Merodavni dinamički modeli mašina vertikalnog transporta i njihovo modeliranje

Radomir Đokić^{1*}, Jovan Vladić¹, Dragan Živanić¹

¹Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu (Srbija)

U radu je prikazana problematika formiranja dinamičkih modela liftova i izvoznih postrojenja u rudnicima. Kod ovih mašina, posebno rudničkih liftova izražene su dinamičke pojave, jer se radi o postrojenjima sa ekstremnim visinama (do 2000 m) i brzinama dizanja (do 20 m/s) pomoću čeličnih užadi. Prikazan je postupak formiranja merodavnog dinamičkog modela za analizu ovakvih postrojenja. Osnovni parametri, kao što su krutost i prigušenje, u toku dizanja su promenljive veličine i njihove vrednosti se određuju kombinovanjem teorijske analize i realizovanih eksperimentalnih rezultata na ekspres liftovima i rudničkim liftovima u realnim uslovima.

Ključne reči: Liftovi, izvozna postrojenja, dinamički model, modeliranje

1. UVOD

Jedni od predstavnika uređaja za vertikalno dizanje ljudi i tereta su rudnički liftovi koji opslužuju određene etaže u rudnicima korišćenjem koša (koji se kreće između najmanje dve čvrsto ugrađene vođice), čije mere i konstrukcija omogućuju pristup ljudima i utovar tereta. U rudnicima se koriste dva sistema, sa dobošem i pogonskom užetnjačom (Koepe sistem).

Kod sistema sa dobošem za dizanje, noseća užad se namotavaju i skladište na doboš. Sistemi dizanja putem trenja (Koepe) se najčešće primenjuju u evropskim rudnicima.

Modeliranje užeta se najčešće vrši pomoću tzv. Kelvinovog modela koji predstavlja paralelnu vezu idealno elastičnog tela i idealno viskoznog tela. Krutost i prigušenje, kao parametri ovog modela, su uglavnom definisani preko modula elastičnosti i koeficijenta prigušenja za homogena tela (čelik, aluminijum,...). Zbog specifične konstrukcije čeličnog užeta, definisanje ovih parametara je veoma složeno, pa se u praksi koriste orjentacioni podaci dobijeni na osnovu „ekstrapolacije“ eksperimenatalnih rezultata dobijenih pod određenim uslovima (najčešće statičkim), što može da dovede do većih netačnosti pri dinamičkoj analizi izvoznih mašina.

2. MEHANIČKE KARAKTERISTIKE ČELIČNOG UŽETA

2.1. Krutost i modul elastičnosti užeta

Krutost je osnovni parametar oscilatornih procesa i ona predstavlja karakteristiku materijala koja definiše odnos opterećenja i deformacije. Kod većine oscilatornih procesa sa malim amplitudama i elementima izrađenih od čelika i sličnih materijala ona se uzima kao konstantna veličina. Međutim, kod nekih materijala, koji se takođe koriste u mašinstvu, ova karakteristika nije linearna, što dovodi do pojave tzv. nelinearnih oscilacija, čija je analiza višestruko složenija. Kod mašina za dizanje sa čeličnim užadima javlja se specifičan slučaj nelinearnosti, koji se odnosi na promenu krutosti sa promenom slobodne dužine užadi prema relaciji:

$$c(t) = \frac{E \cdot A}{L(t)} \quad (1)$$

gde je:

E - modul elastičnosti užeta, MPa

A - poprečni presek užeta, mm²

$L(t) = L - \int v(t)dt$ - slobodna dužina užeta, m

$v(t)$ - obimna brzina užetnjače, m/s

Pored promenljive krutosti treba imati u vidu da je modul elastičnosti (E), za razliku od homogenih tela, znatno teže definisati, jer čelično uže predstavlja složenu konstrukciju koja se sastoji od većeg broja žica koje su upletene u strukove, a strukovi u užu sa jezgrom od čelika ili plastike.

Slika 1: Konstrukcija čeličnog užeta

U literaturi [2, 7] koriste se različiti izrazi za njegovo izračunavanje u zavisnosti od modula elastičnosti žica i uglova pouzavanja žica u struk i strukova u užu. Ovakvi izrazi daju samo orjentacione podatke, jer realne vrednosti modula elastičnosti, pored gore navedenih parametara, zavise od veličine napona, materijala jezgra, vremena eksploatacije (broj opterećivanja), vrste dodira

žica itd. Na sl. 2 i 3 prikazani su eksperimentalni rezultati sprovedeni u [2], a za čelično užde sa jezgrom od prirodnih vlakana. Uočljiva je razlika u rezultatima za slučaj prvog opterećenja (novo užde) i posle 10 opterećenja, odnosno rasterećenja (sl. 2), kao i uticaj nivoa napona pri opterećenju i rasterećenju (sl. 3). Sa slike se da uočiti naglo povećanje napona u užetu usled njegovog istežanja.

Promena napona na istežanje kod užadi sa čeličnim jezgrom prikazana je na sl. 4. Dijagram takođe pokazuje naglo povećanje napona prilikom izduženja užadi. Ovo povećanje nije tako veliko kao kod užadi sa vlaknastim jezgrom, međutim, zaostala deformacija je veća. Više o ovoj analizi i o rezultatima ovog eksperimenta dato je u [2].

Slika 2: Dijagram napon-deformacija kod novih užadi sa vlaknastim jezgrom, nakon 10 opterećenja, [2]

Slika 3: Dijagram napon-deformacija kod novih užadi sa vlaknastim jezgrom, posle desetog ciklusa nanošenja opterećenja za različite nivoe napona, [2]

Slika 4: Promena napona na istežanje kod užadi sa čeličnim jezgrom, u slučaju novog užeta i nakon 10 opterećenja [2]

Primena čak i ovako dobijenih rezultata u statičkim uslovima je diskutabilna kada se radi o dinamičkim procesima. Adekvatne veličine modula elastičnosti za užad u eksploataciji mogu se dobiti direktnim merenjima u realnim uslovima rada postrojenja. Koristeći funkcionalne zavisnosti između krutosti (c), frekvencije (ω) i modula elastičnosti (E), za slučaj slobodnih oscilacija sa prigušenjem, može se odrediti vrednost modula elastičnosti na osnovu perioda osilovanja (T), odnosno frekvencije (f), određenih na dijagramima dobijenih eksperimentalnim putem, sl. 5.

Na osnovu perioda oscilovanja prigušenih oscilacija, kružna frekvencija je $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T}$, što iz osnovne diferencijalne jednačine kretanja, daje koeficijent krutosti:

$$c = M_e \cdot \omega^2 \quad (2)$$

a na osnovu izraza (1) može se dobiti:

$$E = \frac{c \cdot L}{A} \quad (3)$$

gde je:

$\omega = \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \delta^2}$ - kružna frekvencija slobodnih oscilacija, rad/s

$\tilde{T}$ - period oscilovanja (izmerena vrednost), sl. 5, s

$M_e = M + q \cdot \frac{2}{3} L$ - redukovana oscilatorna masa, kg

M - ukupna masa koja visi na užadima, kg

A - površina poprečnog preseka užeta, mm²

U toku kretanja dolazi do povećanja ili smanjenja slobodne dužine nosećih užadi (dizanje ili spuštanje), što ukazuje da treba uzimati promenljivu dužinu $L(t)$ u izrazu za M_e . Međutim, kod liftova većih visina dizanja i izvoznih postrojenja, korišćenje kompenzacionih lanaca i užadi, praktično dovodi do toga da je redukovana oscilatorna masa gotovo u svakom trenutku približno ista (ako se uzme u obzir $2/3L$).

Slika 5: Amplitude i period prigušenih oscilacija

2.2. Prigušenje kod liftova i izvoznih postrojenja

Može se smatrati da publikovani podaci o realnim vrednostima prigušenja kod čeličnih užadi, koja se nalaze u eksploataciji praktično ne postoje. Podaci o koeficijentima prigušenja čak i kod homogenih tela, kao što su metali (čelik, aluminijum, ...), zbog složenosti i specifičnosti njihovog definisanja, su takođe veoma oskudni.

U okviru oscilovanja mašinskih sistema javljaju se tri oblika prigušenja [5]:

- Unutrašnje prigušenje u materijalu,
- Kulonovo (suvo) trenje i
- Otpor sredine (fluidno prigušenje).

Unutrašnje prigušenje javlja se u dva oblika, kao čisto viskozno prigušenje i kao posledica unutrašnjeg trenja u materijalu tzv. histereza, [5]. Za idealno elastične materijale važi poznati odnos napon-deformacija $\sigma = E \cdot \varepsilon$, gde E predstavlja modul elastičnosti. Za realne materijale napon kasni, pa se javlja histerezisna petlja, prikazana na sl. 7. Kada se deformacija i napon menjaju harmonijski, petlja je elipsa, [6]. Površina histerezisne petlje predstavlja gubitak energije po jedinici zapremine materijala tokom jednog oscilatornog ciklusa.

Viskozno prigušenje kod koga je sila prigušenja proporcionalna brzini, je najčešći način definisanja uticaja unutrašnjeg prigušenja. Model sa viskozim prigušenjem i jednim stepenom slobode kretanja dat je na sl. 6. Dakle, jednačina kretanja sistema je dobro poznata jednačina, kod koje je sila prigušenja proporcionalna brzini $F_v = b \cdot \dot{x}$:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (4)$$

Rešenje jednačine je funkcija data na sl. 5.

Slika 6: Oscilatorni sistem sa viskozim prigušenjem, [1]

Histerezisno prigušenje je prigušenje koje se javlja zbog unutrašnjeg trenja u strukturi materijala (eng. Hysteretic damping), sl. 7. Za razliku od viskoznog prigušenja ovde sila prigušenja ne zavisi od frekvencije, već zavisi, kako je rečeno, od površine histereza,

odnosno od gubitka energije pri cikličnom opterećenju. Model sa histerezisnim prigušenjem dat je na sl. 8. U osnovi, analiza sistema sa ovakvim prigušenjem zahteva da se sila prigušenja podeli sa kružnom frekvencijom oscilovanja (ω), što daje jednačinu:

$$m\ddot{x} + \left(\frac{b_h}{\omega}\right)\dot{x} + cx = 0 \quad (5)$$

Slika 7: Histerezisne površine kod homogenih materijala, [1]

Slika 8: Sistem sa histerezisnim prigušenjem, [2]

Kod čeličnog užeta treba očekivati da preovlađuje histerezisno prigušenje (kao kod homogenih materijala - metala) pri čemu treba imati u vidu da veličina ovog prigušenja ne zavisi od oblika histereza, već od površine histereza. Ali zbog složene konstrukcije, posebno kod užeta sa vlaknastim (nemetallnim) jezgrom, moguć je i udeo viskoznog prigušenja. Ne postoje značajniji rezultati, pa bi bila neophodna eksperimentalna ispitivanja ovog parametra kod čeličnih užadi.

Kulonovo prigušenje se kod izvoznih postrojenja javlja u vodičama koša i kontratega, sl. 9. Sila trenja se može uzeti kao konstantna veličina koja zavisi od koeficijenta trenja i normalne sile sa suprotnim smerom u odnosu na kretanje. Kod centričnog vešanja kabine veličina normalne sile zavisi od montažnih uslova kod klizača ili veličine prednaprezanja opruge točkova za vođenje. Kod ekscentričnog vešanja (npr. ruksag sistem) i kod ekscentričnog položaja tereta u kabini normalna sila zavisi od konstruktivnih parametara kabine i može biti velika.

Slika 9: Vođice izvoznog postrojenja

Slika 10: Sistem sa Kulonovim prigušenjem, [1]

$$m\ddot{x} + cx = \mu F_N (\text{sign } \dot{x}) \quad (6)$$

Fluidno prigušenje se javlja kod rudničkih liftova zbog opstrujavanja vazduha pri oscilovanju koša u oknu. Za rudničke liftove najveći uticaj fluidnog prigušenja se javlja pri minimalnom unutrašnjem prigušenju i maksimalnoj brzini oscilovanja. Pošto brzina oscilovanja za izvozno postrojenje, za preporučene uslove kočenja, ne prelazi 1 m/s, sledi da je ovaj uticaj znatno manji od 1% u odnosu na prigušenje usled unutrašnjeg trenja i može se zanemariti.

Shodno prethodnom, može se konstatovati da se pri analizi dinamičkog ponašanja izvoznog postrojenja, prigušenje može modelirati kao prigušenje koje se sastoji od unutrašnjeg prigušenja histerezisnog tipa i eventualno Kulonovog prigušenja koje se javlja na vođicama koša u zavisnosti od ekscentričnosti tereta u košu.

Slično kao i modul elastičnosti, ukupni koeficijent prigušenja se može odrediti merenjima oscilovanja koša izvoznog postrojenja. Na osnovu teorije slobodnih harmonijskih oscilacija sa prigušenjem, merenjem amplituda oscilovanja, sl. 5, može se odrediti logaritamski dekrement, a na osnovu njega i koeficijenti prigušenja prema:

$$D = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{n} \ln \frac{x_i}{x_{i+n}} = \delta \cdot \tilde{T} \quad (7)$$

$$\delta = \frac{D}{\tilde{T}} \quad (8)$$

pa je faktor (parametar) prigušenja:

$$b = 2 \cdot \delta \cdot M_e \quad (9)$$

gde je:

x_i, x_{i+1} i x_{i+n} - izmerene amplitude,

$\tilde{T}$ - izmereni period oscilovanja slobodnih oscilacija sa prigušenjem,

M_e - redukovana oscilatorna masa (masa koša, tereta i dela užadi).

2.3. Pogonske karakteristike

Pogon, odnosno prinudno kretanje uređaja vertikalnog transporta moguće je modelirati preko pogonskog momenta, sl. 11a ili putem tzv. kinematičkog uslova na pogonskoj užetnjači, sl. 11b.

Slika 11: Dinamički modeli pogona, a) sa pogonskim momentom i b) sa brzinom dizanja

Dakle, jedan od načina zadavanja pogonske karakteristike pri analizi mašina za vertikalno dizanje je, kako je već navedeno, preko pogonskog momenta. Ovakav način je prvenstveno primenljiv kod numeričke analize primenom savremenih računarskih alata, a da pri tom ne postoji povratni zapis o promeni kinematskih veličina na pogonskom uređaju. Dakle, najjednostavniji način je da se pogon opiše momentnom karakteristikom „standardnog“ asinhronog motora. Zbog sve izraženije primene frekventnih pretvarača i mogućnosti kvalitetne regulacije, ovaj opis i jeste praktično vezan samo za asinhronu mašinu.

2.3.1. Pogonska karakteristika asinhronog elektromotora

Ako je potrebno modelirati pogon i opisati rad asinhronu mašine, kako u ustaljenom režimu, tako i u prelaznom režimu, onda za to može da posluži kompleksni matematički model, definisan kroz sistem diferencijalnih i algebarskih jednačina, [11]:

$$\begin{aligned} u_s &= R_s \cdot i_s + \frac{d\psi_s}{dt} + j\omega_s \psi_s \\ 0 &= R_r' \cdot i_r + \frac{d\psi_r}{dt} + j(\omega_s - \omega) \psi_r \\ \psi_s &= L_s \cdot i_s + M \cdot i_r \\ \psi_r &= M \cdot i_s + L_r' \cdot i_r \\ J \frac{d\omega}{dt} &= P_m - m_m \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ m &= j \frac{M}{L_r} (\bar{i}_s \cdot \psi_r - i_s \cdot \bar{\psi}_r) = jM (\bar{i}_s' \cdot i_r - i_s \cdot \bar{i}_r') = j(\bar{i}_s' \cdot \psi_s - i_s \cdot \bar{\psi}_s) \end{aligned} \quad (10)$$

gde je: u_s - napon, R_s - otpor statora, R_r' - svedeni otpor rotora, i_s - statorska struja, i_r' - rotorska struja, ψ_s - magnetni fluks statora, ψ_r - magnetni fluks rotora, ω_s - ugaona brzina statora, ω - razlika ugaone brzine statora i rotora, M - zajednička induktivnost, L_s - statorska

induktivnost, L_r - rotorska induktivnost svedena na stator, J - moment inercije rotora, m - električni moment po paru polova, m_m - mehanički moment, j - imaginarna jedinica.

Zbog svoje složenosti i potrebe merenja više električnih veličina, primena ovakvog matematičkog modela je veoma retka u numeričkoj analizi mehaničkih sistema.

Ako se u datom kompleksnom matematičkom modelu izvrši razdvajanje realnih i imaginarnih delova, dobija se, umesto kompleksnog, realni matematički model, čiji se oblik može naći u [11].

Zbog svoje složenosti, veličina pogonske sile (momenta) u prelaznom režimu rada obično se određuje približno, u zavisnosti od načina upuštanja pogonskog motora, na osnovu sledećih relacija:

$$M(t) = M_0 = \text{const. (sl. 12 -linija a)}$$

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \quad \text{- meki pogonski (kočioni)}$$

režim (sl. 12 - linija b)

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right) \quad \text{- srednji pogonski (kočioni)}$$

režim (sl. 12 - linija c)

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t^4}{t_1^4}\right) \quad \text{- kruti pogonski (kočioni)}$$

režim (sl. 12 - linija d)

gde je:

M_0 - maksimalna početna vrednost pogonskog momenta

t_1 - period ubrzanja (kočenja)

Slika 12: Različiti modeli pogonskog momenta (sile)

2.3.2. Kinematske karakteristike pogonskog sistema

Kako je već navedeno, jedan od načina modeliranja pogonskog mehanizma jeste i definisanje kinematskih uslova na pogonskoj užetnjači (bubnju). Modeliranje preko kinematskih uslova podrazumeva poznavanje brzine dizanja, što se obezbeđuje merenjem obimne brzine užetnjače na mestu nailaska užeta (preračunata brzina merena na mestu kočionog diska).

Praktično, pri analizi liftova i izvoznih postrojenja to bi značilo da postoje dva načina:

- zadavanjem funkcije promene broja obrtaja elektromotora (preko obimne brzine pogonske užetnjače),
- zadavanjem ubrzanja na pogonskoj užetnjači (bubnju).

Na sl. 13 prikazani su uobičajeni dijagrami brzine, ubrzanja i trzaja.

Slika 13: Primeri dijagrama kretanja za jednobrzinski (a) i dvobrzinski (b) motor

Definisanje brzine u funkciji vremena može da se izvrši na više načina. Jedan od načina je da se brzina definiše kombinacijom Hevisajdove (step) funkcije sa kubnim polinomom i linearne zavisnosti brzina-vreme, [8].

2.4. Merodavni dinamički model mašine za vertikalno dizanje

Na osnovu prethodne analize, za slučaj mašina vertikalnog dizanja, sa pogonskom užetnjačom (bubnjem) iznad okna može se definisati merodavan model za dinamičku analizu u obliku prikazanom na sl. 14.

Slika 14: Merodavni dinamički model za analizu mašina vertikalnog transporta

3. ZAKLJUČAK

Dinamička analiza mašina za vertikalno dizanje velikih visina (do 2000 m), velikih nosivosti i brzina dizanja je od posebnog značaja zbog definisanja kvalitetne podloge za optimalno projektovanje i njihovo održavanje u relativno teškim radnim uslovima.

Merodavni model predstavlja oscilatorni sistem sa jednim stepenom slobode, sa užadima koja su opisana ekvivalentnim Kelvinovim modelom pri čemu se krutost pri dizanju menja sa promenom slobodne dužine užeta dok je prigušenje histerezisnog tipa gde je uključeno i trenje u vodicama, [4]. Masa se uzima kao konstantna veličina za odgovarajući oscilatorni proces, ali se razmatraju različite varijante (prazna kabina, puna kabina i redukovana težina užadi). Definisanje parametara ovog modela se vrši kombinovanjem poznatih teorijskih relacija za slobodne oscilacije sa prigušenjem i rezultata eksperimentalnih merenja.

Kada se uporedi sa modelom prikazanim na sl. 14, može se konstatovati značajna razlika, jer merodavni model obuhvata uticaj promenljivosti krutosti sa kretanjem, promenljivost mase i prigušenje histerezisnog tipa u odnosu na uobičajeni model užeta sa konstantnom krutošću i masama i prigušenjem viskoznog tipa. Ovakav dinamički model može poslužiti za određivanje dinamičkih parametara (E , b , ω , δ , ...) korišćenjem rezultata merenja na konkretnom izvoznom postrojenju.

LITERATURA

- [1] C. F. Beards, "Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems" Edward Arnold - Hodder Headline Group, London, (1995)
- [2] K. Feyrer, "Wire Ropes", University of Stuttgart, Germany, (2007)
- [3] I. Herrera, H. Su and S. Kaczmarczyk, "Investigation into the damping and stiffness characteristics of an elevator car system", Applied Mechanics and Materials, 24-25, pp. 77-82, (2010)
- [4] O. B. Хромов, "Выбор модели внутреннего трения на основе экспериментальных осциллограмм затухающих колебаний системы" 3б. наук.: Механика, энергетика, экология, Севастополь, pp. 35-39, (2010)
- [5] C. W. Silva, "Vibration, Damping, Control and Design", CRC Press - Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, (2007)
- [6] Đ. Spasojević, "Laboratorija fizike 1 i 2", Fizički fakultet u Beogradu, (2008)
- [7] J. N. Vergne, "The Hard Rock Miner's Handbook, Edition 3", McIntosh Engineering Limited, Ontario, Canada, (2003)
- [8] J. Vladić, R. Đokić, M. Kljajin and M. Karakašić, "Modelling and simulations of elevator dynamic behaviour", Tehnički vjesnik/Technical Gazette, Vol. 18, No.3, pp. 423-434, (2011)
- [9] J. Vladić, M. Jovanović, R. Đokić, M. Kljajin and M. Karakašić, "Theoretical and experimental analysis of elevator dynamic characteristics". Tehnički vjesnik/Technical Gazette, Vol. 22, No. 4, pp. 1011-1020 (2015).
- [10] J. Vladić, P. Malešev, R. Šostakov and N. Brkljač, "Dynamic analysis of the load lifting mechanisms", Strojniški vestnik 54, 10, pp. 655-661, (2008)
- [11] V. Vučković, "Električni pogoni", Elektrotehnički fakultet Beograd, (1997)
- [12] B. Vujanović, "Teorija oscilacija", Univerzitet u Novom Sadu, (1995)

Standard Dynamic Models of Machines for Vertical Transport and Its Modeling

Radomir Đokić^{1*}, Jovan Vladić¹, Dragan Živanić¹

¹Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad (Serbia)

The paper presents the issues with the elevators and mine elevators dynamic models forming. Dynamic occurrences are particularly emphasized with those elevators due to the fact that they are facilities with extreme heights (up to 2000 m) and lifting speeds (up to 20 m/s) using the steel ropes. It shows the forming path of a competent dynamic model for the analysis of such elevators. Basic parameters, according as stiffness and damping, are of variable magnitude during the lifting, so their values are defined through a combination of theoretical analysis and performed experimental results at express and mine elevators in the real conditions.

Keywords: Elevators, mine elevators, dynamic model, modeling

1. INTRODUCTION

Some of hoisting devices are the mine elevators, which are used to interconnect different mine horizons by using a mine cage (which is moved between at least two firmly set guide rails), whose dimensions and construction enable ore loading and are approachable to people. The mines use two systems, one with a drum and the other with a driving pulley (Koepe system).

At systems, which have a drum for lifting, the driving ropes are winding and stored into the drum. The systems of hoisting by friction (Koepe) are most common in European mines.

Modeling of the wire rope is usually done through the so-called Calvin's model which represents a parallel connection between an ideally elastic body and an ideally viscous body. Stiffness and damping, as the parameters for the model, are mostly defined through the elasticity modulus and a damping coefficient for homogenous bodies (steel, aluminium, ...). Due to the specific construction of the steel wire rope, the defining of these parameters is very complex, so in practice we use approximate data obtained from "extrapolation" of the experimental results which are obtained in certain conditions (mostly static), which can lead to greater inaccuracies with the dynamic analysis of mine elevators.

2. MECHANICAL CHARACTERISTICS OF THE STEEL WIRE ROPE

2.1. Stiffness and rope elasticity modulus

Stiffness is the basic parameter of oscillatory processes and it represents a feature of a material that defines the ratio between load and deformation. It is viewed as a constant matter in most oscillatory processes with small amplitudes and elements made of steel and similar materials. On the other hand, it is a case with some materials also used in mechanical engineering that the feature is not linear, which brings to the occurrence of the so-called non-linear oscillations whose analysis is more complex on numerous levels. A specific case of non-linearity happens at the lifting machines with steel ropes and it refers to the fact that the stiffness changes together

with the change in the ropes' free lengths in the following relation:

$$c(t) = \frac{E \cdot A}{L(t)} \quad (1)$$

with:

E - elasticity modulus, MPa

A - rope cross-section area, mm²

$L(t) = L - \int v(t)dt$ - free rope length, m

$v(t)$ - circumferential velocity on the pulley, m/s

Apart from the variable stiffness, attention should be paid to the elasticity modulus (E), which is much more difficult to define in comparison with the homogenous bodies since the steel rope is a complex structure, consisting of a large number of wires layered into strands, while the strands are stranded into a rope with the core made of steel or fibre.

Figure 1: Construction of the wire rope

There are different expressions mentioned in the literature [2, 4], for its calculation depending on the wire elasticity modulus and the angles at which the wires lay into a strand, and strands into a rope. These expressions

only give approximate data because the real magnitudes of the elasticity modulus, apart from the above mentioned parameters, depend on the stress magnitude, core material, time spent in service (the number of load cycles), types of wire connections etc. Fig. 2 and Fig. 3 shows the experimental results [2], for the steel wire rope with a fibre core. We can show a noticeable difference in the results between the first loading of the rope (new rope), and after the tenth loadings and unloading (Fig. 2), and also the effect of the stress level with the loading (Fig. 3). The figure shows quickly the stress increasing in the wire rope because of its extension.

The change of the tensile stress in ropes with a steel core is shown in Fig. 4. The diagram also shows a sudden rise in stress when the wire ropes are lengthened. This increase is not so big with fiber core ropes, however, the remaining deformation is even bigger. More about this analysis and the results of the experiment is shown in [2].

Figure 2: Stress-extension curves for new stranded wire ropes with fibre core, after 10 loadings, [2]

Figure 3: Stress-extension curves for new stranded wire ropes with fibre core, after 10 loadings for the difference stress levels, [2]

Slika 4: The rope tensile stress changes for wire ropes with a steel core, for a new wire rope and after 10 loadings, [2]

The application of the results generated in this way is disputable when it comes to dynamic processes. Adequate elasticity modulus values for the ropes in exploitation can be gained through direct measuring in the real working conditions of the elevator facilities. By using the functional dependence between the stiffness (c), circular frequency (ω), and elasticity modulus (E), for the case of free oscillations with damping, there can be determined an elasticity modulus value by putting oscillations period (T), i.e. frequency (f), from the diagrams which were experimentally obtained (Fig. 5):

According to an oscillation period of the damping, circular frequency is $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T}$, where from the basic differential equation of the motion, provides a stiffness coefficient:

$$c = M_e \cdot \omega^2 \quad (2)$$

and based on (1), there can be determined:

$$E = \frac{c \cdot L}{A} \quad (3)$$

with:

$\omega = \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \delta^2}$ - circular frequency of free oscillations, rad/s

$\tilde{T}$ - oscillation period (measured value), Fig. 5, s

$M_e = M + q \cdot \frac{2}{3} L$ - reduced oscillatory mass, kg

M - overall mass on the wire ropes, kg

A - rope cross-section area, mm²

During the movement, there occurs the increase or decrease in the degree of the free length of driving ropes (hoisting or lowering), which suggests that a variable length should be taken into account $L(t)$ in the expression for M_e . Nevertheless, if the elevators have a higher hoisting velocities and mine elevators, using compensation chains and ropes practically make the reduced oscillatory

mass the same in almost every moment (when considering $2/3L$).

Figure 5: Amplitudes and the period of damped oscillations

2.2. Damping with the elevators and mine elevators

It can be said that published data on real damping values with steel wire ropes, which are being exploited, virtually don't exist. The data on damping coefficient is very scarce, even with the homogenous bodies, such as metals (steel, aluminium, ...), because of the complexity and specifics of their defining.

There are three damping forms within the oscillations of the mechanical systems [5]:

- inner damping in the material,
- Coulomb (dry) friction and
- environment resistance (fluid damping).

The inner damping comes in two forms: as a pure viscous damping, and as a consequence of the internal friction in the material, a.k.a. hysteretic, [5]. For ideally elastic materials, there is the renowned ratio stress-deformation $\sigma = E \cdot \varepsilon$, where E stands for elasticity modulus. Stress is late for real materials, so a hysteresis loop occurs, which is shown in Fig. 7. When the deformation and stress are changed in harmony, the loop becomes an ellipsis, [6]. The area of hysteresis loop represents loss of energy for the unit of material volume during one oscillatory cycle.

Viscous damping, where the damping force is proportional to the velocity, is the most common way to define the influence of inner damping. A model with viscous damping and one degree of freedom is given in Fig. 6. Therefore, the equation of movement system is a well-known one, in which the force of damping is in proportion to the velocity $F_v = b \cdot \dot{x}$:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (4)$$

The solution for the equation is a function in Fig. 5.

Figure 6: Oscillatory system with viscous damping, [1]

Hysteretic damping je prigušenje kaje se javlja zbog unutrašnjeg trenja u strukturi materijala (histerezis), sl 9. Za razliku od viskoznog prigušenja ovde sila prigušenja ne zavisi od frekvencije već zavisi od površine histerezisa odnosno od gubitka energije pri cikličnom opterećenju.

Hysteretic damping is a damping which happens because of the internal friction within the material structure (hysteretic), Fig. 7. In contrast to the viscous damping, the damping force in this case does not depend on the frequency. It depends on the surface of hysteretic, i.e. the loss of energy in periodic loading.

A model with hysteresis damping is given in Fig. 8. Basically, the analysis of a system with such damping demands the damping force to be divided with a circular oscillation frequency (ω), which leads to the following equation:

$$m\ddot{x} + \left(\frac{b_h}{\omega}\right)\dot{x} + cx = 0 \quad (5)$$

Figure 7: Hysteretic surfaces in homogenous materials [1]

Figure 8: System with a hysteretic damping, [2]

It should be expected that hysteretic damping is more common with steel ropes (just like with the homogenous materials – metals). Attention should be paid that the damping magnitude does not depend on the hysteretic form, but its surface. However, due to the complex construction, especially in the ropes with the fibre core, a viscous damping can play a role, too. For now, there are no significant results, so it would be a good idea to do experimental research of this parameter in wire ropes.

Coulomb damping in the mine elevators occurs in the guide rails of cage and counterweight, Fig. 9. The friction force can be used as a constant value which depends on the friction coefficient and the normal force with the direction opposite of the movement. With the central hanging of the cage, the value of normal force depends on the value of springs preload of the wheels. With eccentric hanging (e.g. rucksack system) and eccentric position of the load in the car, the normal force

depends on the structural parameters of the car and it can be large.

Figure 9: Guide rails of the mine elevators

Figure 10: System with Coulomb damping, [1]

$$m\ddot{x} + cx = \mu F_N (\text{sign } \dot{x}) \quad (6)$$

Fluid damping occurs with mine elevators because air fluctuates when the cage oscillates in the shaft. For the mine elevators, the biggest influence of fluid damping happens when the inner damping is minimal and the oscillation velocity is at its maximum. Since the oscillation speed for a mine elevator in recommended stopping conditions does not go over 1 m/s, it can be concluded that the influence is less than 1% and it can be ignored.

In addition to that, it can be concluded that in the analysis of dynamic behaviour of the mine elevators the damping can be modelled as damping consisting of an inner damping of the hysteretic type and Coulomb damping occurring in the guide rails of the cage depending on eccentric position of the load in the cage.

Similar to the elasticity modulus, the overall damping coefficient can be defined by measuring the oscillations of the mine elevators cage. Based on the theory of free harmonic oscillations with the damping, measuring oscillation amplitude, Fig. 5, a logarithm decrement can be defined, and from there on damping coefficients using the:

$$D = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{n} \ln \frac{x_i}{x_{i+n}} = \delta \cdot \tilde{T} \quad (7)$$

$$\delta = \frac{D}{\tilde{T}} \quad (8)$$

so the damping parameter is:

$$b = 2 \cdot \delta \cdot M_e \quad (9)$$

with:

x_i, x_{i+1} and x_{i+n} - measured amplitudes,

$\tilde{T}$ - measured oscillation period of free oscillations with the damping,

M_e - reduced oscillatory mass (mass of the cage, load and section of the ropes).

2.3. Driving characteristics

Drive, or the necessary movement of the vertical transport devices, can be modelled through a driving torque, Fig. 11a or through a so-called kinematic condition on the driving pulley, Fig. 11b.

Figure 11: Dynamic models of the drive, a) with a driving torque and b) with a lifting velocity

Therefore, one of the ways for setting the driving characteristics in the analysis of machines for vertical hoisting is, as it was said before, through a drive moment. That way is first of all applicable in numeric analysis by using contemporary computer tools, while there is no feedback on the change of kinematic values on a driving device. According to that, the simplest way is to describe the drive with a moment characteristic of a “standard” asynchronous engine. Due to the even more pronounced usage of frequency converters and a prospect of good regulation, this description is practically valid only for asynchronous machines.

2.3.1. Driving characteristics of an asynchronous electric motor

If it is needed to model the drive and describe the actions of an asynchronous machine, both in normal and transfer regime, in that case we can use a complex mathematical model, defined through a system of differential and algebraic equations, [11]:

$$\begin{aligned} u_s &= R_s \cdot i_s + \frac{d\psi_s}{dt} + j\omega_s \psi_s \\ 0 &= R_r' \cdot i_r + \frac{d\psi_r}{dt} + j(\omega_s - \omega) \psi_r \\ \psi_s &= L_s \cdot i_s + M \cdot i_r \\ \psi_r &= M \cdot i_s + L_r' \cdot i_r \\ J \frac{d\omega}{dt} &= P_m - m_m \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \\ m &= j \frac{M}{L_r} (\bar{i}_s \cdot \psi_r - i_s \cdot \bar{\psi}_r) = jM (\bar{i}_s \cdot i_r - i_s \cdot \bar{i}_r) = j(\bar{i}_s \cdot \psi_s - i_s \cdot \bar{\psi}_s) \end{aligned} \quad (10)$$

with: u_s - voltage, R_s - stator resistance, R_r' - narrowed down rotor resistance, i_s - stator electrical circuit, i_r' - rotor electrical circuit, ψ_s - stator magnetic flux, ψ_r - rotor magnetic flux, ω_s - stator angular velocity, ω - difference

between stator and rotor angular velocity, M - common inductance, L_s - stator inductance, L_r - rotor inductance narrowed down to stator, J - moment of inertia of a rotor, m - electrical moment per pole pairs, m_m - mechanical moment, j - imaginary unit.

Owing to its complexity and the necessity to measure multiple electric values, the application of such mathematical model is very rare in the numerical analysis of mechanical systems.

If in the provided complex mathematical model we perform the separation of real and imaginary parts, we obtain, instead of a complex one, a real mathematical model, whose form is shown in [11].

It is most common to approximately define the amount of driving force in the transferring operating regime, depending on the way of releasing the driving motor, based on these relations:

$$M(t) = M_0 = \text{const. (Fig. 12 - line a)}$$

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \text{ - soft drive regime (Fig. 12 - line b)}$$

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right) \text{ - medium drive regime (Fig. 12 - line c)}$$

$$M(t) = M_0 \cdot \left(1 - \frac{t^4}{t_1^4}\right) \text{ - rigid drive regime (Fig. 12 - line d)}$$

with:

M_0 - maximal driving torque (force) value at the beginning,

t_1 - acceleration time.

Figure 12: Different models of driving torque (force)

2.3.2. Kinemtic characteristics of driving systems

As it has already been mentioned, one of the ways to model a drive mechanism is defining the kinematic conditions on a driving pulley (the drum).

Modelling in kinematic conditions implies understanding the lifting velocity which is guaranteed by measuring the circumferential velocity of the pulley, at the point where the rope is meeting the driving pulley (calculated velocity, based on the measured value on the brake disc circumference).

Practically, that would mean there are two ways when it comes to elevators and mine elevators analysis:

- defining the function for changing the number of revolutions of electrical motor (through a velocity of a driving pulley),
- defining acceleration on a driving pulley (drum),

Fig. 13 shows the usual velocity, acceleration and jerk diagrams.

Figure 13: Examples of the diagram of movement for one (a) and two (b) velocities of motor

Defining the velocity in time function can be done in several ways. One of the ways is to define the velocity with a combination of Heaviside (step) function with a cube polynomial and a linear velocity-time dependence, [8].

2.4. Suitable dynamic model for vertical transport machines

Based on the previous analysis, in the case of vertical transport machines, with a driving pulley (drum) above the shaft, a suitable model for the dynamic analysis can be defined in the form given in Fig. 14.

Figure 14: Suitable dynamic model for the analysis of the vertical transport machines

3. CONCLUSION

Dynamic analysis of machines for vertical lifting with extreme heights (up to 2000 m), the carrying capacity and the lifting velocities is of special interest because they define the quality basis for optimal projecting and their maintenance in relatively heavy working conditions.

A suitable model represents an oscillatory system with one DOF, with the ropes that are described with an equivalent Kelvin's model where the stiffness during lifting is changed in accordance with the rope's free length while, at the same time, damping is of the hysteretic type

with the friction of the guide rails included in it [4]. The mass is taken as a constant for a specific oscillatory process, but different options are considered (an empty car, full car and the reduced rope weight). Defining the parameters for the model are determined by combining the well known theoretical relations for free oscillations with damping together with the experimental measuring results.

When compared to a model in Fig. 14, a significant difference can be noted, because the standard model comprises the influence of variable stiffness with lifting, variability of the mass and a hysteresis damping type in comparison with the common model of a rope with constant stiffness and masses and viscous damping. The dynamic model can be used for determining the dynamic parameters (E , b , ω , δ , ...) by using measuring results from a specific mine elevator.

REFERENCES

- [1] C. F. Beards, "Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems" Edward Arnold - Hodder Headline Group, London, (1995)
- [2] K. Feyrer, "Wire Ropes", University of Stuttgart, Germany, (2007)
- [3] I. Herrera, H. Su and S. Kaczmarczyk, "Investigation into the damping and stiffness characteristics of an elevator car system", *Applied Mechanics and Materials*, 24-25, pp. 77-82, (2010)
- [4] О. В. Хромов, "Выбор модели внутреннего трения на основе экспериментальных осциллограмм затухающих колебаний системы" 36. наук.: Механика, энергетика, экология, Севастополь, pp. 35-39, (2010)
- [5] C. W. Silva, "Vibration, Damping, Control and Design", CRC Press - Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, (2007)
- [6] Đ. Spasojević, "Laboratorija fizike 1 i 2", Fizički fakultet u Beogradu, (2008)
- [7] J. N. Vergne, "The Hard Rock Miner's Handbook, Edition 3", McIntosh Engineering Limited, Ontario, Canada, (2003)
- [8] J. Vladić, R. Đokić, M. Kljajin and M. Karakašić, "Modelling and simulations of elevator dynamic behaviour", *Tehnički vjesnik/Technical Gazette*, Vol. 18, No. 3, pp. 423-434, (2011)
- [9] J. Vladić, M. Jovanović, R. Đokić, M. Kljajin and M. Karakašić, "Theoretical and experimental analysis of elevator dynamic characteristics". *Tehnički vjesnik/Technical Gazette*, Vol. 22, No. 4, pp. 1011-1020 (2015).
- [10] J. Vladić, P. Malešev, R. Šostakov and N. Brkljač, "Dynamic analysis of the load lifting mechanisms", *Strojniški vestnik* 54, 10, pp. 655-661, (2008)
- [11] V. Vučković, "Električni pogoni", *Elektrotehnički fakultet Beograd*, (1997)
- [12] B. Vujanović, "Teorija oscilacija", Univerzitet u Novom Sadu, (1995)