
Светлана М. Илић
Учитељски факултет, Универзитет у Београду

Стручни рад
Методичка пракса број 1/2020
УДК: 371.3.:512.1
стр. 105 - 120

РАЧУНСКА ПРОЦЕНА – ТЕОРИЈСКО-МЕТОДИЧКЕ ОСНОВЕ

Резиме: Практичан значај рачунске процене приметан је у свакодневном животу, а важно је и место и улога процене у оквиру математичких способности. У раду су представљене теоријско-методичке основе везане за појам рачунске процене, развој способности процењивања, а дат је и систематични преглед стратегија рачунске процене. Рачунска процена, због своје природе, није много испитивана и приметан је мали број радова који су проверавали ефикасност модела наставе који укључују процену. Ипак, досадашњи резултати говоре у прилог томе да је могуће развијати способност процењивања и код деце и одраслих, а да то доприности развоју математичких способности (посебно флексибилности), бољем постигнућу у математици и ставовима о математици. Даље, разматрано је место процене у наставним програмима, као и импликације за наставну праксу. Рачунска процена требало би да буде интегрисана у што више садржаја наставе математике, а нова истраживања говоре у прилог томе да способности процене треба развијати од предшколског узраста.

Кључне речи: рачунска процена, стратегије рачунске процене, ментална аритметика.

УВОД

У овом раду представићемо теоријско-методичке основе рачунске процене у настави математике, која тек у скорије време добија место у наставним програмима у којима се посматра као саставни део математичке способности ученика.

Практичан значај процене очигледан је у свакодневном животу (најчешће се спомиње пример куповине) (нпр. Lemonidis, 2016; Siegler and Booth, 2005; Sowder, 1992). Способност процењивања огледа се у питањима која не захтевају тачност и прецизност, већ дозвољавају довољно приближне вредности. Истиче се да се рачунска процена у реалном животу користи и чешће од тачног рачуна (Sekeris et al., 2019a).

Други важан аспект, који се разматра у литератури јесте и место и улога процене у оквиру математичких способности, као и повезаност рачунске процене и других области нумеричке способности (number sense, месна вредност, карактеристике операција) (Anestakis and Lemonidis, 2014; Sekeris et al., 2019a, Verschaffel et al., 2007).

Треће, како је решавање проблема један од доминатних приступа у модерној настави математике, улога процене постаје важна јер захтева флексибилно адаптивно мишљење (Kilpatrick et al., 2001).

Иако је улога и важност процене очигледно значајна, приметно је да и деца и одрасли наилазе на различите потешкоће код процењивања (Dowker, 2003), што захтева додатна истраживања и испитивања могућности развоја рачунске процене кроз процес наставе. Један проблем, важан за наставу, јесте и став да је процена само погађање, а да се једино тачан рачун и прецизан одговор сматрају вредним, што онемогућава да процена добије своје право место у наставним програмима.

1. Рачунска процена - појам

Сиглер и Бут дефинишу процену као „процес превођења из једне квантитативне репрезентације у другу, од којих је бар једна непрецизна” (Siegler and Booth, 2005: 198), а ову дефиницију прихватају и други аутори (Lemonidis, 2016). Под квантитативним репрезентацијама сматрају и нумеричке (бар једна од две алтернативне репрезентације укључује бројеве) и ненумеричке репрезентације. Пример у ком су укључене две нумеричке репрезентације је рачунска процена (нпр. $56 + 38 \rightarrow 100$), а примери за једну нумеричку репрезентацију су: процена бројности (нпр. визуелна репрезентација количине кликера у тегли \rightarrow приближна бројност кликера) и процена на бројевној прави (број \rightarrow позиција броја на бројевној правој (или обрнуто)).

Џудит Соудер (Sowder, 1992) у свом прегледном раду међу првима прави дистинкцију и дефинише три врсте процене: рачунску процену, процену у мерењу и процену бројности. Поред ове три врсте, постоје подврсте, попут процене у оквиру функција, тригонометрије, статистике и вероватноће. Процена на бројевној правој издваја се као посебна и има своје место у истраживањима, посебно у последње време (Sarama and Clements, 2009; Siegler and Booth, 2005).

Рачунска процена дефинише се као процес проналажења приближног одговара на аритметички проблем без рачунања тачног одговора (Dowker, 1997). Ипак, многи аутори проширују дефиницију нагласком да процењивање може да се врши пре (па и после) стварног рачунања тачног одговора, а не само у случајевима у којима не рачунамо тачан одговор (Lemaire and Lecacheur, 2002). Друга дефиниција види рачунску процену као процес менталног стварања приближног рачуна за дати аритметички проблем (Rubenstein, 1985; Star and Rittle-Johnson, 2009), где је акценат на менталном. Марја Ван ден Хувел-Панхузен (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001) дели рачунску процену на две врсте: 1) рачунање са реформулисаним бројевима и 2) рачунање са процењеним вредностима, односно, подацима које не знамо у потпуности. Осетљивост на то колико приближна вредност треба и сме да буде удаљена од тачне вредности како би се сматрала прихватљивим одговором зависи од самог контекста у коме се питање поставља.

Рачунска процена у највећој је вези са менталном аритметиком, која је њен саставни део (Dowker, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Verschaffel et al., 2007). Наиме, било да се ради са приближним вредностима или процењеним, процес укључује ментални рачун који је лакши за извођење него рачун са оригиналним бројевима (нпр. $300 + 500$, него $289 + 516$). Ментални рачун и рачунска процена укључују сличне процесе као што су: увиђање и коришћење односа и веза међу бројевима, коришћење нестандарних стратегија рачунања, посматрање целог броја, а не цифара (за разлику од писменог алгорита) (Dowker, 2003). Више аутора процену сматра интегралним делом значења броја (number sense), и да развој рачунске процене може утицати на развој значења броја (Mcintosh et al., 1997; Sekeris et al. 2018; Sowder, 1992; Verschaffel et al., 2007). Ови аутори, под аритметиком целих бројева сматрају и рачунску процену. Доукер (Dowker, 2003) наводи да су следеће компоненте јако важне за процену: разумети улогу приближног броја, разумети да процена укључује више процеса, да има више одговора и да контекст утиче на адекватност процене.

Истраживања (Ganor-Stern, 2018; Sekeris et al., 2018) показују да тачан рачун и рачунска процена почивају у барем неком делу на различитим вештинама. У свом истраживању (Sekeris et al., 2018, 2019b) аутори су испитивали децу од четири године, како би открили које су опште когнитивне функције и ране бројевне способности предиктори тачног рачунања и рачунске процене. Резултати показују да је за процену, од когнитивних функција, интелигенција значајан предиктор, а од нумеричких вербално бројање и познавање низа бројева. Поред овога, вербална радна меморија показала се као предиктор успешности код рачунске процене. Аутори дискутују да је вербална радна меморија очигледно нешто на шта се деца ослањају у процени, много више него на визуелни аспект (посебно јер је у тестирању коришћен конкретни материјал). Овај аспект је посебно важан и за старије јер је важно памтити и више међурезултата. Испитивана је и способност поређења бројева (способност да се каже који је од бројева 0–20 већи једна је од само три способности које су предиктори касније математичке успешности и рачунања) код деце, старијих ученика и одраслих

(Chard, 2005, према Sarama and Clements, 2009; Ganor-Stern, 2018; Rubenstein, 1985), али она није предиктор и рачунске процене, што доводи до закључка да се рачунска процена и тачно рачунање не ослањају у потпуности на исте процесе. Рубенштајн (Rubenstein, 1985) је идентификовао осам фактора повезаних са рачунском проценом, од којих су најважнији множење и дељење декадним јединицама, као и поређење сличних примера.

Прегледни радови из области наводе да су истраживања показала како се процена развија споро и касно, а да се напредак види од 4. и 6. разреда (Siegler and Booth, 2005; Sowder, 1992; Verschaffel et al., 2007). Рачунска процена углавном се испитивала од 8. године (Sekeris et al., 2019a; Sowder, 1992), али неколико новијих истраживања бележи да се рачунска процена и рад са приближним бројевима јавља и раније (Dowker, 2003; Sekeris et al., 2018). Први резултати лонгитудиналног истраживања на петогодишњацима (Sekeris et al., 2018, 2019b) говоре у прилог томе. Још увек нема инструктивних истраживања на млађем узрасту од 9 година, а који би допринели да се види може ли да се учи и развија на том узрасту.

На основу ранијих истраживања показано је да одрасли дају мање тачне процене од млађих иако користе сличне стратегије (Dowker, 2003). Код деце се извођење процене побољшава са повећањем нивоа рачунског извођења, док код одраслих процењивање много заостаје за рачунским способностима (Dowker, 2003). Код одраслих је приметна преференција ка тачном израчунавању, која се објашњава малим претходним искуством са процењивањем у формалном образовању (Hanson and Hogan, 2000. према Anestakis and Lemonidis, 2014).

Показано је да процена код сабирања и одузимања једноставнија него код множења и дељења (Anestakis and Lemonidis, 2014; Bestgen et al., 1980; Rubenstein, 1985), да су примери са мањим бројевима лакши него са већим (Dowker, 2003; Rubenstein, 1985) и да је рад са целим бројевима лакши него са децималним и разломцима (Bestgen et al., 1980; Rubenstein, 1985). Питање да ли задаци у контексту поспешују процену више него деконтекстуализовани задаци остало је отворено, тј. добијени су двосмислени резултати у различитим истраживањима (Reys et al., 1982; Rubenstein, 1985). Важна и занимљива карактеристика контекстуалних проблема који укључују рачунање (самим тим и процену) јесте да су увек у вези са количином или мерним јединицама (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001) у чему се види повезаност између рачунске процене и процене у мерењу и бројности.

2. Како испитати процену?

Бројни аутори наводе да постоје потешкоће у мерењу процене, првенствено због саме природе процене (Reys and Reys, 2004; Sekeris et al., 2019a). Прва потешкоћа јесте како одредити да су испитаници стварно процењивали, а не рачунали. Примећена је тенденција ученика да прво рачунају, а онда заокружују резултат и представљају га као процену (Reys and Reys, 2004; Sekeris et al., 2019a), што може значити да ученици не

разумеју процену и њену улогу. Један од начина превазилажења овог проблема јесте контролисање мерења одговора; на писаном материјалу, или пројектору презентује се пример, а затим се да ограничено време за одговор (10–15 секунди). Мање времена подстиче процену, док више времена омогућава рачунање.

Када је у питању испитивање како се способност процене развија, оно је углавном операционализовано помоћу стратегија које испитаници користе (Sekeris et al., 2019a) и то кроз фактор узраста, кроз репертоар, избор и учесталост коришћења стратегија, прецизност и брзину. У испитивању успешности процене углавном се користи мера процентне девијације процене, где се, као добре процене сматрају оне које су до 30% даље од тачног резултата (мада негде и само до 10%) (Schoen et al., 1981; Sekeris et al., 2019a; Star and Rittle-Johnson, 2009). Друге врсте истраживања, испитивале су способност процене кроз флексибилност, адаптивност, концептуално и процедурално знање о процени (Ainsworth et al., 2002; Markovits and Sowder, 1994; Star and Rittle-Johnson, 2009; Star et al., 2009).

Секерис и сарадници (Sekeris et al., 2019b) систематичном прегледу радова који су бавили истраживањем процене на узрасту до 11 година дали су своју таксономију карактеристика начина испитивања процене. Те карактеристике тичу се: 1) формата проблема – најчешћа су питања отвореног типа (односно дати процену неког аритметичког проблема), затим питања вишеструког избора, питања која се тичу евалуације нечије процене, давање референтне вредности и одређивање где би се резултат налазио у односу на референту вредност; 2) операција – најчешће се јављало сабирање, па множење; 3) коришћених бројева – нпр. двоцифрени и једноцифрени; 4) начина на који су прикупљени подаци – много више је индивидуалних тестирања и интервјуисања (како би се подстакла процена и разумео начин резоновања); 5) операционализације – начин на који је мерена и оцењена процена; 6) испитивање стратегија – најчешће су ученици замољени да елаборирају о свом процесу доласка до процене.

Питање мерења и испитивања процене има двојаки значај. Прво, наилази се на потешкоће, па је потребно пронаћи добре методе испитивања и операционализације процене. Један смер истраживања иде ка интервјуима и објашњавању начина резоновања, али се и као добра мера показало компјутерско окружење (Ainsworth et al., 2002). Друго, ако је процена део наставе, питање је да ли је треба оценити, а онда и како оценити и како пратити напредак. До сада, нема јасних упутстава и препорука, а будућа истраживања ове области требало би да дају одговоре на ова питања.

3. Стратегије рачунске процене

У почетку испитивања процене једина спомињана стратегија била је заокруживање, како у курикулумима тако и у разумевању шта је процена (Reys and Reys, 2004). Чак је и данас заокруживање готово једина стратегија коју препознају наставници математике (како процена није садржај њиховог образовања) (Anestakis and Lemonidis, 2014; Mildenhall and Hackling, 2012).

Иако заокруживање заиста представља стратегију процењивања, проблем је што је у основи у ствари алгоритам (формално заокруживање), тј. врло прецизна правила (нпр. уколико су цифре мање месне вредности веће од 5, број се заокружује ка првој већој декадној јединици, а уколико су мање 5 ка првој мањој). Такво разумевање заокруживања не одговара у потпуности концепту рачунске процене јер уколико то захтева ситуација процене, број може да се заокружи и на мањи, иако цифре формално одговарају заокруживањем на већи.

Бољи увид у стратегије и ширу поделу процеса које користе „добри“ процењивачи дали су Рејс и сарадници (Reys et al., 1982; Verschaffel et al., 2007). Они су стратегије сврстали у три групе: реформулација, транслација и компензација; а у сваку од категорија уврстили одређене поткатегије. Касније, ова подела је додатно разграната. У Табели 1. дат је систематизован приказ стратегија и процеса откривених код ученика и одраслих (Dowker, 2003; LeFevre et al., 1993; Lemaire and Lecacheur, 2002; Lemonidis, 2016; Reys et al., 1982; Sekeris et al., 2019a; Siegler and Booth, 2005; Verschaffel et al., 2007).

Ретко кад се користи само једна од стратегија, већ је у питању сплет више стратегија. Транслација често не иде сама, већ иде са неким обликом реформулације бројева, а компензација представља исправку рачуна приликом реформулације и транслације (Siegler and Booth, 2005). У Табели 1. налазе се и примери у којима се користи више стратегија.

Код реформулације, цифре мање месне вредности најчешће се замењују нулама, док се цифре веће месне вредности мењају у мању или већу цифру (заокруживање) или остају исте („фронтенд” и скраћивање). Компензација резултата представља нешто софистициранију стратегију исправљања дисторзије настале реформулацијом или транслацијом и повезана је са вишим менталним процесима. Компензација у рачунској процени, иако слична компензацији као менталној стратегији рачунања (Илић и Зељић, 2017) ипак за циљ нема прецизан одговор. Ако погледамо пажљивије стратегије процене, видимо да оне везане за транслацију у великој мери зависе и од познавања својстава операција, посебно дистрибутивности и асоцијативности, а за компензацију важно је и познавање зависности промене резултата од промене елемената. Стратегије интуиције наводи Доукерова (Dowker, 1997, 2003), а углавном их користе деца предшколског и раног школског узраста и то пре него што се уведу формални поступци рачунања.

Табела 1. Стратегије рачунске процене.

стратегија	опис	примери
реформулација	замена бројева новим који су погоднији за рачунање/процену	$4123 + 3082 \approx 4000 + 3000 \approx 7000$
„фронтенд”	рад са једном или више цифара са већом месном вредности	$87\ 419 + 92\ 765 + 90\ 045 + 81\ 976 + 98\ 102$, посматра се као $8 + 9 + 9 + 8 + 9 = 43$, па је збир $\approx 430\ 000$ (слично и за прве две цифре)
скраћивање	цифра/цифре са највећом месном вредности остају исте, а остале се замењују нулом	5682 може да буде и 5000, али и 5600, 5680 $297 \cdot 298 \rightarrow 290 \cdot 290$
заокруживање	промена бројева у најближе декадне јединице	
заокруживање базирано на правилима	заокруживање бројева на основу правила заокруживања	$2,76 \rightarrow 2,8$ или 3 $297 \cdot 296 \approx 300 \cdot 300$
заокруживање базирано на ситуацији	узимање у обзир контекста у коме се процена одвија	за пример $65 \cdot 23$ прихватљива су сва следећа заокруживања $60 \cdot 20, 70 \cdot 20, 65 \cdot 20, 70 \cdot 23, 65 \cdot 25$
замена форме	замена броја његовом приближном (или тачном) еквивалентном формом	$30\% \rightarrow \frac{1}{3}$ $0,52 \cdot 0,35 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
замена компатибилним бројем	замена релативно приближним бројевима који су једноставнији за рачунање	$\frac{347 \cdot 6}{43} \rightarrow \frac{350 \cdot 6}{42}$ $1853 : 235 \approx 2000 : 250 \approx 8$
транслација	промена структуре проблема у ону која је погоднија за рачунање/процењивање	
промена операције	промена операције у еквивалентну форму, укључује упросечавање	$31 + 28 + 34 \approx 3 \cdot 30 \approx 90$
дистрибутивност и декомпозиција	подела броја на једноставније форме, коришћење дистрибутивног закона	$282 \cdot 153 \approx 280 \cdot 10 \cdot 15$ $152 + 148 + 153 \approx (100 + 100 + 100) + (50 + 50 + 50)$
промена редоследа	приступ проблему другачијим редоследом него што је дато	$\frac{347 \cdot 6}{43}$ постаје $347 : (43 : 6) \approx 350 : 7 \approx 50$
компензација	преправљање дисторзије настале процесом процењивања	
преткомпензација	подешавање бројева пре саме процене	$297 \cdot 296 \approx 300 \cdot 290$ $57 \cdot 56 \approx 60 \cdot 50$ (уместо 60·60)
посткомпензација	преправљање грешке настале процењивањем (додавање/одузимање како би се приближило „тачном“ одговору)	на примеру $27 \cdot 38 \rightarrow 30 \cdot 40$ што је 1200 смислена компензација би била 1100
интуиција	стратегија коју користе млађи ученици, или неискусни процењивачи, али не могу да објасне и оправдају свој одговор	просек бројева 3, 5, 8 и 10 је 6 $594 + 602 \approx 2 \cdot 600 \approx 1200$
груписање бројева	групишу се бројеви који олакшавају процену	$27 + 59 + 38 + 81 \rightarrow (27 + 81) + (59 + 38) \approx 100 + 100 \approx 200$
опсег	одређивање опсега у коме би резултат процене требало да буде	$2,6 \cdot 7 \rightarrow$ одговор је између 14 ($2 \cdot 7$) и 21 ($3 \cdot 7$)
репер	користе се референтне тачке (карактеристични бројеви који су познати и који представљају „сидра” бројевног система); за разломке	$\frac{7}{8} + \frac{11}{12} \approx 1 + 1 \approx 2$

4. Рачунска процена – импликације за наставу

Главно питање које се поставља у настави математике, а које је везано за процену јесте какво треба да буде место рачунске процене у курикулуму где се као основно питање поставља треба ли да буде наставни садржај/тема, да ли да се поучава као вештина, или наставни програм треба да буде прожет проценом кроз различите садржаје и области. С тим у вези, поставља се и питање да ли је могуће уопште поучавати рачунској процени, а ако јесте на који начин и на ком узрасту.

4.1. Место процене у наставном програму

Интересовање за испитивање процене нагло је порасло након америчког националног тестирања образовног процеса (NAEP) (Reys and Reys, 2004; Sowder, 1992), чији су резултати показали да ученицима недостају основне и неопходне вештине процене (Carpenter et al., 1976). Рејс и Рејс (Reys and Reys, 2004) налазе да су се ранији курикулуми базирали на учењу конкретних стратегија (највише заокруживања) и посматрали су процену као садржај. Промена перспективе ишла је у смеру посматрања процењивања кроз контексте где се „математичке вештине и процеси, укључујући и процену, развијају кроз окружење окренуто решавању проблема“ (Reys and Reys, 2004: 104), односно уопште пре увођења идеја реалног математичког образовања, настава математике била је окренута тачном рачуну, па није било много места рачунској процени у курикулумима (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Предлог јесте да рачунска процена не буде наставна тема/садржај (осим када се уводе одређене стратегије), већ да буде интегрисана у што је могуће више садржаја наставе математике (Forrester et al., 1990; Reys and Reys, 2004). Само учење стратегијама јесте потребно јер је ученицима неопходан подстрек у развоју, али није довољно јер „уколико су стратегије у фокусу пре него ситуације које омогућавају да се развију и дискутују идеје и стратегије, мало је вероватно да ће те стратегије бити асимиловане у ученички дугорочни репертоар” (Reys and Reys, 2004: 106). Ови аутори, у вези са местом у курикулуму, праве паралелу рачунске процене и решавања проблема (problem solving), па као што код решавања проблема постоје дистинкције између учења *о решавању проблема*, учења *за решавање проблема* и учења *помоћу решавања проблема*, сличан приступ потребан је и процењивању.

Прегледом правилника о програму наставе и учења разреда основне школе у Србији примећени су садржаји везани за рачунску процену. У трећем разреду у оквиру исхода пише да би требало да ученик може да „процени вредност израза са једном рачунском операцијом” (Просветни гласник, 5/2019-6: 34), и да:

- „ученике треба навикавати да, пре израчунавања, процењују вредности бројевних израза. То је вештина која им помаже да уоче да су направили грешку приликом рачунања и има примену у свакодневном животу (нпр. процена рачуна у продавници, процена потребне количине материјала и слично). Процењивање

вредности израза заснива се на познавању својства аритметичких операција и зависности резултата о промене компоненти операција.” (Ibid.: 35) .

Из ових препорука видимо да програм препознаје важност процене, коју види као помоћ при рачуну, али и као вредност за себе у одговарајућем контексту, а заснива се на разумевању операција. Међутим, недостају важне назнаке, нпр. на који начин се процењују, треба ли увести неке стратегије и које.

У оквиру исхода четвог разреда ученик треба да „процени вредност израза са једном рачунском операцијом” и „одреди вишеструке декадне јединице најближе датом броју” (Просветни гласник, 11/2019-1: 39), а у оквиру мерења у остваривању наставе и учења пише: „Реалним примерима треба развијати способност процене површина (просторија, станова, игралишта парцела итд.) и њиховог међусобног односа” (Просветни гласник, 11/2019-1: 41). Овде видимо основе за интуитивне стратегије и индивидуалан начин размишљања без увођења формалних стратегија, али који могу да буду припреме за увођење формалних правила заокруживања бројева. На овом узрасту потребно је постављати ситуације које подстичу да се користи процена, а не само тачан рачун.

У Наставном плану учења за 5. разред, рачунска процена не постоји експлицитно, али се формално уводи заокруживање (Просветни гласник, 15/2018-77). У седмом разреду, уводе се формална правила одређивања апсолутне грешке при одређивању приближних вредности, што јесте сложен процес за разумевање, а представља основу и за наставу физике и мерења у 8. разреду (Просветни гласник, 5/2019-61).

4.2. Методичке препоруке

Мали је број радова у којима је испитивана ефективност имплементације модела наставе који је укључивао рачунску процену, односно који су проверавали могућност поучавања рачунској процени. У прегледном раду Секерис и сарадници (Sekeris et al., 2019a) пронашли су свега шест таквих студија са ученицима до 11 година. У овом делу представимо резултате неких таквих истраживања и дати опште препоруке за наставу.

У свом истраживању Стар и Ритл-Џонсон (Star and Rittle-Johnson, 2009) испитивали су ефекат модела наставе који укључује компарацију примера и тиме хтели да провере утицај поучавања на концептуално и процедурално знање, као и на флексибилност у знању и употреби стратегија. У основи рада је идентификовање сличности и разлика у више примера, а акценат је на различитим решењима и процесу решавања проблема. Бенефите овог модела виде у омогућавању да се провери смисленост одговора пронађених на различите начине, али и да се „помогне ученицима да развију боље разумевање месне вредности, математичких операција и уопште значење броја”. Иако нису пронашли разлике у концептуалном и процедуралном знању између контролне и експерименталне групе, значајне разлике примећене су у флексибилности (знање о већем броју стратегија и бирању прикладне стратегије (у овом случају и лакоће извођења). Експериментална група била је и значајно боља у

бирању оптималне стратегије према критеријумима лакоће извођења операције и близине одговора, поређењу стратегија, а били су успешнији у проналажењу више начина процењивања одговора. Закључују да овај модел рада може да буде од користи поучавању рачунској процени. Ипак, истичу да је потребно да ученици познају бар једну стратегију рачунске како би бенефити модела били бољи.

У истраживању (Ainsworth et al., 2002) испитиван је ефекат модела translације између више репрезентација користећи компјутерски програм, а сам садржај је представљала рачунска процена. Показано је да је могуће утицати на осећај колико је резултат процене удаљен од тачног одговора и ког је смера (да ли је резултат процене изнад или испод тачног решења), а да су за то најпогодније репрезентације које су или само из математичког окружења (стубичасти графикони и бројеви) или само из сликовног/графичког (мета), а које у себе имају укључену удаљеност процене од тачног и њен смер.

Рад (Bestgen et al., 1980) један је од првих радова провере ефектности неког наставног модела везаног за рачунску процену и први који укључује будуће наставнике. Вредност овог рада је у томе што је показано да је могуће и да одрасли побољшају способност процене, јер су две експерименталне групе након десетонедељног програма квизова који су укључивали задатке процене и повратну информацију о урађеном, биле успешније од контролне групе. Експериментална група која је имала и додатну петоминутну инструкцију о стратегијама рачунске процене, као и кратак разговор након квиза о примерима који су одговарали наученим стратегијама те недеље имала је и значајно боље ставове према процени од оне која није била изложена додатној систематичној инструкцији о процени.

Анестакис и Лемонидис (Anestakis and Lemonidis, 2014) такође су се бавили могућностима учења одраслих стратегијама рачунске процене. Мотивација за рад дошла је из чињенице да се већина радова бавила више наставницима него одраслима, а да је одраслима рачунска процена од изузетне важности у животу. У свом истраживању осмислили су седмочасовни наставни план базиран на предлозима путање обраде процене (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001), а који је био подељен на три дела: заокруживање, стратегије процене код сабирања/одузимања и код множења/дељења. Приметно велики број задатака дат је у контексту јер сматрају да то више одговара потребама конкретних испитаника. Резултати показују чешће коришћење рачунске процене, већи број стратегија, мање грешака и нелогичних одговора, као и то да је заокруживање најчешће коришћена стратегија. Нови таласи истраживања подстичу да је потребно испитивати и млађу децу и нова истраживања говоре у прилог да са проценом треба започети на нижем узрасту (Sekeris et al., 2018, 2019a, 2019b).

Рејс и Рејс (Reys and Reys, 2004) и Марја Ван ден Хеувел-Панхузен (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001) предлажу наставну путању могуће обраде процене у настави, са многобројним примерима задатака и могућности. Такође, у оквиру стандардних тестирања и оцењивања вредни су примери задатака у публикацијама (Mcintosh et al., 1997; Reys and Reys, 2004).

Предлаже се и напомиње да је неопходно да ученици имају претходно искуство и познавање специфичности бројева и операција (нпр. месну вредност, рачунање), па да се онда уводи процена и стратегије (Reys and Reys, 2004; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Међутим, процена може да се користи и као средство зоне наредног развоја када се уведе наредни облици рачунања и проширује блок бројева (Dowker, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001), тј. да се процени резултат на новим облицима рачунања пре увођења формалне стратегије. У истраживању (Star et al., 2009) бољи резултати су добијени са ученицима који су били флуентни са једном стратегијом процене од оних који уопште нису или су имали мало искуства са проценом.

Улога рачунске процене види се и као подршка прецизном рачуну (Reys and Reys, 2004; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Процена може да буде од значаја при провери резултата добијеног алгоритамским поступком (где су честе грешке) и код рачунања помоћу калкулатора, а на оба места како би се проверила разумност добијене вредности (LeFevre et al., 1993; Levine, 2011). Као важна основа процене види се оцена разумности одговора саме процене, колико је удаљена од тачног одговора и ког је смера (да ли је добијени број мањи или већи од тачног одговора), јер се у складу са тим и врши компензација (Ainsworth et al., 2002; LeFevre et al., 1993). Међутим, у уџбеницима су пронађени лоши примери процене (Reys and Reys, 2004), попут оних који могу једноставно и брзо да се израчунају и ни на који начин не подстичу процењивање (нпр. $403+113$), што доводи до збуњености ученика око примене и улоге процене. У задацима који се дају ученицима треба варирати блок бројева, операције, структуре проблема и контролисати време за израду (McAloon et al., 1988).

Поред истраживања развоја процене и стратегија, важан фактор су и ставови о самој процени. Наиме, многи наставници и ученици не виде смисао и важност процене (Reys and Reys, 2004; Sowder, 1992; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Уколико се математика види као прецизно рачунање, у таквој настави нема места за грешке, а онда ни приближне резултате. Аутори (Bestgen et al., 1980) испитивали су ставове учитеља о процени. Као једни од важних фактора који утичу на рачунску процену јављају се самопоуздање и толеранција на грешку (Sowder, 1989). Бољи процењивачи су процену видели као више разумљиву и мање компликовану, а себе као боље математичаре. Потребно је створити атмосферу где се размењују идеје, дискутује о различитим начина доласка до решења, а посебно код процене, важно је разумети да има више и исправних процена, као и долазака до тих процена. Нема једног тачног одговора, а контрапродуктивно је ако се највише вреднује резултат процене који је најближи тачном одговору, јер наводи ученике да уместо да процене у ствари тачно израчунају (Reys, 1986).

Рад (Mildenhall et al., 2010) бави се студијом случаја наставника и његовом променом уверења о рачунској процени кроз модел професионалног усавршавања у ком су се наставници учили о рачунској процени. Основа рада је социо-конструктивистички и критички оквир, а из тог угла посматрања може да се говори о могућностима мењања уверења, саморефлексији, вредновању другачијег

погледа на свет и конструкцији идеја кроз комуникацију. Претпоставка је да наставникова уверења у великој мери утичу на његове педагошке и методичке одлуке, Промена уверења наставнице започета је од уверења да је процена корисна као алат за проверу резултата неког алгоритма стварног рачунања, а завршила се ставом да је рачунска процена „стратегијска активност у оквиру значења броја” (Mildenhall et al., 2010:410). Закључено је да је проширено знање о стратегијама процене допринело да се разумеју стратегије и томе да су вредне и прикладне за ученике. Промена уверења изазвала је и промену у њеној наставној пракси, у коју је уврстила и стратегије процене, проблеме дате у контексту и проблеме без тачног и прецизног одговора.

И у другим радовима у којима се са одраслима или наставницима радило на развоју способности процене, добијени су слични резултати. Аутори (Anestakis and Lemonidis, 2014) испитали су ставове одраслих према математици (самопоуздање, да ли воле математику и сматрају је вредном) и показано је да су сви осим два члана имала позитиван став према математици након инструкције. У другом раду Милденхал и Хаклинг (Mildenhall and Hackling, 2012) испитивали су ефекат професионалне обуке наставника за поучавање рачунској процени на ученичка уверења и постигнућа. Постоје статистички значајне разлике у успеху ученика на посттесту у оквиру учинка у самој процени као и у разумности коришћења стратегија, а постоји и значајна корелација између ова два аспекта. Иако није било значајних промена у ставовима и ученичким уверењима (што приписују кратком периоду интервенције), вредност овог истраживања је у поновној потврди да ученици 6. разреда могу да користе стратегије процене и да их разумеју, а посебно и да су интервенције са наставницима, њиховим уверењима и знању о стратегијама процене допринели промени у наставној пракси, а онда и у постигнућу ученика.

ЗАКЉУЧАК

На основу литературе закључујемо да рачунска процена треба да има своје место у курикулуму наставе математике јер поред веза са темама везаним за значење броја, тесно је повезана и са развојем математичким способности као што су адаптивно и флексибилно мишљење, а које су суштински важне у приступу учења путем решавања проблема. Наиме, као и код менталне аритметике, при процени присутна је адаптивна и флексибилна примена знања везаних за рачунске операције, аритметичка правила и појам броја. Приметан је мали број истраживања примене модела наставе из области рачунске процене. Разлози за то су да сама процена нема своје место у курикулуму као посебна тема и област; затим да је процену тешко испитати и мерити, у образовању будућих наставника не посвећује се пажња значају и методичким основама рачунске процене. Препоруке истраживача јесу да рачунска процена не треба да постане наставна тема која се изоловано поучава у настави, већ треба да буде интегрисана у различите садржаје, али да је ипак потребно ученике упознати са стратегијама процене. Свакако, потребно је још истраживања о начинима учења и разумевања од стране

ученика, као и испитивање методичке ефикасности модела учења и поучавања процени, а досадашња јасно говоре у прилог томе да је могуће развити способност рачунске процене, као и одговарајуће стратегије, што доприноси развоју математичких способности и позитивним ставовима према математици. Посебно треба истаћи потребу развијања ученичких и наставничких уверења о процени као вредној способности. Преглед литературе у наведеној области показује потребу да фокус будућих истраживања буде на испитивању могућности развоја способности рачунске процене предшколаца и ученика млађег школског узраста, као и трансфера на друге математичке теме и развој математичких способности.

Литература:

1. Lemonidis, C. (2016). *Mental computation and estimation. Implications for mathematics education research, teaching and learning*. New York: Routledge.
2. Siegler, R. S. and Booth, J. L. (2005). „Development of numerical estimation: A review” In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (192–212). New York: Psychology Press.
3. Sowder, J.T. (1992). „Estimation and number sense”. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (371–389). New York: Macmillan.
4. Sekeris, E., Verschaffel, L., and Luwel, K. (2019a). „Measurement, development, and stimulation of computational estimation abilities in kindergarten and primary education: A systematic literature review”, *Educational Research Review*, 27(June 2019), 1–14.
5. Anastakis, P., and Lemonidis, C. (2014). „Computational Estimation in an Adult Secondary School : a Teaching Experiment”, *MENON: Journal Of Educational Research. 1st Thematic Issue*, (December 2014), 28–45.
6. Verschaffel, L., Greer, B., and De Corte, E. (2007). „Whole number concepts and operation”. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (557–628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
7. Kilpatrick, J., Swafford, J., and Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.
8. Dowker, A. (2003). „Young children’s estimate for addition: the zone of partial knowledge and understanding”. In A. J. Baroody and A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (243–266). Mahwah, NJ: Erlbaum.
9. Sarama, J., and Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research : learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
10. Dowker, A. (1997). „Young Children’s Addition Estimates”, *Mathematical Cognition* 3(2), 141–154.
11. Lemaire, P., and Lecacheur, M. (2002). „Children’s strategies in computational estimation”, *Journal of Experimental Child Psychology*, 82(4), 281–304.
12. Rubenstein, R. N. (1985), „Computational Estimation and Related Mathematical Skills”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 106–119.
13. Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). „It pays to compare: An experimental study on

- computational estimation”, *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408–426.
14. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Sense publisher.
 15. McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., and Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics : student performance in four countries*. Perth: MASTEC.
 16. Sekeris, E., Verschaffel, L., and Luwel, K. (2018). „Computational estimation in 5-year-olds: first results of a longitudinal study”. Presented at the *3rd Piaget Conference - The origin of number*, Geneva, Zwitserland, 27 Jun 2018-29 Jun 2018.
 17. Ganor-Stern D. (2018). „Do Exact Calculation and Computation Estimation Reflect the Same Skills? Developmental and Individual Differences Perspectives”, *Frontiers in Psychology*, 9, 1316.
 18. Sekeris, E., Verschaffel, L., and Luwel, K. (2019b). „Predictors of exact arithmetic and computational estimation in Kindergarten”. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, and P. Vale (Eds.), *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 43): Vol. 3* (312–318). Pretoria, South Africa.
 19. Bestgen, B. J., Reys, R. E., Rybolt, J. F., and Wyatt, J. W. (1980). „Effectiveness of Systematic Instruction on Attitudes and Computational Estimation Skills of Preservice Elementary Teachers”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 124–136.
 20. Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., and Wyatt, J. W. (1982). „Processes Used by Good Computational Estimators”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 183–201.
 21. Reys, R. E., and Reys, B. J. (2004). „Estimation in the Mathematics Curriculum: A progress report”. In A. McIntosh and L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (101–112). Perth, Western Australia: MASTEC.
 22. Schoen, H. L., Friesen, C. D., Jarrett, J. A., and Urbatsch, T. D. (1981). „Instruction in estimating solutions of whole number computations”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(3), 165–178.
 23. Ainsworth, S., Bibby, P., and Wood, D. (2002). „Examining the Effects of Different Multiple Representational Systems in Learning Primary Mathematics“, *The Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 25–61.
 24. Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). „Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.
 25. Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., and Perova, N. (2009). „The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation”, *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 569–579.
 26. Mildenhall, P., and Hackling, M. (2012). „The Impact of a Professional Learning Intervention Designed to Enhance Year Six Students’ Computational Estimation Performance Purpose and Research Question”. In J. Dindyal, L. P. Cheng, and S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*. Singapore:

MERGA.

27. LeFevre, J. A., Greenham, S. L., and Waheed, N. (1993). „The Development of Procedural and Conceptual Knowledge in Computational Estimation”. *Cognition and Instruction*, 11(2), 95–132.
28. Илић, С. М., и Зељић, М. Ж. (2017). „Правила сталности збира и разлике као основа стратегија рачунања”, *Иновације у настави*, 30(1), 55–66.
29. Carpenter, T. P., Copurn, T. G., Reys, R. E., and Wilson, J. W. (1976). „Notes from National Assessment: estimation”, *The Arithmetic Teacher*, 23(4), 296–302.
30. Forrester, M. A., Latham, J., Shire, B., Forrester, M. A., Latham, J., and Shire, B. (1990). „Exploring Estimation in Young Primary School Children”, *Educational Psychology*, 10(4), 283–300.
31. Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања: 5/2019-6, *Просветни гласник*.
32. Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања: 11/2019-1, *Просветни гласник*.
33. Правилник о плану наставе и учења за пети и шести разред основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за пети и шести разред основног образовања и васпитања: 15/2018-77, *Просветни гласник*.
34. Правилник о програму наставе и учења за седми разред основног образовања и васпитања: 5/2019-61, *Просветни гласник*.
35. Levine, R. (1982). „Strategy Use and Estimation Ability of College Students”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 350–359.
36. Mcaloon, A., Robinson, G. E., and Reys, R. E. (1988). „Assesing for learning: testing computatuonal estimation - some things to consider”, *The Arithmetic Teacher*, 35(7), 28–30.
37. Reys, B. J. (1986). „Teaching Computational Estimation:Concepts and strategies”. In H. L. Schoen (Ed.), *Estimation and Mental Computation, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (31–44).Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
38. Mildenhall, P., Hackling, M., and Swan, P. (2010). „Computational estimation in the primary school: A single case study of one teacher’s involvement in a professional learning intervention“. In L. Sparrow, B. Kissane, and C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education:Proceedings of the thirty-third conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (407–413). Fremantle,WA: MERGA.

Svetlana M. Ilic
Faculty of Teacher Education, University of Belgrade

COMPUTATIONAL ESTIMATION – THEORETICAL AND METHODOLOGICAL
FOUNDATIONS

Abstract: The practical significance of computational estimation is noticeable in everyday life, but the place and role of estimation within mathematical abilities is also important. The paper presents the theoretical and methodological foundations of the concept of computational estimation, the development of estimation skills, and it gives a systematic overview of computational estimation strategies. Computational estimation, due to its nature, has not been much examined and a small number of papers that have tested the effectiveness of the teaching instruction have been observed. However, the results so far suggest that it is possible to develop the estimation ability in both children and adults, and that this contributes to mathematical flexibility, better achievement and attitudes towards mathematics. The place of estimation in the curricula was examined and methodical recommendations for teaching were given. Computational estimation should be integrated into as many mathematics teaching content as possible, and new research suggests that estimation skills should be developed from preschool age.

Key words: computational estimation, computational estimation strategies, mental arithmetic
Рад је примљен 18. 02. 2020. године, а рецензиран 02. 04. 2020. године.