
Рада Шћепановић
ЈУОШ „Милија Никчевић” Никшић
Докторанд Учитељског факултета у Београду

Стручни рад
Методичка теорија и пракса број 1/2019.
УДК: 371.3::514]:159.937
стр. 133 - 154

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ У РАЗВОЈУ ПРОСТОРНОГ РЕЗОНОВАЊА

Резиме: Транслација, ротација и симетрија, односно изометријска пресликавања, као и њихове композиције су трансформације које не нарушавају облик и величину. Циљ овог рада је да прикаже како различити примјери изометријских трансформација на раном узрасту подстичу развој просторног резоновања ученика. Темељна полазишта овог рада су: (1) повезаност школске геометрије и просторног резоновања и (2) карактеристике просторног резоновања код дјече и инструкције у подстицању развоја њихових просторних способности. Резултати до којих се дошло, методом теоријске анализе, показују више приступа који подстичу развој способности просторног резоновања код дјече, од разговора са наставником и вршњацима, игре слагања облика, цртања и реконструисања тродимензионалних објеката, па све до употребе софтверских пакета и технологија на додир. У изометријским задацима ученици прво користе визуелизацију, да би процијенили који облици су подударни, упоређују облике, ментално и физички ротирају добијене облике и препознају облике из различитих перспектива. Закључено је да постоји јасан доказ да чак и најмлађи ученици, уколико им се пруже могућности високог квалитета, могу да се ангажују на изазовним активностима изометријских трансформација. Према томе, трансформације могу да се уводе ученицима у основној школи, и то не директно са експлицитним дефинисањем, већ на неформалан начин, избором адекватног контекста, тако да геометријске активности за ученике имају значења. Да би ученици стекли разумијевање и увид у ове суштински тешке аспекте изометријских трансформација, они морају бити укоријењени

у искуствима која ученици свакодневно имају, као и у задацима које наставник поставља. Закључци указују на значај дизајнирања изометријских задатака и медијацији наставника, посебно у погледу коришћења таквог софтвера, као катализатора за развој културе, у учионици, у којој и наставници и ученици проширују своја увјерења о учењу и разумијевању изометрије.

Кључне ријечи: изометрија, просторно резонување, дво- и тро-димензионални објекти.

УВОД

Природа и улога геометрије као дисциплине дају јој јединствен положај у математици. Геометрија је математичка теорија (или више теорија) физичког простора, на микро (атомски свијет), мезо (људски свијет) и макро (космолошки свијет) нивоу. У тим аспектима, геометрија се формира као дио природних наука, као и наука инжињерства и дизајна у ширем смислу (Niss, 1998).

Ученици, разумијевање ученика, њихове интеракције у учионици су централна питања за процес наставе и учења (Hershkowitz, 1998). Као последица тога, процеси резонувања се сматрају различитим активностима које ученици предузимају да комуницирају са другима, да објасне другима, као и себи, шта они виде, оно што откривају, о чему мисле и закључују (Ibid:30). Стога, данас истраживања настоје да створе иновативна окружења за учење, која још увијек имају у виду дедуктивно резонување, као основни елемент који треба научити.

Истраживачи за просторно резонување (Bruce et al., 2015), у сарадњи са едукаторима, уложили су велике напоре у тестирању задатака и одговарајућих активности у учионици. Истичу истраживачки пројекат, Математика за малу дјецу (Math for Young Children, 2015) – Мос и сарадници (према Bruce et al., 2015), који испитује развој геометрије и просторног резонувања у учионицама. Исходи њихових истраживања дају јасан доказ да чак и најмлађи ученици, уколико им се пруже могућности високог квалитета, могу да се ангажују на изазовним активностима геометрије.

Такође, истраживања показују да, мала дјеца не само да су способна да размишљају о сложеним и апстрактним математичким идејама, већ почињу да замишљају кретање и трансформацију 2Д И 3Д објеката (Ibid).

Дувал (Duval, 1998) истиче да постоји много разлога за подучавање геометрије, као што су могуће примјене у технологији или у стварном свијету. Међутим, мали број ученика стварно учи и разумије геометрију. Разлози се проналазе у когнитивној комплексности, која пружа основне занимљивости геометрије. То, прије свега, јер, геометрија, више него друге области математике, пружа могућности за откривање и развијање различитих начина мишљења (Ibid).

Клементс и сарадници (Clements et al., 2018), указују да се укључивањем дјеце у геометријско размишљање и просторно резонување може подржати њихов укупни

математички и когнитивни развој. Па ипак, геометрија није увијек курикулумом предвиђена у раном дјетињству и, чак и ако је укључена, није истражена на начин препоручен истраживањима (Ibid:7).

Са друге стране, настава геометрије у основној школи, у већини земаља, наглашава истраживање, именовање, опис, класификацију, цртање, мјерење конкретног физичког објекта у равни или простору (Niss, 1998). Сходно томе, појављују се захтјеви за геометријским знањима наставника, да повећају обим и дубину нивоа подучавања.

Наставници, у основној школи, треба да буду образовани тако да су свјесни да геометрија није само збирка емпиријских чињеница, већ, треба да знају да се физички објекти у простору могу подвргнути дедуктивном резонувању и организовати као широка теоријска структура на различите начине (Ibid). То значи да, на самом почетном нивоу, односи између тродимензионалних објеката и дводимензионалних слика су од кључног значаја за усвајање основних геометријских знања и разумијевања.

На основу наведеног, постављамо питање, који су аспекти програма обуке одговорни за развој просторног резонувања. Бишоп (Bishop, 1980), успјешну наставу проналази у детаљној анализи која резултира јасним односом између наставе и способности која се учи.

У том погледу, Феи (према Clements and Battista, 1992:446), сматра да, "трансформациони приступ геометрију чини привлачним, динамичним субјектом који ће развити способност просторне визуелизације и способност разумијевања". У складу са овом хипотезом, Дел Гранде (Ibid) је открио да таква геометријска јединица побољшава просторну перцепцију ученика другог разреда.

Дакле, постоји све веће интересовање за боље разумијевање просторног резонувања дјецe, не само у општем смислу развоја, већ и у смислу одређеног начина на који се дешавају просторна размишљања дјецe. Из тог разлога, прво указујемо на темељно полазиште овог рада, повезаност школске геометрије и просторног резонувања. Са друге стране, описујемо основне карактеристике просторног резонувања код дјецe и наводимо инструкције у подстицању развоја њихових просторних способности. Понуђене су специфичне ситуације учења, за диференцијацију и координацију, у процесима визуелизације и резонувања. Ријеч је о динамичким ситуацијама учења у задацима изометријских трансформацијама. Размотрена је улога цртежа, разних манипулативних материјала и дигиталне технологије на додир, у развоју концептуалног схватања дјецe о просторним односима унутар и између дводимензионалних и тродимензионалних објеката.

ГЕОМЕТРИЈА И ПРОСТОРНО РЕЗОНОВАЊЕ

Геометрија, како је Фројдентал описује (према Clements and Battista, 1992), је простор у којем дијете живи, дише и креће се. Говори о простору који дијете открива, истражује, осваја. На овим основама, школска геометрија проучава просторне објекте, односе, формализоване (или математизоване) трансформације и има изграђене

аксиоматске математичке системе који их заступају (Ibid). Са друге стране, просторно резоновање састоји се од скупа когнитивних процеса, на основу којих су менталне репрезентације просторних објеката, везе и трансформације конструисане (Ibid). Очигледно је да су геометрија и просторно резоновање међусобно чврсто повезани.

У настави математике просторно резоновање, није новијег датума и наша намјера је да укажемо на мноштво приступа који се фокусирају на просторно резоновање млађег школског узраста. Почнимо од једне, можда најважније, чињенице за овај рад. Наиме, говоримо о повезаности просторног резоновања и школске геометрије.

У том погледу, Ковачевић (Kovačević, 2019), напомиње да је данас, у вези са математичким образовањем, важност просторног резоновања препозната и изван граница геометрије, а постојећа литература пружа чврсту основу за закључак да просторне способности и математика дијеле когнитивне процесе који почињу у раној фази развоја. Дакле, чини се да просторно резоновање постаје пресудно на самом почетку математичког образовања.

Такође, Ваитли и сарадници (Whiteley et al., 2015), указују да, изненадни увиди у просторно резоновање требали би да представљају велике изазове у структури и посебности савремене школске математике. Заправо, акценат се ставља на озбиљно разматрање истраживања у просторном резоновању, не само због ближег усклађивања између школске математике и области математике као науке. Више од тога, заједнички оријентисане обје области, дијеле неке основне карактеристике, укључујући и начин решавања проблема. То би за последицу имало крупне помаке у математици, стварање дубоких веза између квалитативног и квантитативног.

Прво, укратко да појаснимо појмове „просторно размишљање“ и „просторно резоновање“. На пример, Клементс и Батиста (према Kovačević, 2019) су користили појам „просторно резоновање“ искључиво у вези са специфичним скупом когнитивних процеса којима се ментално представљају просторни објекти, конструишу се односи и трансформације. Међутим, они, термин просторно резоновање, разликују од употребе термина „просторно размишљање“, као научним начином размишљања, који се користи за представљање и манипулацију информација у учењу и решавању проблема (Ibid).

Ваитли и сарадници (Whiteley et al., 2015), разматрају однос визуелно–просторног резоновања и просторног резоновања. Поједини аутори ове изразе користе наизмјенично, други нуде суптилне разлике, а неки их одвојено разматрају. Такође, улога језика у развоју способности просторног резоновања, има екстремна мишљења, с једне стране, они су нераскидиво испреплетани, а с друге стране, просторно резоновање развија се независно од језика (Ibid).

Исто, Крумна и сарадници (Krumnack et al., 2010) сагледавају како просторно резоновање може бити моделирано као вербално резоновање. Њихова главна идеја је да се процес дедукције не заснива на дедукцији механизма за рад на интерним репрезентацијама. Објекти представљени помоћу ријечи и правилним вербално когнитивним механизмом могу водити процес резоновања. Износе доказе да, процес

конструисања „вербално менталног модела“ из простора утиче на дедуктивно просторно резонување.

На разлику између визуелних процеса и процеса резонувања, упућује и Дувал (према Hershkowitz, 1998), и указује да су то различите категорије мисли. Он тврди да је главна функција визуелних процеса субјективна верификација. Дрифјуз (Ibid), визуелно размишљање углавном сматра интуитивним, подржавајућим, општом и прелиминарном фазом у процесима резонувања уопште, што понекад подржава даље размишљање, а понекад га и омета. Међутим, Херсхковиц (Ibid), визуелно размишљање тумачи знатно шире, односно, укључује многе, ако не и већину аспеката приписаним другим врстама резонувања, аналитичке аспекте, чак и доказивање.

Дувал (према Ђокић, 2017), тврди да геометријско резонување укључује три врсте когнитивних процеса који имају специфичне епистемолошке функције. То су:

1. визуализација – визуелна репрезентација геометријског тврђења или хеуристичко истраживање сложене геометријске ситуације;
2. конструкција – процес у коме се користе инструменти;
3. резонување – посебан дискурзивни процес за проширивање знања, за објашњења, за доказивања (Ibid:144).

Дувал указује да су ова три когнитивна процеса тијесно повезана и њихова синергија когнитивно је неопходна за стицање вјештина у геометрији (Ibid).

Интересантно је питање, када дјеца почињу да показују способност резонувања и концептуално разумијевање геометријских фигура. Фрик и Венг (Ibid), наглашавају важност унутрашњо–статичких способности у раном дјетињству, појављују се већ у старости од 3 мјесеца, само привремено нестану око треће и четврте године, и поново се појављују након пете године. Даље, основни концепт слике има тенденцију да се стабилизује до 6 године старости, тако да период од треће до шесте године може бити посебно значајан за учење о геометријским фигурама (Clements et al., 2018).

Клементс и сарадници (Clements et al., 2018), испитали су способност дјеце да идентификују облике (кругове, троуглове, квадрате и правоугаонике) у задацима који варирају у степену сложености, као што је идентификација облика међу дистракторима (облици који нијесу чланови дате класе облика), унутар окружења учионице и унутар реалног окружења. Резултати показују да се, вјештине визуелних способности размишљања, перцептивна флексибилност, визуелно кодирање и декодирање, кроз геометријски оријентисану активност могу довести до бољег разумијевања концепта облика. Они тврде да, усвајање знања о геометријским фигурама се креће, од све софистициранијих поређења (упаривања), нивоа препознавања и именовања, идентификовања компоненти фигура, затим, разумијевање својстава облика, и на крају употреба тих својстава при класификацији и анализи скупова геометријских фигура (Ibid).

Ваитли и сарадници (Whiteley et al., 2015:5), сматрају да просторно резонување није изолована компетенција, нити она која се може анализирати у

дискретне подвјештине. Умјесто тога, то је потенцијал који се стално развија унутар сложене интеракције многих аспеката (Ibid:5).

Разматрајући конструктивистички приступ у просторном резонувању, Вителај и Коб (према Bishop, 1980), тврде да појединци дају смисао и структуру просторним обрасцима на основу њихових искустава, концептуалних структура, намјера и текуће друштвене интеракције. Свако дијете кроз своје акције конструише слику образаца који се касније могу поновно представити и трансформисати.

Дакле, постоји много дидактичких и когнитивних проблема који се односе на улогу просторног резонувања у почетној настави геометрије. Наиме, разматрају се вјештине просторне оријентације, затим вербализације, као и вјештине визуелизације у просторном резонувању. Стога, у наредном дијелу, приказујемо начине на које је могуће подстаћи развој наведених способности просторног резонувања.

ИНСТРУКЦИЈЕ У РАЗВОЈУ СПОСОБНОСТИ ПРОСТОРНОГ РЕЗОНОВАЊА

Развој просторних компетенција дјецe су испреплетане повећавањем њихових капацитета за кретање и интеракцијом у окружењу (Okamoto et al., 2015). Опште је познато да, чим дјецa почну самостално кретање у простору, они демонстрирају пут интеграције, почињу да кодирају правац и удаљеност са компонентама транслације и ротације тијела (Ibid).

Недавно, мета-анализом 217 студија, у трајању више од 20 година истраживања, закључено је да се, кроз различите активности обуке, просторно резонување може побољшати код људи свих узраста. Импликације су посебне у погледу раних интервенција, односно, просторна вјежбања са малом дјецом показују побољшање њихових просторних вјештина (Teruylo et al., 2014).

Слично, Брус и сарадници (Bruce et al., 2015) показују да већина ученика, од 4, 5 и 6 година, изводе активности геометрије знатно изнад очекиваног нивоа, односно на нивоу геометрије старијих ученика. Ученици из вртића су могли да препознају, ротирају и замишљају дводимензионалне фигуре, показују разумијевање подударности и заједно проналазе све тражене конфигурације. Такође, ученици првог разреда су показали способност састављања тродимензионалних објеката и вршњацима објаснили неопходне кораке за поновну изградњу обрнутих објеката.

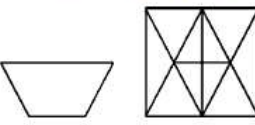
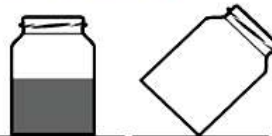


Осим наведеног, познато је, истраживање просторног резонувања са циљем да се испитају могућности просторног размишљања и његов значај у СТЕМ образовању (наука, технологија, инжињеринг, математика). Исто, и ова истраживања показују да просторна обука може помоћи у побољшању просторних способности, када је дат одговарајући материјал (Winarti, 2018).

Гуај и Мек Дениел (према Bishop, 1980) су истраживали однос између високог и ниског нивоа просторне способности и постигнућа математике у основној школи. Они указују да просторне способности ниског нивоа су дефинисане као захтјеви

визуелизације дводимензионалне конфигурације, али не и менталне трансформације тих визуелних слика. Способности просторног резоновања на високом нивоу су окарактерисане као захтјеви визуелизације тродимензионалних конфигурација, и ментална манипулација ових визуелних слика.

Дакле, ментално дјеловање се сматра важним за учење геометрије. Пијаже и Инхелдер (према Clements and Battista, 1992) тврде да, дјечја репрезентација простора није перцептивно “читање” њиховог просторног окружења, већ је резултат претходне активне манипулације тог окружења. Друга фаза наставе у ван Хиелеовој шеми се базира на ученичкој манипулацији објектима (Ibid).

Размотримо које се способности јављају у активностима просторног резоновања. Утал и сарадници (према Okamoto et al., 2015), нуде класификацију шему 2x2 на којој се заснивају двије кључне димензије просторног резоновања: статичке и динамичке вјештине и интризичне (унутрашње) насупротив екстризивним (спољашњим) вјештинама.

	Intrinsic Specification of object	Extrinsic Relation among objects or relation of object to a frame of reference
Static Object/frame of reference remains stationary	<p>Intrinsic-Static Perceive objects while ignoring distractors.</p>  <p>Sample task: Embedded Figures Test Where does the shape on the left appear in the image on the right?</p>	<p>Extrinsic-Static Describe the spatial position in reference to frame.</p>  <p>Sample task: Water-Level Test The glass jar has some water in it. The jar has been tilted. Draw a line to show how the water would look.</p>
Dynamic Object or perspective is transformed	<p>Intrinsic-Dynamic Manipulate or mentally transform an object.</p>  <p>Sample task: Mental Rotation Test Which of the three images on the right is the same as the one on the left if rotated?</p>	<p>Extrinsic-Dynamic Visualize the relation among moving objects or from a different vantage point.</p>  <p>Sample task: Three Mountains Task What does the teddy bear see?</p>

Слика бр.1: Типологија типа 2x2 категорија просторног резоновања (Ibid:16).

Статичке просторне вјештине се користе када главни предмет анализе или референтни оквир остаје статичан током цијелог задатка, док се динамичке вјештине активирају када се објекти помјерају или покрећу. Статичко и динамичко просторно резоновање се може посматрати кроз унутрашње и спољашње вјештине. “Унутрашње вјештине” користимо да дефинишемо или опишемо објекат, док “спољашње вјештине”

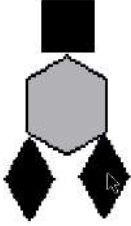
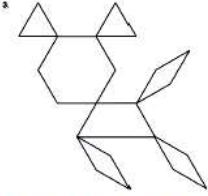
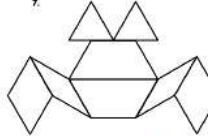
кодирају локације објеката, њихових релационих односа: једног објекта према другом или у оквиру референци (Ibid).

Када говоримо о приликама за учење, ученикова свакодневна геометријска искуства пружају главни извор и позадину за формирање геометријских појмова, концепата, у формалном математичком окружењу. Исто важи и за геометријске пропозиције, методе и технике које се често могу успоставити у дијалектичкој интеракцији са одговарајућим пропозицијама, методама и техникама које се налазе у свакодневној геометрији гледања, цртања, склапања, сијечења, лијепљења, конструисања, мјерења, кретања, итд., са физичким објектима, облицима и појавама (Niss, 1998:307).

Сарама и Клементс (према Bruce and Sinclair, 2014), све више доводе у питање претпоставку да су “конкретни” алати више прикладни за малу дјецу и тврде да су физичке манипулације ограничене у промовисању математичких акција и размишљања о тим акцијама. Ови аутори посебно указују на потенцијал виртуелних манипулација као подршку развоја интегрисаног конкретног знања, које међусобно повезују познавање физичких објеката, акција на тим објектима и симболичких репрезентација тих објеката и акција.

Примјене нових технологија, динамички геометријски софтверски пакети, како наводе Ђорић и Јаничић (Ђорић and Јаничић, 2004), пружају моћна средства за учење геометрије. Они тврде да, у активном окружењу учионице, а нарочито у раду подржаном од стране одговарајућих софтверских алата, ученике треба подстаћи да дају претпоставке које се доказују низом истраживања. Коришћењем софтверских пакета (WINGCLC) ученици имају прилику да истражују и објашњавају, како би промијенили скуп почетних слика или поступака конструкције и гледали како резултира ефекат њиховог рада (Ibid). Овај приступ обезбјеђује искуства која се одвијају од простог ка сложеном и од једноставног ка апстрактном. Такође, такви алати стимулишу различите когнитивне процесе, активно укључујући ученике и дају им дубље разумијевање предмета.

Истраживања показују (Clements et al., 2018) да, дјеца развијају способност састављања геометријских облика, односно, способност да користе појединачне облике како би се добила слика, тако да сваки облик има јединствену семантичку улогу. У почетку, кроз покушај и грешку, повезивањем облика, формира се слика, с тим што у овим креацијама није обавезна концептуализација геометријских облика.

Developmental Progression	Instructional Tasks
<p data-bbox="475 264 619 286">Piece Assembler</p> <p data-bbox="411 286 655 434">Makes pictures in which each shape represents a unique role (e.g., one shape for each body part) and shapes touch. Fills simple “Pattern Block Puzzles” using trial and error.</p> <p data-bbox="475 456 592 479">Make a picture</p> 	<p data-bbox="691 264 1075 338">In the first “Pattern Block Puzzles” task, each shape is not only outlined, but it touches other shapes only at vertices.</p> <p data-bbox="826 344 932 367">Pattern Block Puzzles</p>  <p data-bbox="691 568 1075 642">Then, the puzzles moved to those that combine shapes by matching their sides, but still mainly serve separate roles.</p> <p data-bbox="826 658 932 680">Pattern Block Puzzles</p>  <p data-bbox="691 822 1054 844">See also software at LearningTrajectories.org.</p>

Слика бр. 2: Креирање слике на основу задатих фигура (Ibid:19).

Током ове игре, важан је математички разговор наставника који треба да буде уско повезан и усклађен са оним што дјеца тренутно раде и размишљају. Подстицајни разговори, који не прекидају дјечју игру и размишљање су најмоћнији (Ibid).

Такође, Дувал (Duval, 1998), истиче важност да се разговара (наглас или ментално) о ономе што се гледа. Визуелна дистинкција покреће ријечи, а ријечи могу да скрену пажњу на неке незапажене аспекте фигуре. Говори о односима између унутрашњег говора и резоновања. Разматрање слике може бити довољно за разумијевање геометријске ситуације, али увјерени можемо бити, тек када се све те промјене могу извршити и повезати (Ibid:45).

Изложеност већем броју различитих стимулуса позитивно утиче на достигнуће у геометрији (Clements et al., 2018). Герхард и Приг (према Clements et al., 2018) наводе тактилно–кинестетичка искуства, као што су кретање тијела и манипулисање геометријско чврстим материјама помажу дјечи, посебно малој дјечи, да науче геометријске концепте. Такође, Стивенсон (Ibid), истиче да се дјеца боље осјећају у раду са чврстим објектима него са штампаним облицима, јер користе више чула.

Међутим, једноставно коришћење манипулација не гарантује смислено учење. Рафаел и Валстром (Ibid :449), сматрају да ученици морају бити вођени да размисле о својој употреби манипулација и да повежу манипулативне моделе са њиховим неформалним концептима.

Гуај и Мек Дениел (према Ђокић, 2017:56) сматрају да учитељ одређеним активностима развија просторне имагинације ученика, иначе би асимилација била 'формалистички' здружена са вербалним информацијама о својствима фигура.

У визуелно просторним способностима размишљања, Вандаплас и Хајк (Vanderplas and Heike, 2015), истичу да је важна добро дизајнирана графика, јер смањује оптерећеност меморије и омогућава више когнитивних ресурса доступним за друге активности. У својим истраживањима проналазе позитивну корелацију између просторних способности и способности читања података са графика.

На крају, запажено је, у студијама просторне интервенције, да и наставници и ученици изјављују висок ниво задовољства и ангажовања. Наставници су се сложили да просторне активности нуде више могућности за њихове различите ученике и даље, да способност просторног резоновања служи као важна основа за математичко учење (Теруло, 2014).

Дакле, имамо више приступа који подстичу развој способности просторног резоновања код дјецe, од разговора са наставником и вршњацима, игре слагања облика, цртања и реконструисања тродимензионалних објеката, па све до употребе софтверских пакета и технологија на додир. У том погледу, Јакиманска (према Ђокић, 2017) сматра да, ослањање на конкретну визуелну помоћ није резултат развоја, већ производ техника подучавања које се користе у поступку подучавања и које се ослањају на конкретне материјале. Одређена техника подучавања подстаћи ће ученике при стварању менталне слике и омогућиће ученицима да њима манипулишу (Ibid:68).

Због свега наведеног, потребно је приказати како наведене инструкције просторног резоновања помажу ученицима у разумијевању изометрије.

ИЗОМЕТРИЈА У ПРОСТОРНОМ РЕЗОНОВАЊУ

Свака изометрија $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ је једно од следећих пресликавања:

- (I) транслација,
- (II) ротација,
- (III) симетрија,
- (IV) композиција транслације и ротације,
- (V) композиција транслације и симетрије (Marjanović, 2004).

Транслација, ротација и симетрија, односно изометријска пресликавања, као и њихове композиције, значајне су геометријске теме, наводи Де Мор (према Ђокић, 2017:105). Ове трансформације могу да се уводе ученицима у основној школи, и то не директно са експлицитним дефинисањем, већ на неформалан начин, избором адекватног контекста, тако да геометријске активности за ученике имају значења (Ibid).

Истраживачи просторног резоновања (Bruce et al., 2015), у сарадњи са едукаторима, у фокусу интересовања укључују теме: симетрија, ментална ротација и подударност са физичким трансформацијама. Сви примјери, прво представљају, разматрања апстрактних идеја у игривим контекстима за малу дјецу. Затим, пажња је

усмјерена на посредничку улогу савремених технологија и математичких алата у: (а) активностима просторног резоновања, као што су трансформација и симетрија, (б) дубље разумијевање просторних идеја и (в) прецизнији дискурс између дјецe и наставника. Такође, поље интересовања односи се и на питање како са просторним резоновањем проширити размишљање дјецe и наставни план и програм (Ibid).

Таки и сарадници (Thaqi et al., 2015), истражују природу и узроке отежаног учења геометријских трансформација и однос ових тешкоћа са концептуално изграђеним сликама геометријских трансформација. Они наводе два разлога за изучавање геометријских трансформација и то: (1) трансформације омогућавају примјену геометријских функција, што је од суштинског значаја за све математике; (2) трансформације пружају геометријски динамичан задатак.

У раду са трансформацијама, Јаник и Флорес (према Thaqi et al., 2015), почињу са трансформацијама као недефинисаним покретима једног предмета који је еквивалентан са статичким примјером, затим, користе трансформације као дефинисане покрете једног објекта и, на крају, разумијевање трансформација као дефинисано кретање свих тачака равни.

Цртежи дјецe су, како Инхелдер и Пијаже описују (према Thom and McGarvey, 2014), прикази њиховог унутрашњег менталног функционисања. Као такви, утврђивање нивоа разумијевања дјетета постиже се поређењем цртежа у односу на хијерархијски скуп развојних и когнитивних критеријума (Ibid). Према томе, за било какве увиде о просторном резоновању дјецe потребно је испитати дјелове цртежа, у овом раду, о изометријским трансформацијама, и концептуализацију која се у њима појављује.

Међутим, већину онога што знамо о просторном резоновању долази из психологије, гдје задаци служе у дијагностичке сврхе. За разликују од психолошких задатака, образовни задаци наставницима служе не само за дијагностификовање, већ и за учење и усавршавање способности ученика (Francis, 2014).

Према томе, када говоримо о просторним задацима, истраживања Бишопа, Хариса, те Мек Гија (према Ђокић, 2017), указују на двије основне компоненте или чињенице просторних задатака. То су:

1. *просторна оријентација* – разумевање и оперисање односима између позиције објекта у простору према нечијем положају; на пример, проналажење нечијег пута у згради и

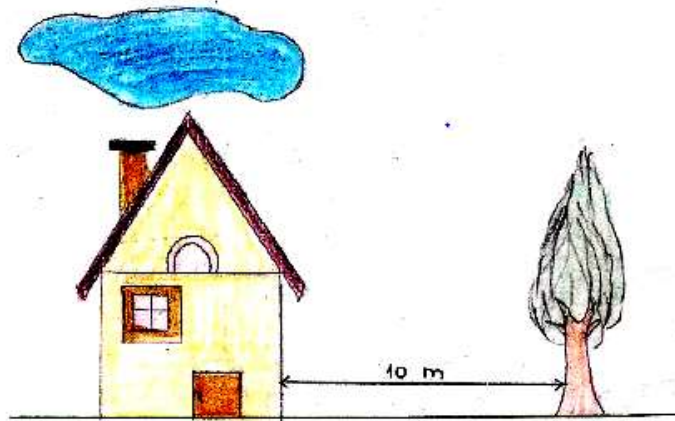
2. *просторна визуелизација* – разумевање и представљање замишљених покрета из дво- и тро-димензионалног простора (Ibid:58).

У наставку, понудили смо асортиман активности и идеја за примјере изометрије 2Д и 3Д конфигурација, које пружају вишеструке полазне тачке за ангажовање, подршку и развој вјештине просторног резоновања.

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ 2 Д ОБЛИКА

Дјеца располажу одређеним знањима из изометрије, прије него што их формално науче на часовима геометрије. Према томе, неопходно је размотрити примјере изометрије доступне из нашег свакодневног искуства.

Транслација, сама по себи није много занимљива, али је појава са којом се срећемо сваког дана. На примјер: Кућа се налази на растојању 10m од дрвета. У 12h облак се налазио изнад куће. Ако се за два сата облак помјери 5m у правцу дрвета, гдје ће се налазити у 16h (Вољјевић и Враџар, 2011)?

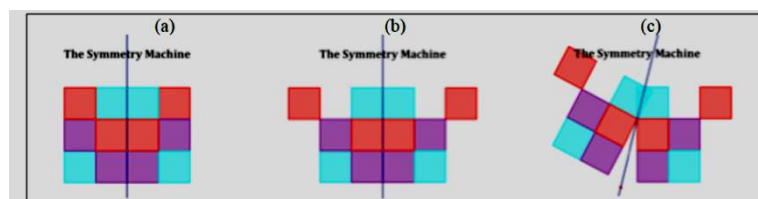


Слика бр.3: Примјер за транслацију облака (Ibid:1).

При кретању облака свака његова тачка ће се паралелно за земљом помјерити за тачно 10m.

Исто, симетрија је област просторних односа у којима дјеца имају доста знања прије него што крену у школу (Bruce et al., 2015). У вези с тим, Сио и Гинсбург (према Bruce et al., 2015) указују на доказе да дјеца спонтано граде симетричне фигуре током неформалне игре у предшколском добу (Ibid). Сходно томе, Брајант (Ibid), сугерише да је, један од најважнијих изазова, у математичком образовању, како најбоље искористити ово имплицитно знање у учењу о простору.

Да би се дубље приступило настави и учењу симетрије, који би обухватило просторно резоновање, потребно је, прво испитати, дјететово разумијевање ријечи "симетрија" (Bruce et al., 2015). Затим, наставник уводи "дискретну симетријску машину". Она приказује осамнаест обојених квадрата симетрично уређених око вертикалне осе симетрије. Квадрати се крећу дискретно на позадини квадратне мреже. Повлачење било ког квадрата са једне стране осе симетрије такође ће премјестити одговарајући квадрат на другој страни осе симетрије (слика бр. 4).



Слика бр. 4: (а) Дискретна машина за симетрију; (б) Након повлачења једног квадрата од осе симетрије; (в) Након ротирања осе симетрије (Ibid:87).

„Истраживачке лекције”, показују геометријско резонување далеко изнад очекивања наставног плана и програма. Лекција, Петодјелни изазови, спроведена са дјецом од 3 до 5 година старости, усредсређена је на откривање дванаест јединствених облика, састављених од 5 квадрата (Bruce et al., 2015). Дјеца су природно користила визуелизацију, ментално и физички ротирали облике, како би процијенила да ли су облици уједначени, као и да препознају и представљају облике из различитих перспектива. Таква врста резонувања се не очекује од тако мале дјеце. Изненађујуће је да ови мали ученици од 5 година не само да су открили и разликовали сваки од дванаест облика, већ су, уз помоћ једног од својих другара, иницирали динамичку везу између дводимензионалних и тродимензионалних фигура, прво кроз ментално и онда физичко преклапање мреже како би направили "кутије без врхова", слика бр. 5 (Ibid).



Слика бр. 5: Проналажење петодјелне конфигурације – кутије без поклопца (Ibid:95).

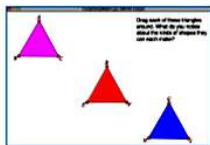
Активност „погоди моје правило“, увођењем „машине“ Трансформатор облика (слика бр.6), показала се као посебно ефективан алат за упознавање дјецe са проблемима који укључују геометријске трансформације. Дјеца прво откривају правило машине, посвећују већу пажњу просторним односима између улазних и излазних облика. У објашњавању правила машине, дјеца су имала прилику да користе просторни језик у описивању геометријских трансформација (Ibid).

INPUT	OUTPUT
f	ƒ
[]
L	J
◀	?
W	?

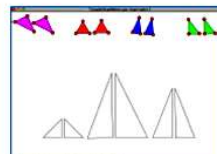
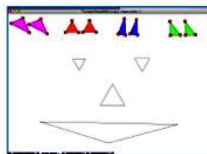
Слика бр. 6: Примјер улазних и излазних картица: Правило за овај примјер је пресликавање или ротација за 180° око вертикалне осе (Ibid:101).

Каур (Kaur, 2014) показује да динамичко окружење геометрије помаже дјеци од 7 и 8 година у идентификовању, класификовању и дефинисању различитих класа троуглова. Током интеракције са троугловима, дјечији дискурс је почео са уочавањем неформалних својстава заснованих на основу транслације и на крају довео до формалних својстава (нпр. углови су исти код једнакостраничног троугла). Овакво размишљање настало је као резултат покушаја дјеце да се преклапају или уклапају различити троуглови један на други у Sketchpad-у.

(a) Drag each of these triangles around. What do you notice about the kind of shapes they can each make?



(b) & (c): Which coloured triangles can fit into given triangle outlines?



(d) Whether a scalene triangle can fit into the given equilateral triangle outline (top) and vice versa (bottom)?

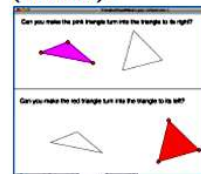


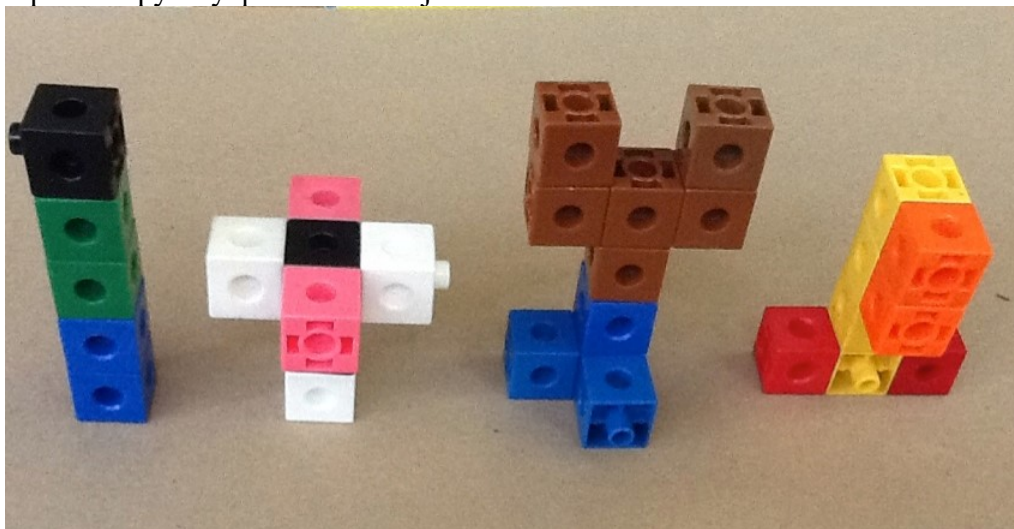
Figure 1 (a, b, c, d): Different triangle sketches

Слика бр. 7: Скице различитих троуглова (Kaur, 2014:11)

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ 3 Д ОБЈЕКТА

Резултати показују да су дјеца већ од 4 и по године способна за 3 Д менталну ротацију (Hawes and Bruce, 2014).

Брус и сарадници (Bruce et al., 2015), примјером „Обрнути свијет“, ученицима првог разреда пружају прилику за развој способности менталне ротације, односно да коцкицама реконструишу фиктивни свијет.

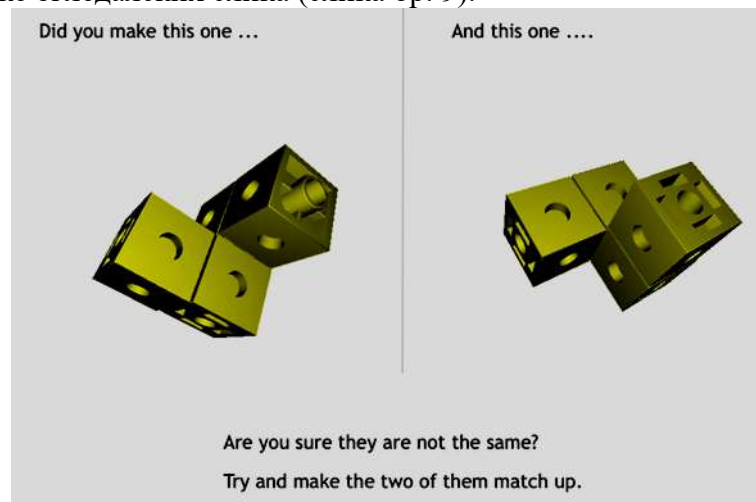


Слика бр.8 : Примјери за реконструкцију „обрнутог града“ (Bruce et al., 2015:99).

За визуелизацију просторног окружења из друге перспективе, класичан задатак у овој области је Пијажев задатак – Три планине (слика бр.1), заједно са мноштвом

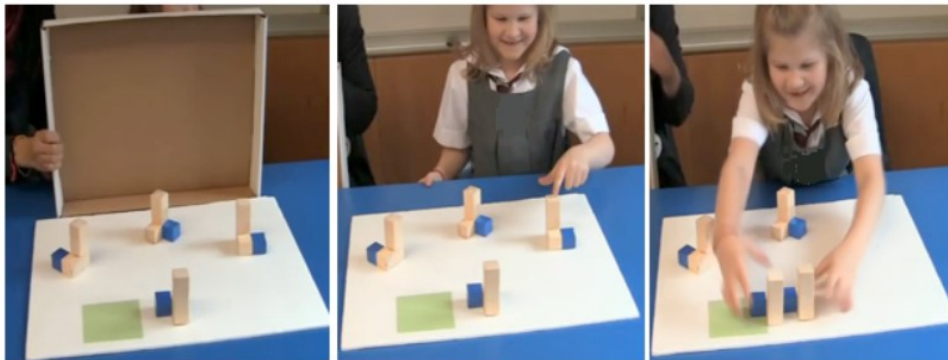
његових варијација. У овом задатку дијете сједи испред 3Д модела три планине, свака планина је са различитим атрибутима. Лутка сједи на супротној страни. Од дјетета се тражи да опише поглед из положаја лутке (Okamoto et al., 2015).

Од великог значаја су визуелно–просторне погодности iPad–а, јер дјечи омогућавају да покрећу слику у смјеру у којем желе (Bruce, 2014). На примјер, дјеца ротирају спојене коцкице на екрану и визуелно их пореде. Снага визуелних слика, комбинована са својим динамичким својствима подстиче дјецу да размотрите сличности и разлике огледалских слика (слика бр. 9).



Слика бр. 9: Упорјеђивање конфигурације од 4 коцкице (Ibid:20).

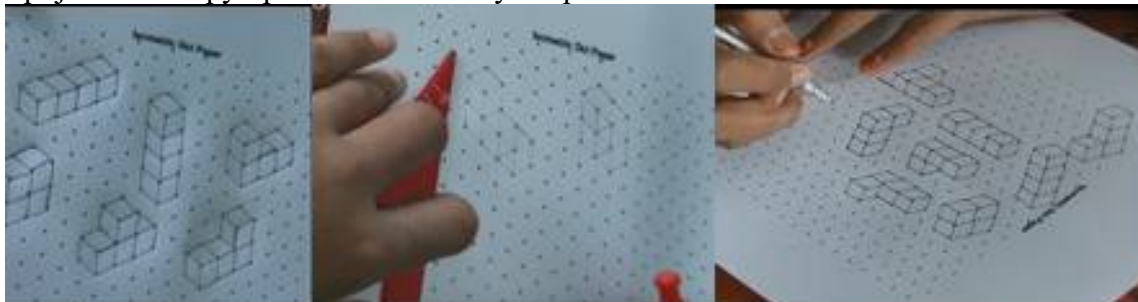
Ховс и Брус (Hawes and Bruce, 2014), испитују почетак и развој 3Д менталних ротација код мале дјеце, узраста од 4 до 8 година. Понуђене су три фигуре, од којих је једна иста траженој фигури, али позиционирана у другој оријентацији. Од дјеце се тражи да наведу фигуру која се може ротирати тако да одговара траженој (слика бр.10).



Слика бр. 10: Примјер задатка 3Д менталне ротације (Ibid: 25).

Винарти (Winarti, 2018), у својој студији анализира учење 3Д облика равне површине (призме) код ученика 8 разреда. Планиране активности, у оквиру учионица математике, укључују неколико просторних активности, просторну визуелизацију и просторну оријентацију.

Један од задатака, од ученика тражи да нацртају све могуће различите призме од 4 коцке. Ученици нијесу имали коцке у својим рукама, већ су током цртања на изометријском папиру приказали све могуће аранжмане.



Слика бр. 11: Конфигурације призме од 4 коцке на изометријском папиру (Ibid:5).

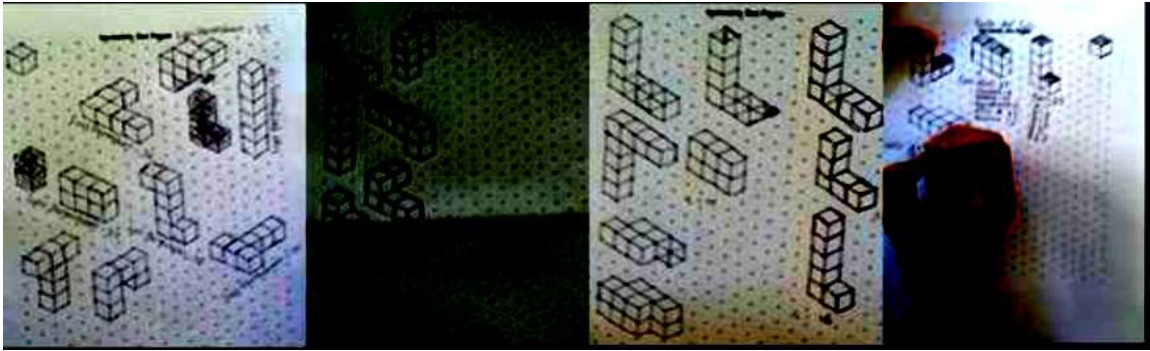
Током цртања ученици наилазе на потешкоће, изјављују да је лако замислити распоред од 4 коцке, али им је тешко цртање на папиру (Ibid).

Затим, ученицима се даје почетни модел призме, слика бр.12:



Слика бр.12: Модел призме (Ibid:6).

Задатак је да, овај модел призме ученици реконструишу цртајући на изометријском папиру све могуће комбинације од шест коцкица.



Слика бр. 13: Конфигурације призме од 6 коцкица на изометријском папиру (Ibid:6).

У овим активностима ученици су размишљали на два начина. Прво, повезују коцкице тако да је добијена површина различита, а запремина иста. Други, када су ученици покушали да додају или смање број коцкица, тако да би призма имала различиту запремину али исту површину. Ученици су углавном користили просторну визуализацију у овој активности (Ibid).

У наведеним примјерима ученици су се бавили низом динамичких просторних и геометријских вјештина, укључујући визуелизацију и менталне ротације кроз састављање и растављање 3 Д модела.

Дакле, на основу наведеног, стичемо увид у то како дјеца могу развијати своје просторно резоновање путем активности у учионици, које су експлицитно усмјерене на изометријске трансформације и изазивају висок нивоа ангажовања.

ЗАКЉУЧАК

Резултати студија о којима се овдје говори показују да су дјеца способна да уче геометрију и изометријске трансформације приказују до изненађујућег степена дубине.

Осим тога, међу истраживачима постоји сагласност да просторно резоновање има основну улогу у раном учењу математике.

Приказали смо специфичне задатке изометријских трансформација, пажљиво одабране материјале, који његују просторно размишљање на игривом, математички активном начину. Задаци се крећу далеко изван типичних математичких активности на раном узрасту и динамички подстичу различите врсте просторног резоновања.

Да би ученици стекли разумијевање и увид у ове суштински тешке аспекте изометрије, закључујемо да, они морају бити укоријењени у искуствима која ученици свакодневно имају, као и у задацима које наставник поставља.

Такође, анализе истраживања указују да су предшколци склони да визуелно, а не на основу својстава идентификују геометријске облике (Okamoto et al., 2015). Ови резултати сугеришу да се настава употпуни перспективним активностима и тиме дјеци

омогући да замисле и опишу моделе или окружења из разних перспектива, или из промијењених позиција.

У ту сврху, употреба манипулација омогућава ученицима да испробају своје идеје о трансформацијама, испитају их и размисле о њима. Сматрамо да овај физички приступ одржава заинтересованост дјецe, помаже им у креирању правила и претпоставки за увиђање нових односа.

Исто тако, динамичко окружење, за малу дјецу, ствара прилику за визуелизацију кретања у простору, дискусију о ефектима кретања објеката у простору и разумијевање овог кретања (Bruce et al., 2015). Клементс и Батиста (Clements and Battista, 1992) сматрају да се квалитативно различита и побољшана окружења у настави геометрије неће појавити без присуства (а) теоретски–свјесног учитеља и (б) ученика оспособљеног низом алата за геометријско истраживање, укључујући и манипулације и – можда најмоћнијег – рачунара са одговарајућим софтверима.

Дакле, у нашем случају, потребно је да научимо више о новом дизајнирању изометријских задатака и медијацији наставника, посебно у погледу коришћења таквог софтвера, као катализатора за развој културе, у учионици, у којој и наставници и ученици проширују своја увјерења о учењу и разумијевању изометрије.

У том погледу, Брус и сарадници (Bruce et al., 2015), предлажу реформу у којој би наставници и истраживачи заједно генерисали више квалитетних примјера за ангажовање дјецe у динамичком просторном резонувању. То захтијева да, у креирању наставних планова и програма, имамо динамичан и маштовит приступ у проучавању и учењу ране геометрије.

Литература

1. Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics achievement – A Review. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 11, No3, 257–269.
2. Boljević, K. i Vračar, T. (2011). Transformacije. Retrieved March , 2019. from www.matf.bg.ac.rs/p/files/43-VEZBE_Transformacije.pdf.
3. Bruce, C. and Sinclair, N. (2014). The role of tools and technologies in increasing the types and nature of spatial reasoning tasks in the classroom. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
4. Bruce, C. D. (2014). Use of the iPad as a mediator for the development of spatial reasoning. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
5. Bruce, C. D., Sinclair, N., Moss, J., Hawes, Z. and Caswell, B. (2015). Spatializing the curriculum. In: Davis, B. and Spatial Reasoning Study Group (Ed.), *Spatial Reasoning in the Early Years: Principles, Assertions and Speculations* (85–106). New York, NY: Routledge.
6. Clements, D.H. and Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In: Grouws, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*

- (420–464). New York: Macmillan Publishing Company.
7. Clements, D.H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D. and Trawick-Smith, J. (2018). Learning and teaching geometry in early childhood. *Teaching and Learning Geometry: early foundations*, Vol. XXVII, No2, 7–31.
 8. Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In: Mammana, C. and Villani, V. (Ed.), *Perspectives on the Teachingn of Geometry for the 21st Century* (37–52). Kluwer Academic Publishers.
 9. Đokić, J.O. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet.
 10. Đorić, M. and Janičić, P. (2004). Constructions, Instructions, Interactions. *Teaching Mathematics and its Applications*. 23 (2), 69–88.
 11. Francis, K. (2014). Robotics and Spatial Reasoning. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
 12. Hawes, Z. and Bruce, C.D. (2014). Using Tangible Cube-Figures to Measure 3D Mental Rotation in Young Children. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
 13. Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In: Mammana, C. and Villani, V. (Ed.), *Perspectives on the Teachingn of Geometry for the 21st Century* (29–37). Kluwer Academic Publishers.
 14. Kaur, H. (2014). Young children’s thinking about different types of dynamic triangles. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
 15. Kovačević, N. (2019). Spatial reasoning in mathematics. Retrieved March 25, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/331430837>.
 16. Krumnack, A., Bucher, L., Nejasmic, J. and Knauff, M. (2010). Spatial reasoning as verbal reasoning. Retrieved March 19, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/262376516>.
 17. Marjanović, M. M. (2004). Metrička, Euklidska, Projektivna i Topološka svojstva. *Nastava matematike*. XLIX (3–4), 1–29.
 18. Niss, M. (1998). Teacher Qualifications and the Education of Teachers. In: Mammana, C. and Villani, V. (Ed.), *Perspectives on the Teachingn of Geometry for the 21st Century* (297–319). Kluwer Academic Publishers.
 19. Okamoto, Y., Kotsopoulos, D., Mcgarvey, L. and Hallowell, D. (2015). The development of spatial reasoning. In: Davis, B. and Spatial Reasoning Study Group (Ed.), *Spatial Reasoning in the Early Years: Principles, Assertions and Speculations* (15–29). New York, NY: Routledge.
 20. Tepylo, D, Moss, J. and Hawes, Z. (2014). The malleability of spatial reasoning and its relationship to growth in competence. Retrieved March 25, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
 21. Thaqi, X., Gimenez, J. and Aljimi, E. (2015). The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. In: Krainer, K. and Vondrová, N. (Ed.), *Proceedings of the Ninth Congress of the*

- European Society for Research in Mathematics Education (591–597). CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015., Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education.
22. Thom, J. S. and McGarvey, L. M. (2014). Children's drawings: A bodying-forth of spatial reasonings. Retrieved March 4, 2019. from <https://www.researchgate.net/publication/265366860>.
23. Vanderplas, S. and Heike, H. (2015). Spatial Reasoning and Data Displays. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 22 (1), 459–468. DOI: 10.1109/TVCG.2015.2469125
24. Winarti, D.W. (2018). *Developing spatial reasoning activities within geometry learning*. Retrieved March 25, 2019. from <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012004>.
25. Whiteley, W., Sinclair, N. and Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In: Davis, B. and The Spatial Reasoning Study Group (Ed.), *Spatial Reasoning in the Early Years: Principles, Assertions and Speculations* (3–15). New York, NY: Routledge.

Rada Šćepanović Elementary School "Milija Nikčević", Nikšić
Ph.D student at the Faculty of Education in Belgrade

ISOMETRIC TRANSFORMATIONS IN THE DEVELOPMENT OF SPATIAL REASONING

Summary: Translating, rotation and symmetry, i.e. isometric mapping, and their compositions are transformations that do not distort the shape and size.

The aim of this paper is to demonstrate that various examples of isometric transformations encourage the early development of students' spatial reasoning. The basic starting points of this work are: (1) the connection between school geometry and spatial reasoning, and (2) the characteristics of spatial reasoning in children and instructions in encouraging the development of their spatial abilities. The results that have been obtained by the method of theoretical analysis show more approaches that encourage the development of spatial reasoning skills in children, from conversations with teachers and peers, game matching, drawing, and reconstruction of three-dimensional objects to the use of software packages and touch technologies. In isometric tasks, students first use visualization, to evaluate which forms are matched, compare forms, mentally and physically rotate the shapes received and recognize shapes from different perspectives. It has been concluded that there is clear evidence that even the youngest students, if offered high quality opportunities, can be engaged in challenging activities of isometric transformations. Therefore, transformations can be introduced to primary school students, not directly with explicit definition, but in an informal way, choosing an appropriate context so that geometric activities for students have meanings. In order for students to gain understanding and insight into these fundamentally difficult aspects of isometric transformations, they must be rooted in the experiences that students have on a daily basis, as well as in the tasks set by the teacher. Conclusions point out to the importance of designing isometric tasks and teacher mediation, especially with regard to the use of such software, as a catalyst for the development of culture, in a classroom, where teachers and students expand their beliefs about learning and understanding isometrics.

Key words: isometrics, spatial reasoning, two- and three-dimensional objects.

Рад је примљен 03. 07. 2018. године, а рецензиран 01. 04. 2019. године.