

PRIOLOG TEORIJSKOM ISTRAŽIVANJU ELASTIČNIH OBRNIH MOMENATA USLED TORZIONIH OSCILACIJA KOD RADNIH VRETENA MAŠINA ALATKI

Branko Pejović¹⁾, Bogdan Ćirković¹⁾, Aleksandar Todić¹⁾

Kategorija rada:
STRUČNI RAD

AFILIJACIJA/ADRESA:

1) Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica

Rezime: U radu je, polazeći od kinematske šeme jednog opšteg prenosnika za glavno kretanje mašine alatke, postavljen dinamički model za određivanje torzionih oscilacija za proizvoljno radno vreteno, za slučaj neravnomernog obrtnog kretanja. Pri ovome, pored glavnih parametara dinamičkog sistema, uzete su u obzir i elastične, odnosno karakteristike prigušenja. Za određivanje zakona, kojim bi se opisivalo posmatrano kretanje, odnosno ugla obrtanja elastičnih elemenata, primenjene su Lagranževove jednačine druge vrste. Dobijena zakonitost je iskorišćena za određivanje elastičnog torzionog momenta, kao važne karakteristike. Pokazana je njegova zavisnost od vremena, odnosno dinamički karakter. Komparacija obrtnih momenata, koji su prisutni pri dinamičkom i statičkom opterećenju, izvedena je uvođenjem pogodnog koeficijenta. Na bazi izvedenih relacija opšteg modela, moguće je analizirati i druge karakteristične slučajeve, a koje se odnose na zakon promene ugla obrtanja, odnosno procene odnosa dinamičkog i statičkog opterećenja, kada je neka od karakteristika zanemarena.

Ključne reči: prenosnik mašine alatke, glavno vreteno, neravnomerno kretanje, torzioni sistem, torzione amortizovane oscilacije, elastični obrtni moment, prigušenje, statičko i dinamičko opterećenje

1. UVODNA RAZMATRANJA

Problem oscilovanja kod mašina alatki za obradu rezanjem, predstavlja jedan od važnih problema, pošto se posledice oscilovanja ispoljavaju u vidu netačnosti rada mašine, u prevremenom zatupljenju alata, kao i u eventualnom oštećenju elemenata mašine /1/, /2/, /3/.

Rad mašine alatke prate prinudne oscilacije odnosno vibracije, dok se pri određenim režimima rada javljaju i samopobudne oscilacije. Obe ove grupe oscilacija predstavljaju nepoželjne pojave jer pored smanjenja tačnosti obrade i kvaliteta obrađene površine radnog predmeta smanjuju i proizvodnost mašine.

Prinudne vibracije nastaju, kao rezultat neravnomernog kretanja elemenata mašine, naprimer obrtnog kretanja glavnog vretena i promene preseka strugotine. Pogodnim konstruktivno – tehnološkim rešenjem mogu da se svedu na vrlo male veličine. Od praktičnog značaja je određivanje veličine amplitude oscilovanja dinamičkog sistema mašine alatke, kako u radnom periodu tako i pri radu na prazno /4/, /5/. Proces rezanja unosi dopunski poremećaj, vezan za sile rezanja, koje elastično deformišu konstrukciju i menjaju veličinu prinudnih vibracija.

Samopobudne vibracije karakterišu nestabilan rad mašine. Promenom režima obrade izbegava se oblast nestabilnog rada, ali se ujedno sužava opseg performansi mašine alatke. Istraživanje uzroka samopobudnih vibracija i iznalaženje metoda za njihovo otklanjanje omogućuje izgradnju mašina alatki visokog kvaliteta /5/, /6/.

Pri stacionarnom režimu rezanja, tj. rezanju konstantnom brzinom, sa konstantnim vrednostima dubine rezanja i koraka, odgovarajuće sile rezanja mogu se smatrati konstantnim, a njihovo dejstvo statičkim. Pri promeni nekih od ovih veličina, u zavisnosti od vremena, može pod odgovarajućim uslovima nastati oscilovanje alata, pa i elemenata same mašine /6/, /7/.

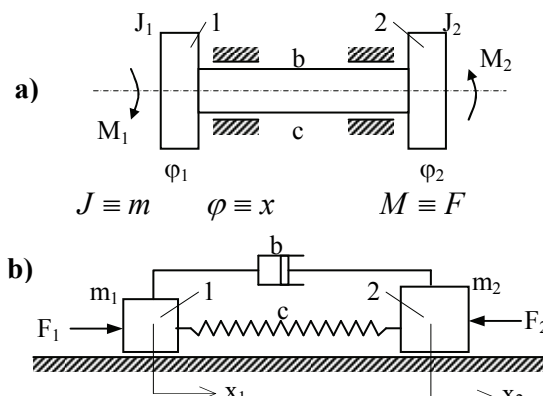
Poremećaj, odnosno impuls, očigledno dovodi do nestacionarnog režima rezanja, pa time i do oscilovanja obradnog sistema.

2. MODEL TORZIONOG OSCILOVANJA

Kod radnih vretena prenosnika mašina alatki za obradu rezanjem, pored torzionih, javljaju se poprečne i uzdužne oscilacije. Za analizu torzionih oscilacija može se početi od

jednog prenosnika za glavno kretanje mašine za obradu struganjem, posmatrajući njegovo glavno vreteno.

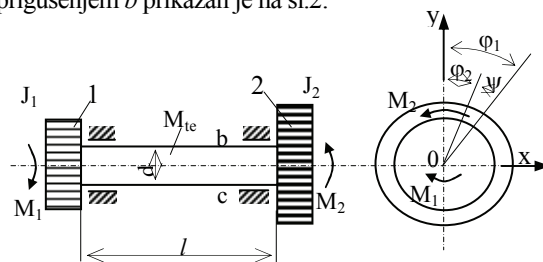
Torzioni model, koji se može u opštem slučaju odnositi na bilo koje radno vreteno prenosnika, prikazan je na sl.1a, gde su diskovi 1 i 2 opterećeni spoljašnjim momentima M_1 i M_2 , dok je vreteno elastično. Momenti M_1 i M_2 , u posmatranom slučaju, imaju suprotne smerove.



Slika 1. Analogija između torzionih i lančanih oscilatornih sistema sa dva stepena slobode

Radi jednostavnijeg rešavanja problema može se početi od ekvivalentne analogne šeme lančanog sistema sa dve mase m_1 i m_2 , prema sl.1b, na koje deluju spoljašnje sile F_1 i F_2 . Mase su vezane elastičnom oprugom odnosno prigušivačem.

Oscilatorni torzioni model sa dve mase momenata inercije J_1 i J_2 i elastičnim vretenom krutosti c i prigušenjem b prikazan je na sl.2.



Slika 2. Oscilatorni torzioni model glavnog vretena mašine alatke

U prvom približenju smatraće se da su mase 1 i 2 mnogo veće u poređenju sa masom vretena, koje je najčešće šuplje. Od svih vretena, kao najvažniji slučaj za praksu posmatraće se glavno vreteno mašine alatke. Disk 1 predstavlja

zupčanik preko koga se kretanje prenosi na glavno vreteno dok disk 2 predstavlja steznu glavu sa radnim predmetom koji se obrađuje. Isto tako, pretpostavićemo realan slučaj iz prakse kada su momenti M_1 i M_2 tokom obrade približno konstantni. Ovaj slučaj se često susreće u praksi kod mašina za obradu struganjem, posebno pri elektromotornom pogonu. S obzirom da su u pitanju kotrljajni ležajevi sile trenja na osloncima biće zanemarene.

Ovde treba naglasiti da prigušenje u materijalu vretena predstavlja osnovni vid prigušenja pošto se različiti materijali različito ponašaju u tom pogledu.

Obrtni moment preko koga se dovodi kretanje na glavno vreteno odnosno moment na prenosnom elementu 1 biće za slučaj ravnomernog kretanja:

$$M_1 = M_{iz} = M_{ul} \cdot i_u \cdot \eta_u \quad (1)$$

Ovde M_{ul} , M_{iz} predstavljaju moment na ulazu u prenosnik odnosno na izlazu, za posmatrani kinematski lanac (na elementu 1), dok su ukupni prenosni odnos, odnosno stepen iskorišćenja za isti kinematski lanac i_u , η_u .

Obrtni moment na izlazu iz prenosnika, odnosno moment na prenosnom elementu 2, biće:

$$M_2 = F_1 \frac{D_r}{2} \quad (2)$$

Ovde F_1 predstavlja glavni otpor rezanja, a D_r prečnik obrađivanog radnog predmeta. Za slučaj da su elementi režima rezanja nepromenljivi, momenat M_2 biće približno konstantan. S obzirom na obrtanje, posmatrač se neravnomerno kretanje glavnog vretena u prelaznom periodu za vreme puštanja mašine u rad. Takođe, moguće je posmatrati i slučaj zaustavljanja mašine kada umesto ugaonog ubrzanja imamo ugaono usporenje.

3. JEDNAČINA TORZIONIH OSCILACIJA

Torzione oscilacije prikazanog mehaničkog sistema sa dva stepena slobode (sl.2), za slučaj da se pored konzervativnih sila i sila otpora javlja i neka prinudna sila, mogu se efikasno proučavati primenom Lagranževih jednačina druge vrste, koje važe za slučaj malih oscilatornih kretanja sistema /8/, /9/, /10/.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = Q_y \quad (3)$$

Uglovi obrtanja diskova sa kojima se određuje položaj sistema biće φ_1 i φ_2 i mere se od položaja ravnoteže. Oni predstavljaju uglove uvijanja vretena na mestima diskova. Kinetička energija sistema biće:

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 \quad (4)$$

Parcijalni izvodi prema (4) biće:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \dot{\varphi}_1 & \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \ddot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2 \dot{\varphi}_2 & \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Isto tako sledi da je:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (6)$$

Potencijalna energija sistema biće:

$$E_p = \frac{1}{2} c (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (7)$$

Parcijalni izvodi prema (7) biće:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = c (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = -c (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (8)$$

Ovde c predstavlja krutost elastičnog vretena.

Funkcija rasipanja, odnosno disipativna funkcija sistema, može se napisati kao /8/, /10/:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1} = b (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_2} = -b (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \quad (9)$$

Ovde b predstavlja karakteristiku prigušenja.

Prema relaciji (9), očigledno, pretpostavljeno je da je moment otpornih sila proporcionalan prvom stepenu ugaone brzine $\dot{\varphi}$.

Virtualni elementarni rad spoljnih momenata za prikazano obrtno kretanje biće /13/, /14/:

$$dA_\varphi = (M_1 \varphi_1) d\varphi_1 - (M_2 \varphi_2) d\varphi_2 \quad (11)$$

Ovde su $d\varphi$ elementarni obrtni uglovi.

Generalisane sile su koeficijenti uz virtualni rad (11):

$$Q_{\varphi_1} = M_1 \varphi_1 \quad Q_{\varphi_2} = -M_2 \varphi_2 \quad (12)$$

Zamenom veličina (5), (6), (8), (10) i (11) u izraz (3), diferencijalne jednačine koje opisuju dato kretanje biće

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c (\varphi_1 - \varphi_2) + b (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= M_1 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c (\varphi_1 - \varphi_2) - b (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= -M_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Deljenjem sistema jednačina (13) sa J_1 odnosno J_2 biće:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{c}{J_1} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{b}{J_1} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= \frac{M_1}{J_1} \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{J_2} (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{b}{J_2} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= -\frac{M_2}{J_2} \end{aligned} \quad (14)$$

Ako drugu jednačinu sistema (14) oduzmemo od prve, dobijamo:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \left(\frac{b}{J_1} + \frac{b}{J_2} \right) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \end{aligned} \quad (15)$$

Analizom sistema (13) vidi se da veličine $c(\varphi_1 - \varphi_2)$, $b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ predstavljaju momente elastičnih sila odnosno momente otpornih sila, koji se suprotstavljaju spoljašnjim momentima M_1 i M_2 . Isto tako, veličina $J\ddot{\varphi}$ predstavlja moment inercijalnih sila sistema.

Ugao obrtanja vretena, prema sl.3 može se izraziti kao:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi \quad (16)$$

Diferenciranjem po vremenu, ugaona brzina i ugaono ubrzanje biće:

$$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \dot{\psi} \quad \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\psi} \quad (17)$$

Jednačina (15) može se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 + c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + b \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \end{aligned} \quad (18)$$

Sada prema (16) i (17) sledi da je:

$$\ddot{\psi} + c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \dot{\psi} + b \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \psi = \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \quad (19)$$

Jednačina (19) predstavlja nehomogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima /16/, /17/. Radi jednostavnijeg rešavanja jednačine (19) uvedimo oznake:

$$2\delta = b \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \quad (20)$$

$$\omega^2 = c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \quad (21)$$

Jednačina (19), nakon smene (20) i (21), rešava se preko karakteristične jednačine homogenog dela:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \quad (22)$$

Za realan uslov $\delta < \omega$ (malo prigušenje), rešenje (22) biće:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad (23)$$

Za slučaj velikog prigušenja $\delta > \omega$, ne dobija se rešenje oscilatornog karaktera, pa ovaj slučaj ne odgovara realnosti. Prema (23), sledi kompleksno rešenje

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (24)$$

Uslov $\delta < \omega$, prema (20) i (21) biće ispunjen za

$$\frac{4c}{b^2} > \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}$$

$$\text{Uvođenjem oznake } p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (25)$$

rešenje jednačine (24) prelazi u:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm pi \quad (26)$$

S obzirom na (26), rešenje homogenog dela jednačine (19) biće: $\psi_h = e^{-\delta t} (A \cos pt + B \sin pt)$ (27)

Desni deo jednačine (19) ima konstantnu vrednost, pa njeno partikularno rešenje tražimo u obliku konstante:

$$\psi_p = D \quad (28)$$

$$\text{Oдавde je: } \dot{\psi}_p = 0 \quad \ddot{\psi}_p = 0 \quad (29)$$

Zamenom (29) u polaznu jednačinu (19) biće:

$$0 + 0 + \omega^2 D = \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2}$$

Oдавde konstanta D ima vrednost:

$$D = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) \quad (30)$$

Sada će partikularno rešenje, prema (28), biti:

$$\psi_p = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) \quad (31)$$

Rešenje polazne jednačine (19) dobija se kao zbir homogenog i partikularnog rešenja (27) i (31):

$$\psi = \psi_h + \psi_p \quad (32)$$

odnosno kao:

$$\psi = e^{-\delta t} (A \cos pt + B \sin pt) + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) \quad (33)$$

Uzimajući u obzir početne uslove:

$$\text{za } t = 0 \Rightarrow \psi_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 0 \quad (34)$$

i njihovom zamenom u (33) dobiće se:

$$\psi = 1(A \cdot 1 + B \cdot 0) + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right)$$

Oдавde dobijamo konstantu A:

$$A = -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) \quad (35)$$

Diferenciranjem relacije (33) biće:

$$\dot{\psi} = e^{-\delta t} (\cos pt (B p - \delta A) - \sin pt (\delta B + A p)) \quad (36)$$

Prema (34), zamenom dobija se

$$\dot{\psi} = 1 \cdot (1 \cdot (B p - \delta A) - 0 \cdot (\delta B + A p))$$

a oдавde sledi da je druga konstanta B:

$$B = -\frac{\delta}{p \omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) \quad (37)$$

Zamenom (35) i (37) u (33) biće:

$$\psi = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) - \frac{e^{-\delta t}}{p \omega^2} \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \right) (p \cos pt + \delta \sin pt) \quad (38)$$

Oдавde proizilazi da je sistem jednačina (13) pogodnim matematičkim transformacijama sveden na jednu jednačinu (38), što znatno uprošćava analizu. Radi jednostavnije analize jednačine (38), uvedimo oznake:

$$p = R \sin \alpha \quad \delta = R \cos \alpha \quad (39)$$

Oдавde je:

$$p^2 + \delta^2 = R^2 \quad R = \sqrt{p^2 + \delta^2} \quad (40)$$

Deljenjem jednačina (39) dobijamo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{\delta} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{p}{\delta} \quad (41)$$

Zbir trigonometrijskih funkcija u (38) prema (39) je

$$p \cos pt + \delta \sin pt = R \sin \alpha \cos pt + R \cos \alpha \sin pt = R \sin(pt + \alpha) \quad (42)$$

Zamenom (42) u (38) dobijamo konačno rešenje u jednostavnijem obliku:

$$\psi = \frac{1}{c} \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 + J_2} \left(1 - \frac{\sqrt{p^2 + \delta^2}}{p} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} \right) \quad (43)$$

Jednačina (43) predstavlja promenu ugla ψ u zavisnosti od vremena elastičnog vretena, odnosno zakon amortizovanih torzionih oscilacija, čija je kružna

$$\text{frekvencija } p, \text{ a period } T_p = \frac{2\pi}{p}.$$

4. TORZIONI ELASTIČNI MOMENT

Ugao uvijanja vretena prema sl.3, biće:

$$\psi = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{M_t}{I_0} dz = \frac{M_t l}{G I_0} \quad (44)$$

što predstavlja elastične deformacije.

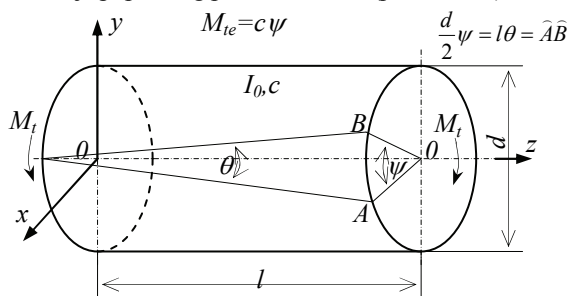
Momenat torzije oдавde biće:

$$M_t = \frac{G I_0}{l} \psi = c \psi \quad (45)$$

Krutost pri torziji, prema (45), biće:

$$c = \frac{GI_0}{l} \quad (46)$$

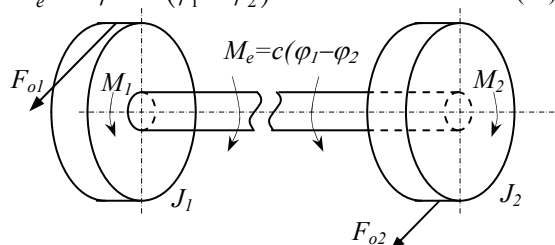
U jednačini (46) veličine G i I_0 predstavljaju modul klizanja materijala vretena odnosno polarni moment inercije poprečnog preseka vretena (pri $d = \text{const}$).



Slika 3. Elastični torzioni moment i deformacije pri torziji glavnog vretena

Moment (45) predstavlja moment elastičnih sila, koji se javlja u vretenu pri uzajamnom zaokretanju prvog diska u odnosu na drugi (sl. 4):

$$M_e = c\psi = c(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (47)$$



Slika 4. Torzioni elastični moment vretena

Ovaj moment se suproavlja momentu spoljašnjih sila (sl.4). Koristeći izvedenu relaciju (43) elastični torzioni moment možemo izraziti u funkciji od vremena:

$$M_e = M_d = \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 + J_2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{p^2 + \delta^2}}{p} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} \right) \quad (48)$$

što znači da on ima dinamički karakter pa je označen i sa M_d . Granična vrednost funkcije momenta (48) za slučaj da $t \rightarrow \infty$ biće:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 + J_2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{p^2 + \delta^2}}{p} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} \right) \quad (49)$$

Uzimajući u obzir da je $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} = 0$

za graničnu vrednost dobijamo da je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_d = \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 + J_2} \quad (50)$$

Pokazaćemo da granična vrednost (50) predstavlja torzioni moment pri statičkom opterećenju.

Pri elastičnom opterećenju ugao torzije je nepromenljiv, tj. $\psi = \text{const}$, odnosno njegov izvod po vremenu je:

$$\dot{\psi} = 0 \quad \ddot{\psi} = 0 \quad (51)$$

Pokazaćemo da granična vrednost (50) predstavlja torzioni moment pri statičkom opterećenju.

Zamenom izvoda (51) u (19) dobijamo

$$c \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \psi_{st} = \frac{M_1}{J_1} + \frac{M_2}{J_2} \quad (52)$$

Ugao torzije, pri elastičnom opterećenju, biće, odavde:

$$\psi_{st} = \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{c(J_1 + J_2)} \quad (53)$$

Veličina (53) predstavlja centar statičke ravnoteže. Statički torzioni moment prema (53) biće:

$$M_{st} = c\psi_{st} = \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{(J_1 + J_2)} \quad (54)$$

što se slaže sa (50).

Koristeći relacije (54), relacija (43) može se napisati u zavisnosti od torzionog statičkog momenta:

$$\psi = \frac{1}{c} M_{st} \left(1 - \frac{\sqrt{p^2 + \delta^2}}{p} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} \right) \quad (55)$$

Odavde sledi da posmatrani sistem vrši oscilatorno kretanje u obliku torzionih oscilacija. Otpor smanjuje oscilacije tokom vremena i one se u beskonačnosti potpuno prigušuju.

Dinamički torzioni elastični moment $M_d = \psi c$, prema (55) biće:

$$M_d = M_{st} \left(1 - \frac{\sqrt{p^2 + \delta^2}}{p} \frac{\sin(pt + \alpha)}{e^{\delta t}} \right) \quad (56)$$

Moment (56), takođe se menja tokom vremena i ima oscilatorni karakter. Ekstremne vrednosti funkcije momenta (56) dobijamo diferenciranjem:

$$\frac{dM_d}{dt} = -\frac{M_{st}}{p\omega^2} \left[-\delta e^{-\delta t} (p \cos pt + \delta \sin pt) + e^{-\delta t} (-p^2 \sin pt + p\delta \cos pt) \right]$$

odnosno za $dM_d/dt = 0$, sređivanjem dobijamo

$$(p^2 + \delta^2) \sin pt = 0 \quad \sin pt = 0 \quad (57)$$

Ekstremne vrednosti biće za:

$$pt = k\pi \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (58)$$

$$t = \frac{k\pi}{p} \quad t \geq 0 \quad (59)$$

Preko drugog izvoda može se lako pokazati da su tačke (59) tačke maksimuma i minimuma funkcije (56).

Početna tačka funkcije (56) biće:

$$k = 0 \quad t = 0 \quad M_d = 0$$

Maksimalna vrednost funkcije (56), odnosno najveća amplituda momenta M_d biće prema (56) i (59):

$$M_{d \max} = \left[c \frac{1}{\omega^2} - c \frac{1}{p\omega^2} e^{-\delta \frac{\pi}{p}} (p \cos p \frac{\pi}{p} + \delta \sin p \frac{\pi}{p}) \right] \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 J_2}$$

$$M_{d\max} = M_{st} \left(1 + e^{-\frac{\delta\pi}{p}} \right) = M_{d1} \quad (60)$$

Treba zapaziti da veličina $e^{-\delta t}$ u izrazu (56) predstavlja amortizacioni faktor. Minimalna vrednost funkcije (56) biće:

$$k = 2 \quad t = \frac{2\pi}{p} \quad M_{d2} = M_{st} \left(1 - e^{-\frac{\delta 2\pi}{p}} \right) = M_{d\min} \quad (61)$$

Sledeće ekstremne tačke funkcije (56) biće:

$$k = 3 \quad t = \frac{3\pi}{p} \quad M_{d3} = M_{st} \left(1 + e^{-\frac{\delta 3\pi}{p}} \right) \quad (62)$$

$$k = 4 \quad t = \frac{4\pi}{p} \quad M_{d4} = M_{st} \left(1 - e^{-\frac{\delta 4\pi}{p}} \right) = M_{d\min} \quad (63)$$

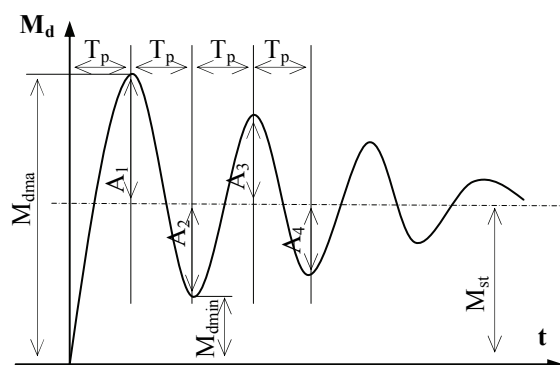
Sada je zakon promene tačaka ekstremuma funkcije (56) očigledan. Odnos dveju susednih amplituda momenta $M_{d\delta}$ s obzirom na dobijene zavisnosti biće:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = e^{-\frac{\delta\pi}{p}} = e^{-\frac{\delta T_p}{2}} \quad (64)$$

Oдавде sledi da otpor smanjuje amplitude momenta M_d po geometrijskoj progresiji. Uslovni period funkcije (56) je isti kao i kod funkcije (55):

$$T_p = \frac{2\pi}{p} \quad (65)$$

Koristeći prethodnu analizu, na sl. 5. dat je prikaz promene elastičnog torzionog momenta vretena u zavisnosti od vremena, prema relaciji (56). Grafik je dobijen translatorskim pomeranjem grafika osnovne funkcije u pravcu ordinatne ose za dužinu M_{st} , tako da funkcija momenta M_d osciluje oko veličine M_{st} .



Slika 5. Promena elastičnog torzionog momenta u zavisnosti od vremena

Brzina porasta momenta M_d (56), prema (29) i (21), određuje se preko kružne frekvencije.

$$p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \left(c - \frac{b^2}{4} \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right)} \quad (66)$$

Početna faza momenta M_d , prema (41) odnosno (20) i (25) biće:

$$\alpha = \arctg \frac{p}{\delta} = \arctg \sqrt{\frac{4c - b^2 J_{12}}{b^2 J_{12}}} \quad (67)$$

$$J_{12} = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \quad (68)$$

Ako uvedemo odnos maksimalnog dinamičkog i statičkog momenta pri torziji, prema relaciji (60) biće:

$$k_d = \frac{M_{d\max}}{M_{st}} = 1 + e^{-\frac{\delta\pi}{p}} \quad (69)$$

Granične vrednosti koeficijenta (69):

$$k_{d\max} = 1 + e^0 = 2$$

Ovo odgovara slučaju bez prigušenja ($\delta=0$, $b=0$).

$$k_{d\min} = 1 + e^{-\infty} \rightarrow 1$$

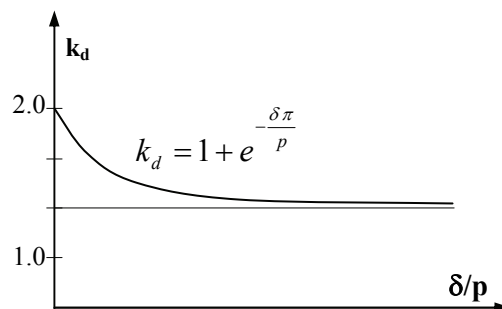
Ovaj slučaj odgovara kada odnos $\delta/p \rightarrow \infty$, odnosno kada je $\delta \gg p$.

Grafički prikaz eksponencijalne zavisnosti (69) prikazan je na sl. 6.

Očigledno je da za slučaj postojanja prigušenja u sistemu, koeficijent k_d se kreće u intervalu 1 do 2.

Ako prema (20), (21) i (25), odnos δ/p izrazimo u obliku:

$$\frac{\delta}{p} = \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\frac{b}{2} J_{12}}{\sqrt{c J_{12} - \frac{b^2}{4} J_{12}^2}} = \sqrt{\frac{J_{12}}{\frac{4c}{b^2} - J_{12}}} \quad (70)$$



Slika 6. Zavisnost maksimalne vrednosti elastičnog torzionog momenta od odnosa δ/p

onda se pojednostavljuje analiza veličina koje utiču na koeficijent k_d .

Prema dijagramu na sl. 6, koeficijent k_d opada sa porastom odnosa δ/p .

Analizom zavisnosti (70), s obzirom na (69), sledi da se koeficijent k_d smanjuje porastom karakteristike prigušenja b i smanjenjem torzione krutosti c , pri ostalim nepromenljivim uslovima. Isto tako, pri ostalim nepromenjenim uslovima, koeficijent k_d postaje manji pri manjim momentima J_1 i J_2 , s obzirom da moment J_{12} opada sa porastom J_1 i J_2 .

3. ZAKLJUČAK

Torzioni elastični moment posmatranog glavnog vretena, kao što je pokazano, menja se tokom vremena, što znači da ima dinamički karakter. Za kvalitativne analize i kvantitativne proračune najvažnija je njegova maksimalna amplituda. Amplituda momenta pod uticajem otpora smanjuje se po geometrijskoj progresiji. Iz izvedenog opšteg modela sledi da dinamički efekat obrtnog momenta, pri ostalim nepromenljivim uslovima,

opada sa porastom karakteristika prigušenja i sa smanjenjem momenata inercije obrtnih masa, što može biti važan podatak za projektovanje.

Usvojeni koeficijent k_d , može se smatrati kao dobar pokazatelj pri komparaciji dinamičkog i statičkog torzionog obrtnog momenta. Kao što je pokazano, njegova teorijska vrednost u opštem slučaju kreće se u intervalu od 1 do 2, pri čemu gornja vrednost važi za slučaj kada je zanemareno prigušenje u sistemu. U praksi treba očekivati nešto veće vrednosti od teorijskih.

Izvedeni polazni opšti model za određivanje torzionih oscilacija i momenata, pokazao se vrlo efikasnim, s obzirom da je iz njega, na jednostavan način mogu izvesti i drugi karakteristični slučajevi posebnih modela, a koji mogu imati praktični značaj. Pri ovome modeli koji uzimaju u obzir karakteristike prigušenja više odgovaraju realnom stanju.

Posmatrani spoljašnji obrtni momenti, koji su konstantni i ne zavise od vremena, ne menjaju karakter torzionih oscilacija kao ni karakter elastičnog torzionog momenta.

Za slučaj kada je jedan od spoljašnjih momenata funkcija vremena, a što je čest slučaj u praksi, problem torzionih oscilacija može se rešiti na bazi izvedenog modela primenjujući naprimer, matematičku metodu varijacije konstanti.

Promenljive sile u prelaznom periodu rada mašine alatke, usled neravnomernog obrtanja (ubrzanja i usporjenja), prenose se na radna vretena, posebno glavno vreteno, i zbog njihove elastičnosti i karakteristika prigušenja predstavljaju poremećajne sile sistema, što ima za posledicu dopunska opterećenja u odnosu na statičko. Pri ovome poseban značaj imaju torzione oscilacije glavnih vretena koje se pri projektovanju najčešće proveravaju.

Iako je u radu posmatrano lako elastično vreteno mašine alatke, primena izvedenih zavisnosti moguća je kod određivanja određenih relativnih odnosa za moguće varijante pri projektovanju, s obzirom da osnovni cilj ne mora biti dobijanje apsolutnih vrednosti pojedinih karakteristika. Uvedena aproksimacija utiče samo na kinetičku energiju sistema.

Prikazani model uz odgovarajuće prilagođavanje, moguće je primeniti i kod prenosnika drugih mašina alatki, na primer bušilica i glodalica.

LITERATURA

- [1] Tobias S.A.: Machine Tool, Bleckie, Glasgow, 1985.
- [2] Tarzimanov G.A.: Proektovanie metalorežuših stankov, Mašinstroenie, Moskva, 1982.
- [3] Vragov J.D.: Analiz komponovk metalorežuših stankov, Mašinstroenie, Moskva, 1982.
- [4] Muren H.: Konstruiranje odrezovalnih strojev, Fakulteta za strojarstvo, Ljubljana, 1983.
- [5] Milačić V.: Mašine alatke I i II, Mašinski fakultet, Beograd, 1980.
- [6] Trent E.M.: Mettal Cutting, Butterworths, London, 1980.
- [7] Holzman R.L.: Technische Mechanik, MRL, Stuttgart, 1986.
- [8] Bihovskij I.I.: Osnovi teorii vibracionoj tehniki, Moskva, 1987.
- [9] Jablonskij S.S.: Kurs teorii kolabanij, Moskva, 1989.
- [10] Rašković D.: Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd, 1976.
- [11] Seto W.W.: Theory and problems of mechanical vibrations, New York, 1978.
- [12] Goldner H.: Ubungsaufgaben aus der Technischen Mechanik, Leipzig, 1982.
- [13] Hartog J.P.D.: Mechanical Vibrations, New York, 1986.
- [14] Mihailović D.: Elementi matematičke analize I i II, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
- [15] Timoshenko S.: Strenth of materials New Jersey, London, 1978.
- [16] Timošenko S.: Teorija elastičnosti, prevod s ruskog, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- [17] Mihajlović D.: Diferencijalne jednačine, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
- [18] D. Nikolić, N. Tucović, G. Petrudis, N. Živanović: Primena QFD metode u procesu unapređenja kvaliteta aksijalnog ležaja, Časopis "IMK-14 Istraživanje i razvoj", br. (32-33), Kruševac, 2009.

APPENDIX THEORETICAL INVESTIGATION OF ELASTIC ROTATING MOMENT TORSIONS OSCILLATIONS DUE IN LABOR SPINDLE MACHINE TOOLS

Summary: The paper, starting from the kinematic scheme of a general movement of the main gear for machine tools, created a dynamic model for torsion oscillations for arbitrary working spindle, in case of unbalanced rotating motion. Hence, besides the main parameters of dynamic systems, are taken into account the elastic and damping characteristics. For the determination of the law, which would be seen to describe the movement and angle of rotation of elastic elements are applied Lagrang's other types of equations. Obtained legality is used to determine the elastic torsion moment, as important characteristics. It was shown that his dependency on time, and dynamic character. Comparison of working moments, which are present in the dynamic and static load was performed by introducing a suitable coefficient. On the basis of relations derived general model, the end of the paper, some relationships are a few typical cases, and referring to the law changes the angle of rotation, and estimates the relationship dynamic and static loads.

Key words: gear machine tools, the main spindle, uneven motion, torque system, torsions amortized fluctuations, the elastic torque, damping, static and dynamic load

Datum prijema rada: 15. 03. 2010. god.