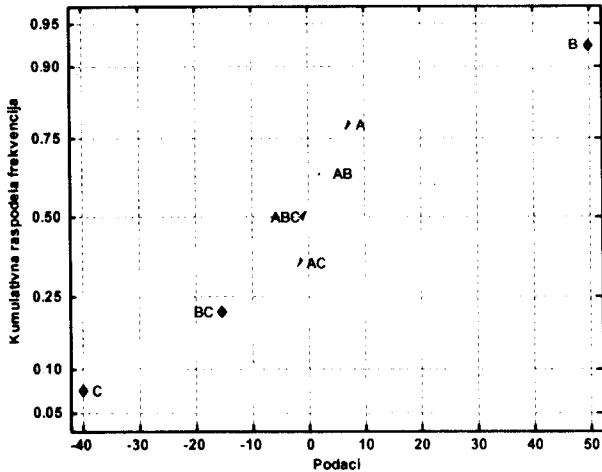
¹⁾ Koordinate $X_4 \div X_{11}$ su fiktivne koordinate (faktori)

Zadržavanje faktora koji se smatraju nesignifikantnim omogućava potpuniji uvid u složenost istraživnog procesa. S druge strane, odbacivanje nesignifikantnih uticajnih faktora pojednostavljuje analizu, narocito geometrijsku prezentaciju regresione jednacine.

Ni za jedan pristup se ne može, a priori, tvrditi da daje bolje performance matematickog modela [18], [19].

Generalno, za planove bez ponavljanja opita postoje i drugi metodi za utvrđivanje signifikantnosti glavnih efekata i njihovih interakcija.

Jedan od najjednostavnijih metoda zasniva se na korišćenju verovatnostnog papira (nomograma) za normalnu raspodelu [7]. Po ovom metodu potrebno je u verovatnostni papir uneti kumulativne relativne frekvencije i vrednosti glavnih efekata (kontrasta) i njihovih interakcija, a zatim utvrditi koje se tacke nalaze na imaginarnoj pravoj liniji. Smatra se da tacke leže na pomenutoj pravoj liniji, ako se mogu pokriti "debelom" olovkom ("fat" pencil), kako je to prikazano na Sl. 4., za slucaj kvazi-linearnog matematickog modela. Tacke koje padaju daleko od imaginarne prave linije ukazuju na efekte koji se mogu tretirati kao signifikantni.



Slika 4. Prikaz efekata na verovatnostnom papiru za normalnu raspodelu ($A \rightarrow x_1, B \rightarrow x_2, C \rightarrow x_3$)

Na osnovu slike 4. može se utvrditi da se signifikantnim mogu smatrati faktori x_2 , x_3 i njihova interackcija x_2x_3 .

Drugi metod, koji se smatra dovoljno pouzdanim, jeste Lentov metod [7],[20],[21]. Ovaj metod se zaniva na jednostavnoj proceduri, koja obuhvata sledece korake:

- rangiranje efekata (kontrasta): $|c_1|, |c_2|, \dots, |c_m|$ ($m = 2^k - 1$),
- određivanje medijane: $median_{(i=1..m)} |c_i|$,
- određivanje parametara s_0 i s_g po obrascima:

$$s_0 = 1.5 \cdot median_{(i=1..m)} |c_i| ; s_g = 2.5 \cdot s_0 ,$$

- odabiranje efekata (kontrasta), koji zadovoljavaju uslov : $|c_j| < s_g$,
- određivanje nove medijane za preostale efekte: $median_{(j \in \{1..m\} \setminus \{j\})} |c_j|$,
- određivanje pseudo-standardne greške (pseudo-standard error) PSE po obrascu: $PSE = 1.5 \cdot median_{(j \in \{1..m\} \setminus \{j\})} |c_j|$,
- određivanje stepena slobode iz relacije: $d = m / 3$,
- usvajanje tablicne vrednosti Studentovog kriterijuma: $t_{0.975, d}$,
- određivanje granice greške (margin of error) ME po obrascu: $ME = t_{0.975, d} \cdot PSE$,
- određivanje procentualne verovatnoce po obrascu: $\gamma = (1 + 0.95^{1/d}) / 2$,
- usvajanje tablicne vrednosti Studentovog kriterijuma: $t_{\gamma, d}$
- određivanje simultane granice greške (simultaneous margin of error) SMI po obrascu: $SME = t_{\gamma, d} \cdot PSE$.

Prvi kriterijum ME ukazuje na signifikantnost efekata, a drugi SME na postojanje makar jednog signifikantnog efekta, pri cemu mora biti zadovoljen uslov: $|c_i| > (ME, SME)$.

Za slucaj kvazi-linearnog matematickog modela kompletan proracun dat je Tablici 7.

Tablica 7. Proracun po Lentovom metodu

Faktori	$ c_i $	Rang	$ c_i < 2.5 s_0$	Rang
x_1	6.7	4	6.7	4
x_2	49.717	7		
x_3	40.135	6		
x_1x_2	2.577	3	2.577	3
x_1x_3	2.080	2	2.080	2
x_2x_3	15.433	5	15.433	5
$x_1x_2x_3$	0.803	1	0.803	1
$median_{(i=1..7)} c_i = 6.7 ; s_0 = 10.05 ; 2.5 s_0 = 25.125$				
$median_{(c_i < 25.1255)} c_i = 2.577 ; PSE = 3.8655$				
$d = 7/3 \approx 2.33 ; t_{0.975, 2.33} \approx 3.93 ; ME = 15.191$				
$\gamma = (1 + 0.95^{1/7})/2 = 0.996 ; t_{0.976, 2.33} \approx 4.08 ; SME \approx 15.771$				

Prema prvom kriterijumu sledi da su signufikantna dva uticajna faktora i njihova interakcija x_2, x_3, x_2x_3 , što je praktično potvrđeno i drugim kriterijumom.

Prema istoj proceduri za kvadratni matematicki model sa devet uticajnih faktora ($m=9$) dobijeni su sledeci rezultati: $PSE= 7.26$;

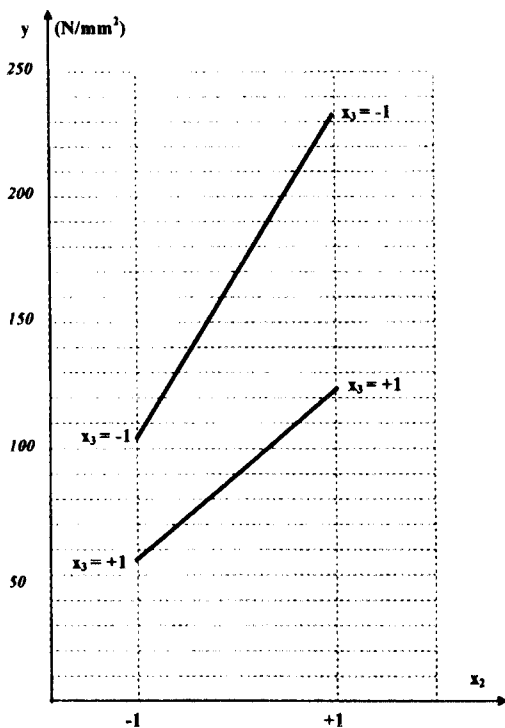
ME= 23.101 ; SME= 47.2. Prema tome, i po ovom matematičkom modelu sledi da su uticajna samo dva uticajna faktora: $x_2, x_3, (x_2^2)$.

Može se reci da su rezultati dobijeni Lentovim testom očekivani. Naime, prvi factor – stepen deformacije ($X_1=\varepsilon$) – variran je u tako uskom intervalu da njegov uticaj nije mogao biti izražen.

Poređenjem jednačina (11) i (14) može se uociti njihova značajna sličnost. Ovo dolazi otuda što je kod oba plana korišćen istovetan eksperimentalan materijal. Naime, kada se uporede plan-matrice u Tab. 4. i Tab. 6. može se ustanoviti da je kod Plaket-Barmanovog plana korišćeno samo osam različitih opita, dok su ostali ponovljeni zbog specifičnosti njegove strukture.

Inace, za utvrđivanje signifikantnosti interakcija uticajnih faktora prvog reda postoji jednostavan grafički postupak.

Na slici 5. je prikazan dijagram koji ilustruje istovremeni uticaj dva faktora na funkciju cilja, za kvazi-linearni matematički model (12).



Slika 5. Interakcija brzine deformacije (X_2) i temperature (X_3)

Iz polazaja linija na dijagramu može se zaključiti da interakcija između navedena dva faktora postoji, mada nije posebno izražena (što potvrđuju i prethodni testovi). Naime, sa opadanjem temperature uticaj brzine deformacije se povećava i obrnuto.

Ovakvi dijagrami su pogodni za kvalitativnu i kvantitativnu analizu linearnih interakcija uticajnih faktora. Interakcije drugog i višeg reda se, po pravilu, mogu zanemariti.

3.3. Matematički model u vidu složene eksponencijalno-stepene funkcije

Mnogobrojni eksperimenti su pokazali da se funkcija napona tečenja (8) može uspešno aproksimirati jednom složenom eksponencijalno-stepenom funkcijom oblika [11],[22]:

$$F_c = C X_1^{p_1} X_2^{p_2} e^{p_3 X_3} \quad (15)$$

Logaritmovanjem ova funkcija se formalno svodi na linearni oblik [10]:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad (16)$$

gde su:

$$y = \ln F_c; b_0 = \ln C; b_1 = p_1; b_2 = p_2;$$

$$b_3 = p_3; x_1 = \ln X_1; x_2 = \ln X_2; x_3 = X_3$$

Regresiona i disperziona analiza sprovode se kao i za (kvazi)linearni matematički model.

U ovom slučaju jednačina (10) se može konkretizovati u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2 \frac{\ln X_1 - \ln X_{1\max}}{\ln X_{1\max} - \ln X_{1\min}} \\ x_2 &= 1 + 2 \frac{\ln X_2 - \ln X_{2\max}}{\ln X_{2\max} - \ln X_{2\min}} \\ x_3 &= 2 \frac{X_3 - X_{30}}{X_{3\max} - X_{3\min}} \end{aligned} \quad (17)$$

Za ovakav matematički model odgovarajuća plan-matrica data je u Tab. 8. Ova plan-matrica se razlikuje od plan-matrice prikazane u Tab. 4. samo po načinu određivanja osnovnih nivoa uticajnih faktora. U konkretnom slučaju važe sledeće relacije:

$$X_{10}^2 = X_{1\max} \cdot X_{1\min}; X_{20}^2 = X_{2\max} \cdot X_{2\min} \quad (18)$$

Nakon određivanja koeficijenata linearne regresije (16), nepoznate konstante funkcije cilja (15) računaju po obrascima [10]:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2b_1}{\ln(X_{1\max}/X_{1\min})} \\ p_2 &= \frac{2b_2}{\ln(X_{2\max}/X_{2\min})} \\ p_3 &= \frac{2b_3}{X_{3\max}/X_{3\min}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C &= \exp(b_0 + b_1 + b_2 - p_1 \ln X_{1\max} - \\ &\quad - p_2 X_{2\max} - p_3 X_{30}) \end{aligned}$$

Napomena: U konkretnom primeru potrebno je izvršiti sledeće zamene,
 Tablica 8. Plan-matrica za nelinearni matematički model

UTICAJNI FAKTORI ("Prirodne" koordinate)	$X_1 = \varepsilon$	$X_2 = \dot{\varepsilon}$	$X_3 = T$	Funkcija cilja (odziv) $y = K$		
Gornji nivo	0.50	100	1200			
Osnovni nivo ¹⁾	0.22	3.162	1050			
Donji nivo	0.10	0.10	900			
↓ R.br. opita → Kodovi	x_1	x_2	x_3	Merenje		Proracun
				y	$\ln y$	$\hat{y}$
1	+1	+1	+1	129.84	4.86630	129.841
2	-1	+1	+1	117.05	4.76260	117.050
3	+1	-1	+1	57.72	4.05560	57.721
4	-1	-1	+1	52.03	3.95182	52.035
5	+1	+1	-1	246.74	5.50834	246.735
6	-1	+1	-1	222.42	5.40457	222.428
7	+1	-1	-1	109.68	4.69757	109.686
8	-1	-1	-1	98.88	4.59391	98.881
9 ²⁾	0	0	0	105.70 ³⁾	5.07305	113.308

¹⁾ Osnovni nivo se razlikuje u odnosu na (kvazi)linearni matematički model
²⁾ Opit br. 9 nije korišćen u proračunu, već je poslužio za procenu adekvatnosti matematičkog modela
³⁾ Približna vrednost u centralnoj tacki plana, dobijena je linearnom interpolacijom

$$F_c = K; \quad p_1 = n; \quad p_2 = m; \quad p_3 = \alpha ;$$

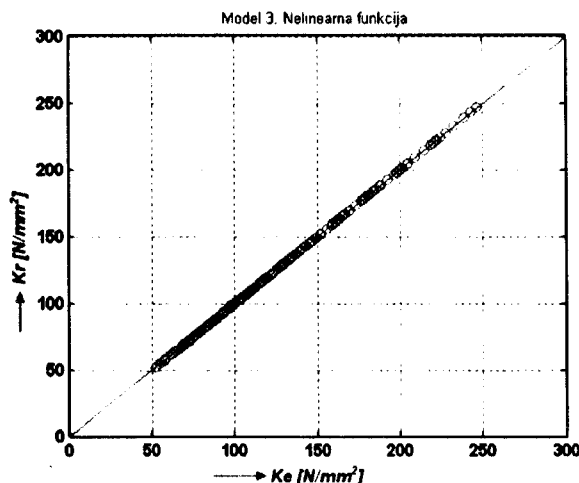
$$q_1 = \varepsilon; \quad q_2 = \dot{\varepsilon}; \quad q_3 = T$$

Nakon obrade eksperimentalni podataka dobijena je sledeca regresiona jednačina:

$$\hat{y} = 4.73009 + 0.05186x_1 + 0.40536x_2 - 0.32101x_3 \tag{20}$$

Korišćenjem relacija (19) i jednačine (20), kao i podataka iz Tablice 8. dolazi se do predložene funkcije cilja u prirodnim koordinatama:

$$K = 1031.24 \, \varepsilon^{0.06444} \, \dot{\varepsilon}^{0.11736} \, e^{-0.00214 \, T} \tag{21}$$



Sl. 6. Poređenje eksperimentalnih i teorijskih rezultata za model u vidu eksponencijalno-stepene funkcije ($r^2=1.0$)

Na slici 6. su dati zbirno eksperimentalni i teorijski rezultati za ovaj matematički model.

Ocigledno je da izabrana eksponencijalno-stepena funkcija daje izvanrednu predikciju funkcije cilja i za eksperimentalne tacke koje nisu uzete u obzir prilikom regresione analize.

Za potrebe inženjerskih proracuna pogodnije je krivu ojacavanja (21) prikazati u vidu grafika (Slika 7.).

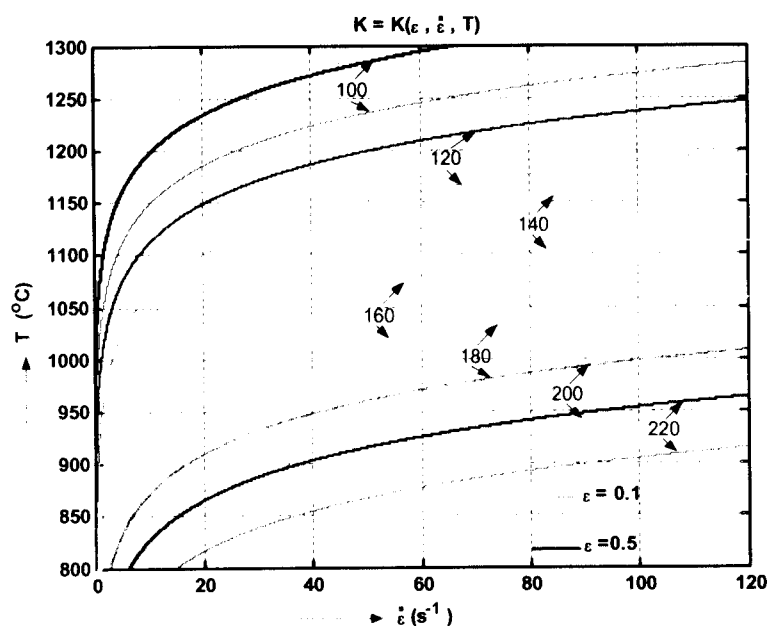
3. ZAKLJUCAK

Mogucnost da se sa minimalnim brojem opita dode do adekvatnih (željenih) rezultata u istraživanju nedovoljno poznatih fenomena (procesa, sistema) predstavlja jednu od najvažnijih opštih svojstva teorije planiranja eksperimenta.

Posledice ove činjenice su mali trošci energije, materijalnih sredstava i vremena, što zbirno cini ovakav istraživački pristup veoma racionalnim.

Adekvatnim izborom matematičkog modela i eksperimentalnog plana može se broj (serija) opita višestruko redukovati u odnosu na klasičan jednofaktorni metod eksperimentalnih istraživanja.

U radu je na konkretnom primeru pokazano da se jednofaktorni eksperiment (sa 210 opita) može zameniti višefaktornim eksperimentom (sa svega 9÷13 opita), pri cemu se na istom eksperimentalnom prostoru dobijaju prakticno istovetni rezultati.



Slika 7. Grafički prikaz krive ojačavanja za čelik C.0361, prema jednačini (21)

5. LITERATURA

- [1] Czitrom V.: One-Factor-at-a-Time Versus Designed Experiments. The American Statistician, Vol. 53, No 2, 1999.
- [2] Box G. E. P., Wilson K. B.: On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. XIII, No 1, 1951.
- [3] Box G. E. P., Hunter W. G., Hunter J. S.: Statistics for Experimenters. Wiley, New York, 1978.
- [4] Nalimov V. V., Cernova N. A.: Statisticheskie metodi planirovanija ekstremalnih eksperimentov. "Nauka", Moskva, 1965.
- [5] Adler J.P., Andrukovic P.F., Brodskij V.Z. i dr. (Pod red. V. V. Nalimova): Novie idei v planirovanii eksperimenta. Nauka, Moskva, 1969.
- [6] Novik F. S., Arsov J. B.: Optimizacija processov tehnologii metallov metodami planirovanija eksperimentov. "Mašinstroenie", Moskva, 1980.
- [7] Montgomery D. C.: Design and analysis of experiments. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [8] Box G. E. P., Hunter J. S.: The 2^{k-p} Fractional Factorial Design, Part I. Technometrics, Vol 42, No 1, 2000.
- [9] Aggarwal M.L., Goel A., Chowdhury S.R.: Catalogue of group structures for two-level fractional factorial designs. Journal of Applied Statistics, Vol. 24, No 4, 1997.
- [10] Marinkovic V.: Application of some non-linear mathematical models to the theory of experimental design. The scientific journal FACTA UNIVERSITATES, Series: Mechanical Engineering, Vol.1, No 1, 1994.
- [11] Poluhin P. I., Gun G. J., Galkin A. M.: Soprotivlenie plasticheskoj deformacii metallov i splavov. "Metallurgija", Moskva, 1976.
- [12] Mandic V.: Fizicko modeliranje i numericka simulacija kao osnova novog koncepta projektovanja alata za toplu zapreminsku obradu. Mašinski fakultet, Kragujevac, 2002.
- [13] Lazarev J. Otpornost na deformacijata pri ploskoto valanje na niskoaglenite celici. "Studentski zbor", Skopje, 1984.
- [14] Stanic J.: Metod inženjerskih merenja. Mašinski fakultet, Beograd, 1990.
- [15] Marinkovic V., Radovanovic M.: Prirucnik za laboratorijske vežbe iz obrade materijala rezanjem (Dodatak: Osnovi teorije planiranja eksperimenta), Mašinski fakultet, Niš, 1990.
- [16] Pesotchinsky L.L.: D-optimum and quasi-D-optimum second-order design on a cube. Biometrika, Vol. 62, No 2, 1975.
- [17] Kudrjavcev B. M.: Statisticheskie metodi issledovanija v praktike. Izdateljstvo Kazanskogo Universiteta, 1979.
- [18] Montgomery D. C., Myers R.H., Carter W.H., Vining G.G.: The Hierarchy Principle in Designed Industrial Experiments, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 21, 2005.

- [19] Peixoto J. L. : A Property of Well-Formulated Polynomial Regression Models. The American Statistician, Vol. 41, 1990.
- [20] Hamada M. , Balakrishnan N. : Analyzing unreplicated factorial experiments: A review with some new proposal. Statistica Sinica 8 (1998).
- [21] Loughin T. M.: Calibration of the Lenth Test for Unreplicated Factorial Designs. Journal of Quality Technology, Vol. 30, No 2, 1998.
- [22] Marinkovic V. : Deformaciono ojacavanje materijala u procesima obrade materijala u hladnom i toplom stanju. Monografija. Mašinski fakultet, Niš, 1995.

RATIONALIZATION OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS USING THEORY OF EXPERIMENTAL DESIGN

Summary:

The paper presents concrete example that points to the advantages of the multiple factor experiment design theory comparing to the traditional one-factor-a-time experiment design. A considerable advantage refers to minimisation of material and time losses (costs) in realising a consistently designed experiment. At the same time all haphazardness and subjectivity are excluded.

By selecting adequate types of experiment designs and mathematical models it is possible to reduce further the number of the necessary test series. On the other hand, by applying the experiment design theory it is possible to determine exactly quantitative and qualitative influence of each individual factor as well as all the factors' interactions upon the target function (output).

In addition to this, the theory of the (multi factor) experiment design provides for very rational optimization of the insufficiently explored (technological etc.) processes

Key Words: *Experimental Design, Influential Factors, Target Function, Minimal Costs*