

PRORAČUN KOSO SAVIJANIH AB PRESEKA

Zoran BRUJIĆ

ORIGINALNI NAUČNI RAD
UDK: 624.012.46.072.32 = 861

1. UVOD

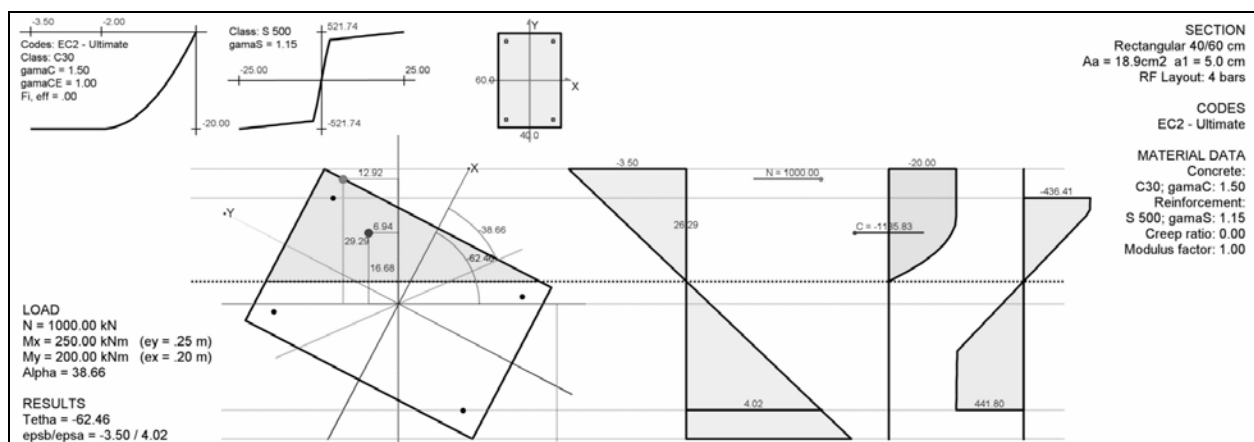
Ukoliko se napadna osa momenta savijanja poklapa sa nekom od glavnih osa inercije poprečnog preseka, govorimo o jednoosno savijanom preseku. U suprotnom, poprečni presek je koso (dvoosno) savijan. Iako je u praksi teško pronaći element čiji su preseci u potpunosti jednoosno savijani, u velikom broju slučajeva otklon napadnog pravca od jedne od glavnih osa je dovoljno mali da može biti zanemaren. Ovo je naročito slučaj kod grednih elemenata simetričnog preseka oko vertikalne ose, primarno opterećenih u vertikalnoj ravni. Međutim, stubovi prostornih konstrukcija, ali i gredni elementi nesimetričnog preseka (ili nesimetrično armiranog preseka) ili rotirani oko uzdužne ose (rožnjače, na primer) su izloženi dvoosnom savijanju na način da zanemarenje otklona napadnog pravca od glavne ose inercije često nije opravdano.

Adrese autora:
Zoran Brujić, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u
Novom Sadu

Kod dvoosno savijanih preseka pravac neutralne linije se, u opštem slučaju, ne poklapa sa pravcem napadne linije rezultantnog momenta savijanja, niti sa nekom od glavnih osa. Ugao neutralne linije uvek „pravi“ otklon od napadne ose ka osi manjeg momenta inercije idealizovanog preseka (sl. 1).

2. INTERAKCIONE POVRŠINE

Granična nosivost nekog poprečnog preseka poznatog načina armiranja i količine armature, te saglasno opštim proračunskim pretpostavkama (linearna promena dilatacija po visini preseka, poznati konstitutivni zakoni za beton i čelik), može biti definisana kao maksimalni moment savijanja (M) nekog napadnog ugla (α) pri određenoj vrednosti aksijalne sile (N). Rezultat može biti prikazan kao tačka u troosnom koordinatnom sistemu M_x - M_y - N , gde su M_x i M_y projekcije graničnog momenta na glavne pravce. Variranjem napadnog ugla i aksijalne sile formiraju se interakcione površi za predmetni presek. Geometrijski, tačke sa istom vrednošću aksijalne sile predstavljaju horizontalni, a tačke sa istom vrednošću napadnog ugla vertikalni presek kroz interakcionu površ. U praksi se interakcione



Slika 1. Otklon ugla rezultujuće neutralne linije od ugla napadne ose (granično stanje nosivosti)

površine, češće, izračunavaju drugačijim pristupom. Za neko granično stanje dilatacija u preseku i za neku vrednost ugla neutralne linije (ugla savijanja θ) određuju se projekcije M_x i M_y spoljašnjeg momenta koji uravnotežuju unutrašnje sile koje odgovaraju zadatim podacima. Ovim je, ponovo, definisana jedna tačka interakcione površi, a variranjem stanja dilatacija te ugla savijanja formira se cela površ. Geometrijski, tačke koje sad odgovaraju jednom stanju dilatacija ili jednoj vrednosti ugla savijanja nisu više krive u ravni, iako odstupanja, često, nisu velika.

Prikazanom površi određena je granična nosivost poprečnog preseka. Tačka koja reprezentuje trojku uticaja M_x - M_y - N može da se nađe unutar površine, čime je predmetni presek u stanju da ih prihvati (ovi uticaji ne dovode presek u granično stanje loma); može da se nađe van površi, čime se konstatuje nedovoljnost nosivosti predmetnog preseka; može da se nađe tačno na površini, čime ovi uticaji postaju uticaji na granici nosivosti (dovode presek u granično stanje loma).

Oblik interakcione površi je prvenstveno određen oblikom poprečnog preseka, rasporedom armature u poprečnom preseku (posebno u zoni zatežućih i malih pritiskujućih aksijalnih sila), količinom armature (procentom armiranja) i usvojenim oblikom konstitutivnih veza za beton i čelik. U delu gde je aksijalna sila zatežuća dominantan uticaj na oblik površi ima rasporedom armature u preseku. Sa porastom aksijalne sile pritiska, površ se „zaobljava“. Najniža tačka površi odgovara stanju konstantnih dilatacija širenja po visini preseka, dok najviša tačka odgovara stanju konstantnih dilatacija sažimanja po visini preseka. Najveću nosivost određuje stanje dilatacija blisko simultanom dostizanju maksimalnih dilatacija sažimanja u betonu, te maksimalnih dilatacija širenja u, od težišta najudaljenijoj, zategnutoj armaturi. Unutrašnje sile kod nesimetričnih (i/ili nesimetrično armiranih) preseka, pri stanju konstantnih dilata-

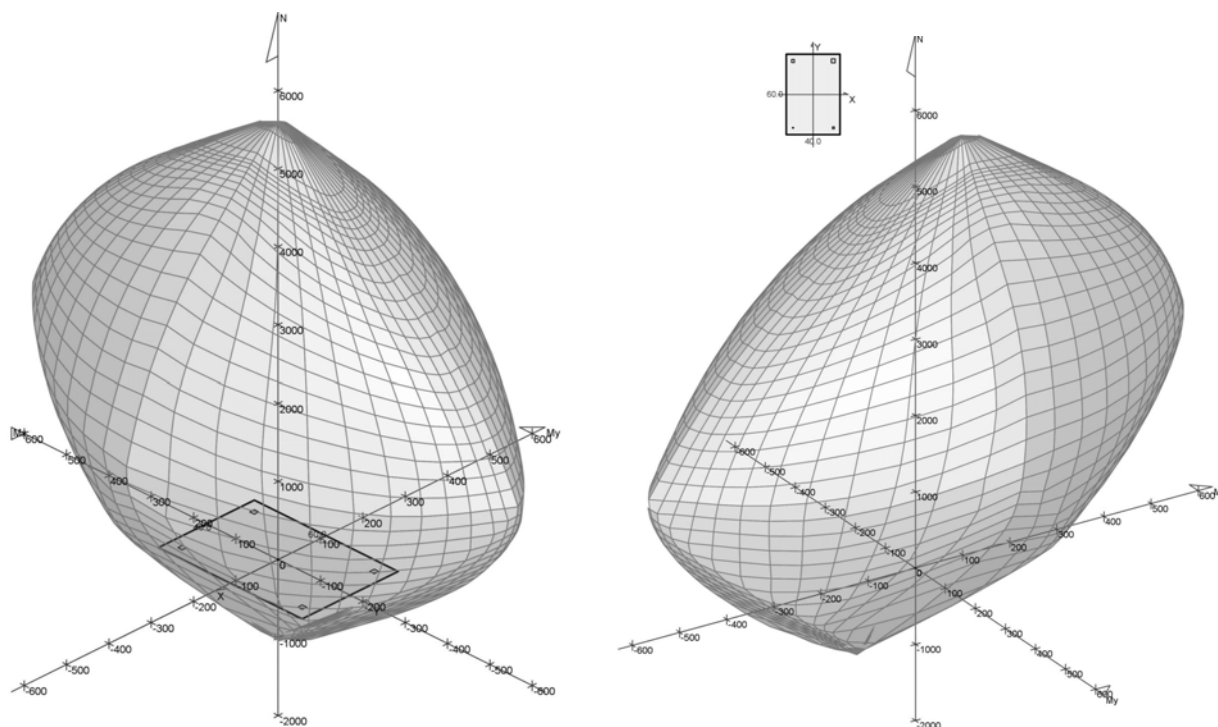
cija (sažimanja ili širenja) rezultuju momentom savijanja, što za posledicu ima da najniža i najviša tačka površi nisu na N -osi (sl. 2b).

Sa stanovišta proračuna poprečnog preseka, od posebnog interesa su vertikalni i horizontalni preseki kroz interakcionu površ. Vertikalni presek (sl. 3a) daje interakcionu krivu M - N za poznat napadni ugao momenta, dok horizontalni (sl. 3b) daje interakcionu krivu M_x - M_y za poznat intenzitet aksijalne sile. U praksi se koriste bezdimenzionalni oblici ovih dijagrama/površi. Svođenjem na bezdimenzionalni oblik obezbeđuje se njihova nezavisnost od dimenzija stranica poprečnog preseka, kao i od kvaliteta betona. Delilac kojim se relativizuju vrednosti momenata savijanja, za slučajeve jednoosnog savijanja pravougaonih preseka, postaje odgovarajuća visina preseka (b ili d):

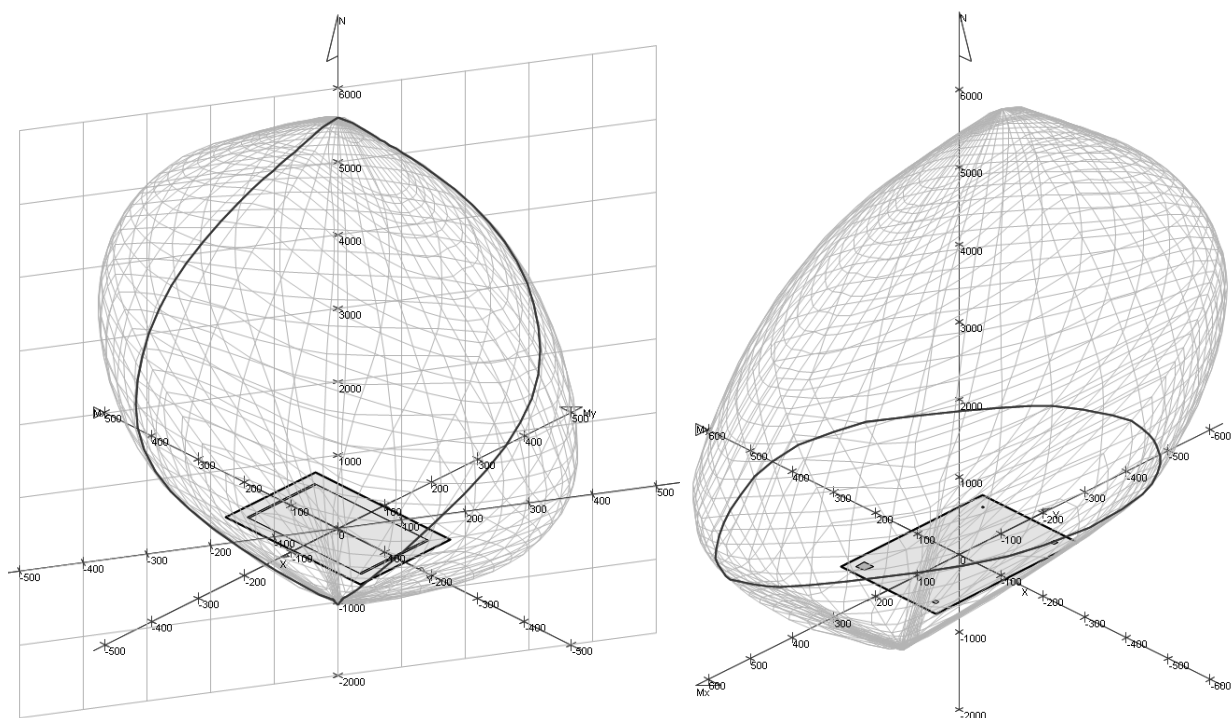
$$r(\alpha) \cdot b \cdot d \cdot f_c, \quad \text{gde je}$$

$$r(\alpha) = \frac{b \cdot d}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2 \alpha + d^2 \cdot \sin^2 \alpha}}$$

Iako se konstrukcijom interakcione površi ne rešava problem dimenzionisanja preseka u užem smislu (određivanje minimalno potrebne količine armature), konstrukcija familije ovakvih površi omogućava da se problem dimenzionisanja reši inverzno – pronalaženjem površi na kojoj tačka kojom je reprezentovana trojka uticaja leži. Ipak, inženjerski gledano, ovakav postupak je bogat „praznim hodom“, zbog čega ovaj pristup ima smisla samo kao neka vrsta inženjerskog tabulisanog alata. Postupkom dimenzionisanja u užem smislu se direktno određuje potrebna količina armature za zadata trojku uticaja, a da se pri tome ne određuju ostale tačke površi.



Slika 2. Interakciona površ za simetrično i nesimetrično armiran pravougaoni presek



Slika 3. Vertikalni i horizontalni presek kroz interakcionu površ

Određivanje tačaka interakcione površi je zametan matematički zadatak. Tek sa širom primenom moćnih i jeftinih personalnih računara postala je moguća konstrukcija interakcionih površina visoke tačnosti i elimisana potreba uvođenja aproksimacija.

3. ALGORITAMSKO REŠENJE

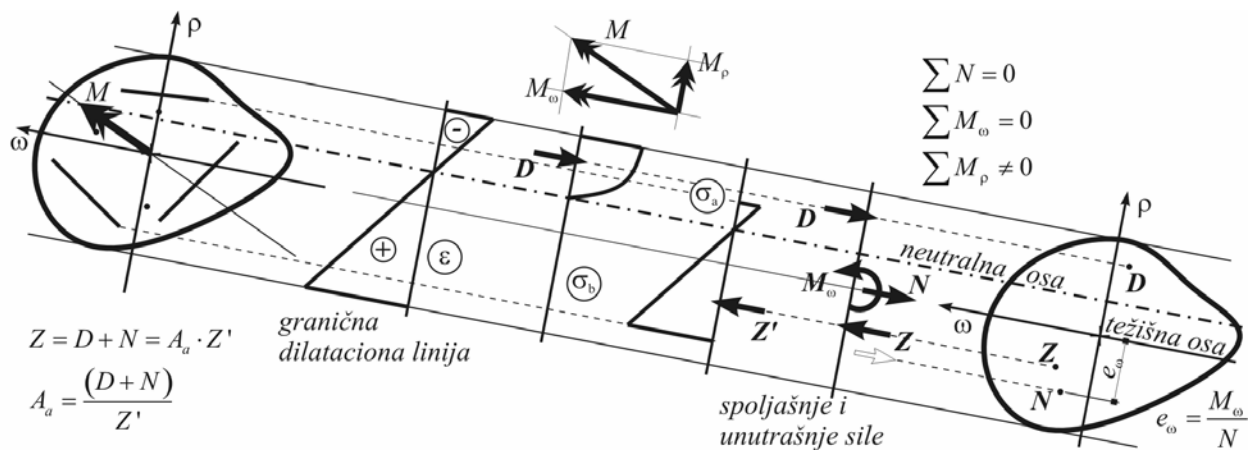
Postavljen je zadatak određivanja minimalno potrebne količine podužne armature poprečnog preseka opterećenog aksijalnom silom i momentom savijanja koji se ne poklapa sa pravcem glavnih osa inercije. Spoljašnji uticaji su dati za težište betonskog preseka u svojim graničnim (faktorizovanim) vrednostima. Razmatra se armiranobetonski presek u graničnom stanju loma proizvoljnog oblika. Pretpostavlja se da je poznat raspored (ne i količina) armature u preseku. Uobičajeno je da se podužna armatura u poprečnom preseku prikazuje u svom raspodeljenom obliku kao linija armature, ili u tačkastom obliku kao tačka armature. Potreba za jednoznačnošću rešenja uslovljava potrebu poznavanja učešća pojedine linije ili tačke armature u ukupnoj količini armature. Smatra se da su poznati zakoni ponašanja materijala – radni dijagrami za čelik i beton. Algoritamski gledano ne postoje prepreke za implementaciju bilo kojeg oblika ovih zavisnosti. Međutim, uobičajeno je zanemarenje nosivosti zategnutog betona u graničnom stanju loma. Mehaničke karakteristike betona i čelika su, takođe, poznate, a parcijalni koeficijenti za materijale su već uračunati (zavisno od vrste kombinacije opterećenja). Konačno, moraju jednoznačno biti postavljeni uslovi kojima se definiše kada je poprečni presek u graničnom stanju nosivosti. Ovi uslovi se kod proračuna prema graničnim stanjima nosivosti, uz uobičajenu pretpostavku ravnog

deformisanja preseka, postavljaju prema vrednostima dilatacija.

Spolja posmatrano, rezultat proračuna je potrebna količina armature u preseku (u zadatom rasporedu), a biće određena iz uslova uravnoteženja spoljašnjih i unutrašnjih sila. Algoritmom se pronalazi ugao ose savijanja, njen položaj i količina armature u preseku koji obezbeđuju puno uravnoteženje spoljašnjih i unutrašnjih sila. Reč je, dakle, o tri nepoznate veličine, za čije određivanje na raspolaganju stoje tri uslova ravnoteže (dva po momentima savijanja i jedan po aksijalnoj sili). Osim za specijalne, jednostavne, slučajeve, problem ne može biti rešen u zatvorenom obliku, već je neophodna primena iterativnog postupka dva nivoa dubine. Za jedan ugao nagiba neutralne linije moguće je, iterativnim postupkom, pronaći količinu armature i položaj neutralne ose zadatog nagiba po visini preseka za koji će biti zadovoljena dva od tri uslova ravnoteže. Pogodno je izabrati zadovoljenje uslova ravnoteže po aksijalnim silama i po momentima savijanja u pravcu zadatog nagiba neutralne linije. Konačno rešenje je moguće dobiti novim iterativnim približavanjem rezultujućem uglu nagiba neutralne linije, a prepoznaje se zadovoljenjem i trećeg uslova ravnoteže po momentu savijanja u pravcu normale na nagib neutralne linije.

Analiza preseka za jedan nagib neutralne linije

Na sl. 4 je prikazan poprečni presek i stanje spoljašnjih i unutrašnjih sila za jedan ugao nagiba neutralne linije i za zadat položaj ove linije po visini preseka (visina preseka je funkcija izabranog nagiba). Lokalne koordinatne ose su obeležene sa ρ i ω (osa ω je pretpostavljenog nagiba neutralne linije). Položajem neutralne linije, saglasno pretpostavkama, definisan je



Slika 4. Ravnoteža spoljašnjih i unutrašnjih sila za jedan nagib neutralne linije θ

dilatacioni dijagram po visini preseka, a njemu, saglasno radnim dijagramima, odgovaraju dijagrami napona u betonu i čeliku. Integracijom napona u betonu po površini na kojoj deluju sračunava se rezultujuća unutrašnja sila u betonu i njen položaj. Kako je pretpostavljeno da se beton napreže samo u pritisnutoj zoni, rezultat je jedna sila pritiska (sila D). Integracija ovog napona može biti numerička ili u analitičkom obliku, ukoliko način definisanja proizvoljnog poprečnog preseka to omogućava. Sa stanovišta tačnosti i brzine proračuna, prednost je na strani analitičkog rešenja. U prikazanom rešenju primenjeno je analitičko rešenje, a elementarna površina integracije je trougao. Na sličan način sračunava se i rezultujuća sila u čeliku i njen položaj (sila Z). Međutim, ovako sračunata sila u čeliku je u funkciji nepoznate količine armature. Ukupna količina armature (A_a) je određena iz uslova zadovoljenja ravnoteže aksijalnih sila. Ovo za posledicu ima različitu količinu armature za svaki položaj neutralne linije.

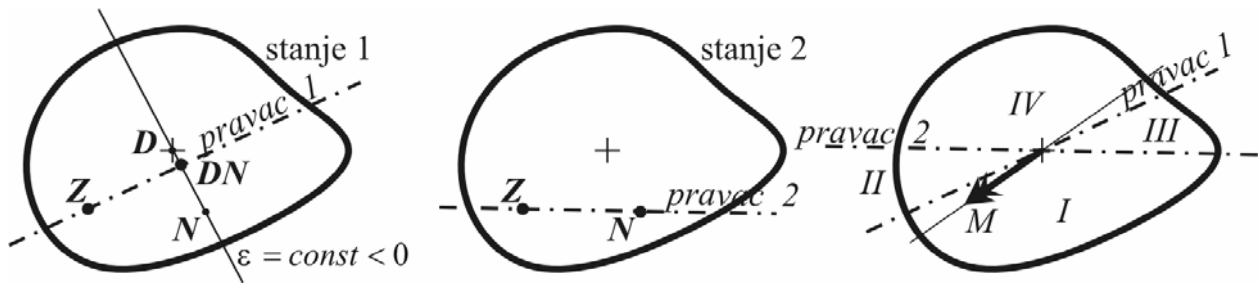
Dakle, za jedan ugao nagiba neutralne ose, varira se njen položaj (ρ_0) u potrazi za onim koji rezultuje zadovoljenjem uslova ravnoteže: $\sum N$ i $\sum M_\omega$. Za svaki novi položaj se sračunava količina armature i stanje unutrašnjih sila u preseku i ispituje vrednost momenta M_ω . Postupak u potpunosti odgovara proračunu jednoosno savijanog preseka. Funkcija $M_\omega(\rho_0)$ je monotona sa vertikalnom asimptomom u tački ρ_A , za koju je zbir sila u armaturi identički jednak nuli (definisana rasporedom i učešćem pojedinih armatura). Ovo znači da se rezultujući položaj neutralne ose traži u intervalima $(-\infty, \rho_A)$ i $(\rho_A, +\infty)$, te da je pre početka iterativnog postupka neophodno odrediti ovu granicu intervala. S obzirom na oblik funkcije (vrlo blagi i vrlo strmi delovi), ne preporučuje se primena metode lažnog položaja. Kraj iteracionog postupka je definisan tolerancijom postavljenom po momentu i/ili po položaju neutralne ose. Ispitivani intervali su otvoreni sa obe strane. Stanje dilatacija i napona za $\rho_0 = \pm\infty$ je trivijalno, pa ove krajeve intervala treba rešiti u formi specijalnog slučaja. Unutrašnje granice zahtevaju ispitivanje funkcije u tačkama u neposrednoj blizini vertikalne asimptote sa leve i desne strane (ρ_0^- i ρ_0^+). Treba naglasiti da otklon od ρ_0 mora biti veći od tolerancije sa kojom je određen

položaj ρ_0 . Moguće su situacije kada postoji po jedna nula funkcije u svakom od intervala. Realno rešenje odgovara pozitivnoj količini armature ili većoj od dve negativne - uravnoteženje uslova ravnoteže je u pojedinim slučajevima moguće samo negativnom količinom armature. Konačno, za rezultujuće stanje jednog nagiba neutralne linije, potrebno je sračunati moment savijanja $\sum M_\rho$. Jednom nagibu neutralne ose odgovara jedna vrednost ovog momenta - $M_\rho(\theta)$.

Nagib neutralne linije

Kako se stanja dilatacija i napona u preseku, u opštem slučaju, razlikuju za uglove nagiba neutralne linije θ i $\theta + \pi$, to se rešenje po nagibu traži u celom intervalu od 0 do 2π . Traži se onaj ugao nagiba za koji se zadovoljen prva dva uslova ravnoteže zadovoljava i treći - traži se nula funkcije $M_\rho(\theta)$. I ovde je reč o prekidnoj funkciji, te je neophodno odrediti granice ispitivanih intervala, u kojima je funkcija monotona. Do ovih granica se dolazi inverznom fizičkom analizom unutrašnjih sila u preseku za stanja konstantne dilatacije, kada je položaj unutrašnjih sila unapred poznat. Kako svakom uglu nagiba neutralne linije odgovara jedno rezultujuće (analiza jednoosno savijanog preseka) stanje dilatacije, to će krajnja dilataciona stanja (stanja konstantne dilatacije po celom preseku) odrediti krajeve intervala.

Spoljašnji uticaji (moment M i aksijalna sila N različita od nule) mogu se prikazati samo aksijalnom silom izmeštenom u odnosu na težište poprečnog preseka za ekscentricitet e u pravcu normale na napadnu osu. Obeležimo sa DN rezultantu sila D (manje od nule) i N (izvesno se nalazi na pravcu DN). Za slučaj konstantne dilatacije po visini preseka, uz pretpostavku jednakog ponašanja čelika i u pritisnutoj i u zategnutoj zoni, položaj sile Z se poklapa sa težištem armature T_a . Za slučaj konstantne negativne dilatacije (stanje 1) položaj sile D se poklapa sa težištem betonskog preseka T (obično se usvaja bruto betonski presek), dok je u slučaju konstantne pozitivne dilatacije (stanje 2) ova sila jednaka nuli ($DN = N$).



Slika 5. Analiza položaja sile u preseku za slučajeve konstantne dilatacije

Dakle, u stanju 1 postoje sile Z i DN . Pravac koji povezuje napadne tačke ovih sila (*pravac 1*) je, izvesno, pravac neutralne linije u analizi jednoosno savijanog preseka. Primitimo da se neutralna linija nalazi u beskonačno udaljenom položaju ($-\infty$ po ρ -koordinati). Ovo je jedini pravac neutralne linije za koji je zbir momenata M_ω jednak nuli. U stanju 2 postoje samo sile Z i N . Iz istog razloga, pravac koji spaja napadne tačke ovih sila je pravac neutralne linije koja odgovara konstantnoj pozitivnoj dilataciji (*pravac 2*). Sa dva pravca je interval punog kruga izdijeljen na četiri kvadranta (označeni rimskim brojevima). Funkcija $M_\rho(\theta)$ je neprekidna u svakom od četiri intervala. Najčešće, rešenje (nula funkcije) se nalazi u intervalu I (interval unutar kojeg je napadni moment), jer otklon ugla ose savijanja od napadne ose obično nije velik. Ukoliko rešenje nije u prvom intervalu, ispituju se intervali II i III , a vrlo su retke situacije u praksi kad se rešenje nalazi u intervalu IV (sl. 5). Poklapanje napadnih tačaka sila Z i DN u stanju 1 ili Z i N u stanju 2 ukazuje na uspostavljenu ravnotežu po sva tri kriterijuma, zbog čega je stanje 1 ili stanje 2 ujedno i konačno rešenje. U specijalnom slučaju kada su napadne tačke sila N , Z i D kolinearne, pravci 1 i 2 se poklapaju, zbog čega se, umesto četiri, ispituju samo dva intervala, svaki širine π .

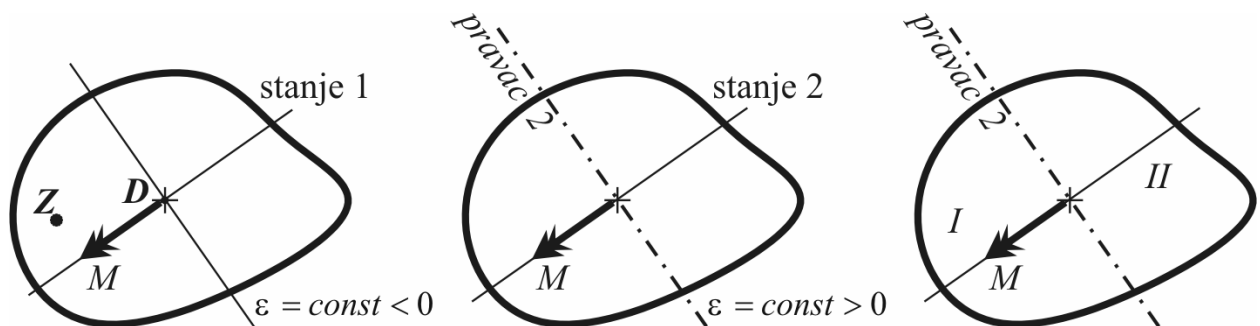
Za specijalni slučaj $N = 0$, prethodni algoritam ne može biti primenjen zbog nepostojanja napadne tačke sile N . Za stanje 1, iz uslova ravnoteže po aksijalnim silama dobija se $Z = -D$. Spreg sila Z i D , osim u specijalnom slučaju (kada je stanje 1 rešenje), ne uravnotežuje napadni moment M . Dakle, *pravac 1* ne postoji. U stanju 2 sve sile (N , D i Z) su jednake nuli, zbog čega je *pravac 2* usmeren normalno na napadnu osu momenta (jedini pravac za koji će zbir momenata biti jednak nuli). Opet se ispituju samo dva intervala (sl. 6).

Inverznom postavkom, za poznatu količinu armature, variranjem ugla nagiba ose savijanja i položaja neutralne ose po visini preseka (variranjem stanja dilatacija) moguće je, na sličan način, određivanje tačaka interakcione površi. Jednom uglu nagiba neutralne linije i jednom položaju neutralne ose odgovaraju unutrašnje sile koje rezultiraju trojkom unutrašnjih uticaja M_x - M_y - N . Spoljašnji uticaji kojima se ovi uravnotežuju odgovaraju negativne vrednosti unutrašnjih.

Komentar

Prikazan je opšti algoritam za određivanje potrebne količine armature poznatog rasporeda po koso savijanom poprečnom preseku. Primenjenim algoritmom nisu usvojene bilo kakve aproksimacije. Tačnost dobijenih rezultata je funkcija samo postavljenih tolerancija (određuju tačnost svakog iterativnog postupka). Dalje optimizacije algoritma su moguće u cilju pronalaska optimalnog rasporeda armature u preseku.

Pravi značaj prikazanog postupka dolazi do izražaja nakon njegove ugradnje u složeniji programski paket, kojim će automatski biti generisani uticaji za različite kombinacije opterećenja i kojim će biti tretiran niz poprečnih preseka. Iako današnji računari problem dimenzionisanja jednog preseka rešavaju vrlo brzo, sve vrste optimizacija po pitanju brzine proračuna su više nego dobrodošle. Naime, kod realne konstrukcije može se pojaviti potreba za višestrukim (često i više hiljada puta) dimenzionisanjem jednog preseka za uticaje različitih kombinacija opterećenja, a broj preseka se često meri hiljadama. U tom smislu je, problem jednoosno savijanih preseka, kod kojih je unapred poznat pravac ose savijanja, iako specijalni slučaj koso savijanog preseka, poželjno izdvojiti u formi posebnog slučaja kojim će biti izbegnuto variranje nagiba ove ose.



Slika 6. Specijalni slučaj $N = 0$

4. Približna rešenja

Do masovne primene računara u svakodnevnoj inženjerskoj praksi, problem dimenzionisanja koso savijanih poprečnih preseka je rešavan isključivo pojednostavljenim metodama. Šta više, i današnja inženjerska praksa relativno retko primenjuje „tačna rešenja“. Razlog ovome je, pre svega, relativno mala dostupnost odgovarajućih specijalizovanih softverskih rešenja, ali i, još uvek, sporost primene algoritamskog rešenja u složenijim praktičnim situacijama. Dodatno, približne metode obično imaju jasnu fizičku pozadinu, što ih čini preglednim i lako proverljivim.

Zavisno od načina simplifikacije problema, približni postupci bi, grubo, mogli biti klasifikovani u sledeće grupe [2]:

- grafički postupci,
- postupci kojima se problem svodi na dva problema jednoosno savijanih preseka,
- postupci kojima se problem svodi na jedan problem jednoosno savijanog preseka,
- postupci koji baziraju na aproksimiranoj interakcionoj površi.

Grafičke metode

Grafičke metode su pogodne za kružne i pravougaone poprečne preseke, a baziraju na primeni bezdimenzionalnih interakcionih dijagrama, koji predstavljaju preseke (horizontalne ili vertikalne) interakcionih površi. Primeri ovakvih interakcionih dijagrama, istina u dimenzionalnom obliku, dati su na prethodnim slikama (sl. 3). Naravno, ova metoda pretpostavlja iscrtane dijagrame u formi inženjerskog priručnika. Kako je oblik dijagrama (čak i bezdimenzionalnog) definisan oblikom preseka, načinom armiranja (raspored i lokacija armature), napadnim uglom, vrstom čelika, kvalitetom betona (sa porastom čvrstoće betona kvalitativno se menja konstitutivni zakon, npr. prema Evrokodu)..., to je jasno da i vrlo grubo variranje navedenih parametara može da rezultira izuzetno velikim brojem dijagrama. U praksi se ovakvi dijagrami daju za najčešće korišćene preseke (pravougaone) uz pretpostavku dvoosno simetričnog armiranja. Primeri ovakvih dijagrama se mogu pronaći i u domaćem Pravilniku za beton i armirani beton [1]. Dati

dijagrami ne predstavljaju prave vertikalne preseke kroz interakcionu površ, nego spajaju sve tačke na površi jednakog ugla savijanja (videti npr. 2). Zbog toga se mogu koristiti samo nakon približnog određivanja ugla savijanja θ . Jednostavna, a dovoljno tačna (sl. 7), aproksimacija odgovara pravcu neutralne linije homogenog linearno elastičnog materijala (sa e_x i e_y su obeležene projekcije ekscentriciteta aksijalne sile):

$$\tan \theta = \frac{e_x}{e_y} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^2, \quad e_y \geq e_x. \quad (1)$$

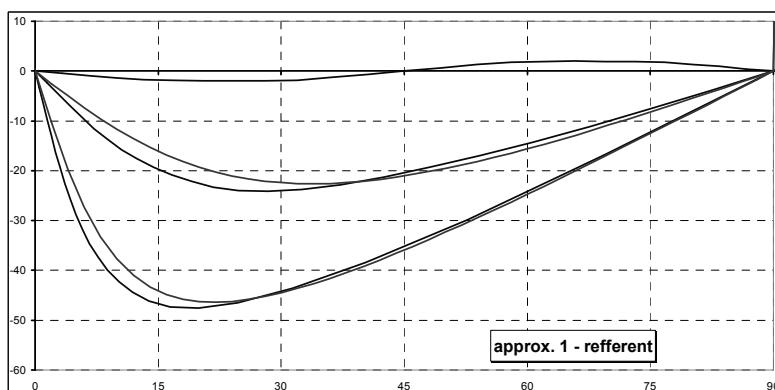
Drugi, upotrebljiviji, oblik primene grafičke metode bazira na primeni interakcionih dijagrama koji predstavljaju prave vertikalne ($M-N$) ili horizontalne (M_x-M_y) preseke interakcione površi (sl. 3). U ovom slučaju nema potrebe za određivanjem ugla savijanja – dijagrami su dati po napadnom uglu, koji je poznat sa spoljašnjim uticajima.

Dva problema jednoosno savijanih preseka

Metode kojima se problem kosog savijanja dekomponuje na dva problema jednoosnog savijanja podrazumevaju delu spoljašnjih uticaja na dva pravca u obliku:

$$\begin{aligned} \text{pravac 1:} & \quad M_x, \quad \delta \cdot N \\ \text{pravac 2:} & \quad M_y, \quad (1-\delta) \cdot N \end{aligned} \quad (2)$$

Pri tome je nepoznanica način raspodele aksijalne sile, a konačni rezultat je od ovoga bitno zavisian. Iskustva ukazuju na nemogućnost postavljanja dovoljno jednostavnog izraza za određivanje ovog parametra, kojim bi se pokrili različiti odnosi dužina stranica preseka ili, pogotovu, načini armiranja preseka u zadovoljavajućem opsegu tačnosti. Posebno iritira činjenica da koncept dekompozicije uticaja fizički gledano ne može biti opravdan, s obzirom da horizontalni preseki za različite intenzitete aksijalne sile međusobno, praktično, ne koreliraju. Šta više, dobijeni rezultati nisu neophodno konzervativni, kako se to konstatuje npr. u [4]. Zato se ovaj metod koristi u sprezi sa nekim od ostalih pomenutih. Najčešće se usvaja najjednostavniji oblik podele aksijalne sile na dva problema



Slika 7. Promena ugla otklona (ordinata) u funkciji napadnog ugla (apscisa) za tri različita odnosa visine i širine preseka (40x40, 40x60 i 40x100). Ppoređenje (1) sa referentnim krivama.

problema (na primer, po polovina svakom od problema), ali se dobijeni rezultat kontroliše ili grafičkom metodom ili aproksimacijom interakcione površi. U priručniku koji prati domaći Pravilnik za beton i armirani beton [1], predlaže se kontrola aproksimativnim, *Bresler*-ovim kriterijumom (3). Time je dekompozicija problema iskorišćena kao prvi korak postupka.

Jedan problem jednoosno savijanog preseka

Ukoliko je poznat rezultujući ugao savijanja, problem kosog savijanja je moguće posmatrati kao jednoosni problem tog pravca. Na ovome baziraju metode kojima se problem kosog savijanja svodi na jedan problem jednoosno savijanog preseka. Ipak, direktna primena metoda problema jednoosno savijanih preseka nije moguća. Za posmatrani pravac presek nije „ispravno“ orijentisan, što nalaže potrebu kombinovanja ovog metoda sa nekim od drugih navedenih. Treba primetiti da je postupak koji koristi interakcione dijagrame za koso savijene preseke (prikazan pod grafičkim metodama) upravo takva kombinacija: približnim određivanjem ugla savijanja problem je sveden na jednoosni.

Aproksimacija interakcione površi

Brojne su metode kojima se interakciona površina zamenjuje aproksimativnom površinom relativno jednostavnog analitičkog oblika. Poznavanjem analitičkog oblika interakcione površi, provera nosivosti datog preseka na granične uticaje postaje trivijalna – kontrola položaja tačke kojom se reprezentuje trojka uticaja u odnosu na površ. Neke od metoda su prezentovane u nastavku.

Metoda recipročne sile (reciprocal load method)

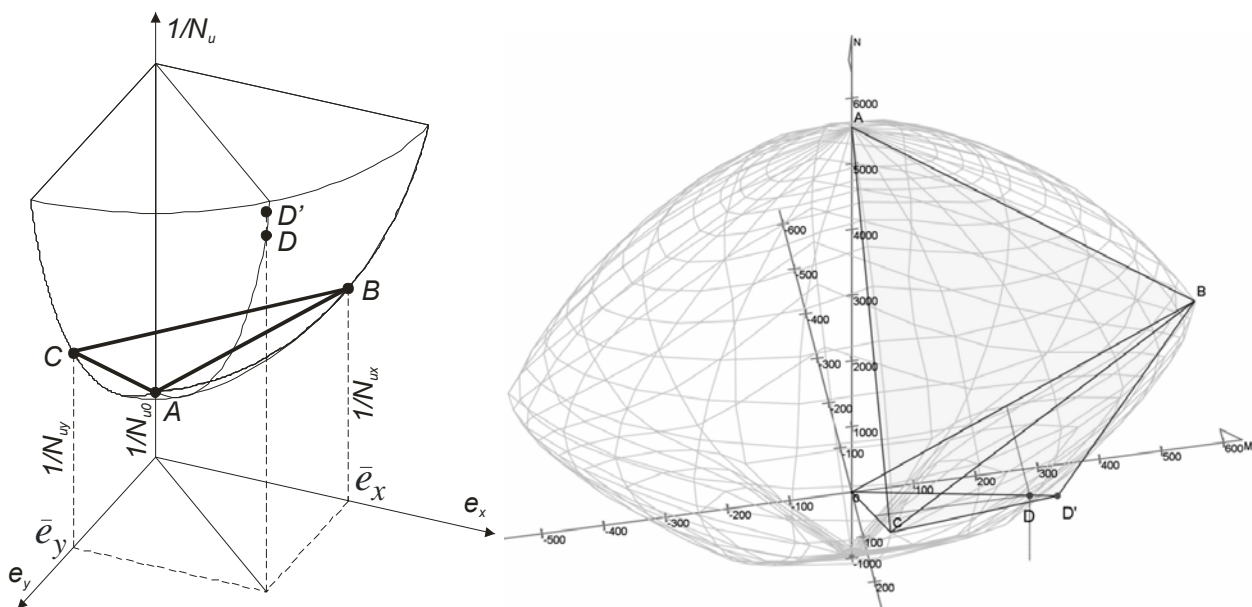
Bresler je 1960. predložio dve metode [2]. Prema prvom – „metoda recipročne sile“ (*reciprocal load method*) – granična vrednost aksijalne sile (N_u), čiji je položaj poznat (određen ekscentricitetima \bar{e}_x i \bar{e}_y), se približno može odrediti sledećim izrazom (*Bresler*-ov kriterijum):

$$\frac{1}{N_u} = \frac{1}{N_{ux}} + \frac{1}{N_{uy}} - \frac{1}{N_{u0}}, \quad (3)$$

Najjednostavnije je matematičku pozadinu predložene izraza predstaviti modifikacijom interakcione površi, kojom se umesto veze M_x - M_y - N daje veza e_x - e_y - $1/N$ (sl. 8a). Tačka granične nosivosti na zadatim ekscentricitetima se određuje kao tačka sekantne ravni određene sa tri tačke:

- tačka **A** ($0, 0, 1/N_{u0}$) - odgovara maksimalnoj sili za centrično opterećen presek,
- tačka **B** ($e_x, 0, 1/N_{ux}$) - odgovara maksimalnoj sili na ekscentricitetu \bar{e}_x , pri čemu je $e_y = 0$,
- tačka **C** ($0, e_y, 1/N_{uy}$) - odgovara maksimalnoj sili na ekscentricitetu \bar{e}_y , pri čemu je $e_x = 0$.

Greška koja se ovom aproksimacijom čini odgovara razlici položaja tačaka **D** (tačka na interakcionoj površini) i **D'** (tačka na sekantnoj ravni, koju određuje *Bresler*-ov kriterijum) na sl.8a. Iako je, zbog konveksnosti interakcione površi, prikazani trougao izvesno unutar interakcione površi, ovim nije obezbeđena konzervativnost postupka *a priori*. Treba primetiti da tačka sekantne ravni **D'** nije unutar trougla. Dobijena sekantna ravan određena trouglom **ABC** ostaje ravna i nakon njenog predstavljanja u koordinatnom sistemu M_x - M_y - N , sl. 8b. Naravno, četvorougao **ABCD'** se deformiše (više nije romboid), ali četiri transformisane tačke i dalje leže u istoj



Slika 8. „Metod recipročne sile“ predložen od strane *Bresler*-a, 1960. godine [8]

ravni. Ovim, učinjena transformacija interakcione površine nije bila neophodna, iako je prikaz postupka u transformisanom koordinatnom sistemu pregledniji.

Mane prezentovanog postupka su brojne:

- Postupkom se podrazumeva da su poprečni presek, raspored i količina armature poznate. U tom smislu, moguće ga je iskoristiti samo kao kontrolni kriterijum za proveru usvojenog načina armiranja i količine armature, a ne i za dimenzionisanje u užem smislu. Ovo je i razlog njegovog kombinovanja u praksi sa nekom od ranije pomenutih približnih metoda.

- Tačke **B** i **C** se određuju za jedan par ekscentriciteta aksijalne sile. Ovim, svakoj kombinaciji opterećenja odgovara nova ravan, čime postupak postaje i proračunski zahtevan.

- Samom postavkom postupka konzervativnost nije obezbeđena.

- Konačno, postupak je primenljiv samo u oblasti pritiska.

Metod horizontalnog preseka (load contour method)

Druga metoda predložena od strane *Bresler*-a bazira na konstrukciji dvodimenzionalnih dijagrama kao horizontalnih preseka interakcione površi. Ako su za jednu vrednost aksijalne sile poznate maksimalne vrednosti momenata savijanja koji odgovaraju problemima jednoosno savijanog preseka – $M_{ux}(N)$ i $M_{uy}(N)$ – aproksimativna kriva horizontalnog preseka je predložena u sledećem obliku:

$$\left(\frac{M_x}{M_{ux}(N)}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_y}{M_{uy}(N)}\right)^{\alpha_2} = 1 \quad (4)$$

gde su M_x i M_y projekcije graničnog momenta savijanja, koji, zajedno sa aksijalnom silom N , napadaju poprečni presek, a α_1 i α_2 eksponenti zavisni od intenziteta aksijalne sile.

Na osnovu sprovedenih samo preliminarnih ispitivanja (proračuna), usvajajući iste vrednosti za oba eksponenta, *Bresler* (1960) konstatuje da, za kvadratne i pravougaone simetrično armirane preseke, vrednost

ovih eksponenta varira u opsegu od 1.15 do 1.55. Na sl. 9a, varirana je vrednost ovih, međusobno jednakih, koeficijenata između 1 i 4. Istraživanja vezana za izraze kojima se određuju eksponenti α_1 i α_2 su brojna. Postavke su dali *Furlong* (1961) i *Parme* i ostali (1966) [2]. Za praktične proračune predlaže se usvajanje eksponenta 1.50 za pravougaone, odnosno između 1.50 i 2.0 za kvadratne. Treba primetiti da, osim od intenziteta aksijalne sile, oblik horizontalnog preseka interakcione površi, samim tim i koeficijenti α_1 i α_2 , u velikoj meri zavisi i od količine armature u poprečnom preseku, te od njenog rasporeda. Naime, veća količina armature teži da „ispravi“ liniju preseka, dok beton, sam, „daje“ zaobljenu krivu (sl. 10).

Jedan od predloga za izračunavanje vrednosti eksponenta je dat tzv. PCA, *Parme-Gouwens* (1966) metodom (PCA Load Contour Method) [6]. Ovim pristupom definisana je tačka na horizontalnom preseku interakcione površi za koju je odnos momenata M_y i M_x jednak odnosu (ρ) jednoaksijalnih nosivosti $M_{uy}(N)$ i $M_{ux}(N)$:

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{M_{uy}(N)}{M_{ux}(N)} = \rho \rightarrow$$

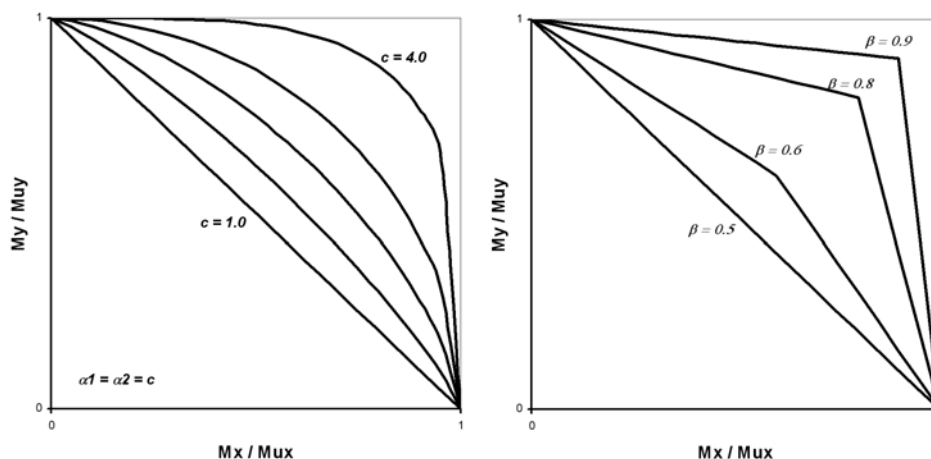
$$\rightarrow c = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\log 0.5}{\log \rho} \quad (5)$$

Pri tome odnos ρ zavisi od intenziteta aksijalne sile, može biti određen korišćenjem pomoćnih alata za jednoaksijalno savijane preseke, a uobičajeno se nalazi u granicama 0.55 do 0.70.

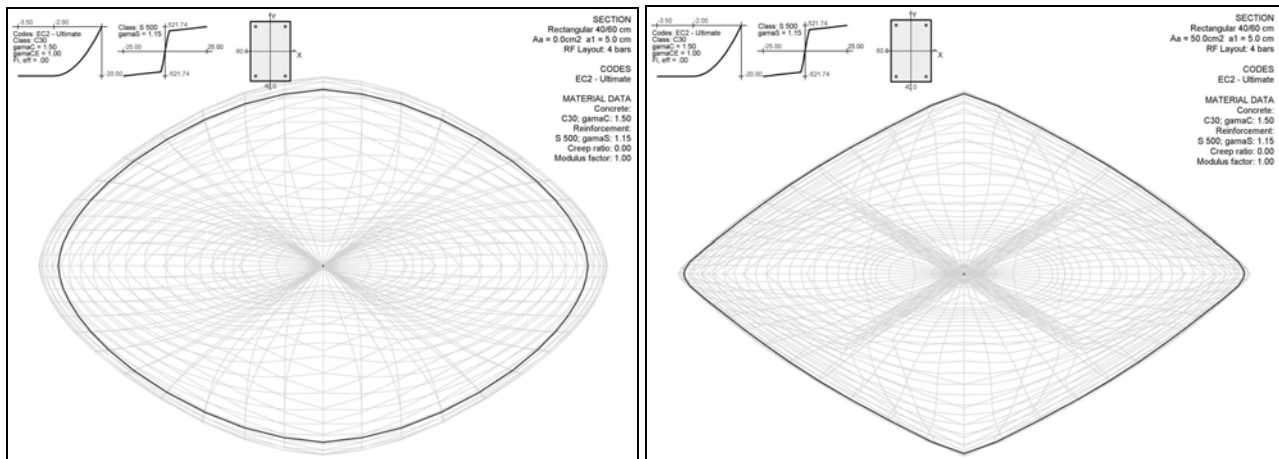
Ferguson i drugi (1988) i *McGregor* (1992) [8] predlažu modifikaciju prezentovane zavisnosti, u kojoj, umesto eksponenta, figurišu multiplikatori:

$$\frac{M_x}{M_{ux}(N)} + \frac{M_y}{M_{uy}(N)} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = 1$$

za $\frac{M_x}{M_{ux}(N)} \geq \frac{M_y}{M_{uy}(N)}$, odnosno (6)



Sika 9. Metod horizontalnog preseka predložen od strane *Bresler*-a i modifikovani metod horizontalnog preseka – *Ferguson*, *McGregor*



Slika 10. Oblici horizontalnih preseka interakcione površi za različite količine armature.

$$\frac{M_x}{M_{ux}(N)} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{M_y}{M_{uy}(N)} = 1 \text{ za}$$

$$\frac{M_x}{M_{ux}(N)} < \frac{M_y}{M_{uy}(N)} \quad (7)$$

pri čemu vrednost parametra β (između 0 i 1) zavisi od dimenzija poprečnog preseka, količine i rasporeda armature, te od konstitutivnih zakona za beton i čelik. Samo za vrednosti $\beta > 0.5$ dobijene krive su konveksne (sl. 9b). Geometrijski, jednačinama (6) i (7) se kriva horizontalnog preseka interakcione površi aproksimira bilinearnom krivom (sl. 9b).

Mane i ovog postupaka su očigledne i slične manama prethodnog:

- I kod ovog postupka se podrazumeva da su poprečni presek, raspored i količina armature poznati. U tom smislu, moguće ga je iskoristiti samo kao kontrolni kriterijum za proveru usvojenog načina armiranja i količine armature, a ne i za dimenzionisanje u užem smislu.

- Maksimalne vrednosti graničnih momenata savijanja za dva glavna pravca moraju biti određene ponovo za svaku vrednost aksijalne sile (za svaku kombinaciju opterećenja).

- Oblik krive horizontalnog preseka je bitno zavisn od načina izbora parametara postupka. Ovim je uslovljena i konzervativnost postupka.

U pokušaju da anulira neke od navedenih mana Hsu (1988) [2] predlaže modifikaciju postupka, aproksimaciju horizontalnog preseka jednom analitičkom krivom, pri čemu su eksponenti – koeficijenti oblika – konstantni – 1.5 za fleksione članove, a 1.0 za aksijalne:

$$\left(\frac{N_u - N_{lim}}{N_0 - N_{lim}} \right) + \left(\frac{M_{ux}}{M_{lim,x}} \right)^{1.5} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{lim,y}} \right)^{1.5} = 1 \quad (8)$$

gde je N_{lim} granična vrednost aksijalne sile koja odgovara balansiranom lomu, N_0 maksimalna granična vrednost aksijalne sile, koja odgovara centričnom

pritisku ili zatezanju, a $M_{lim,x}$ i $M_{lim,y}$ granične vrednosti momenata savijanja oko glavnih osa, koje odgovaraju balansiranom lomu. Očigledna prednost leži u činjenici da je izbegnuta potreba određivanja graničnih vrednosti momenata nosivosti u funkciji aksijalne sile. Dodatno, pretpostavljen je jednak oblik površi iznad i ispod N_{lim} , čime izraz može biti primenjen i u oblasti zatezanja. Ovaj predlog su kasnije modifikovali Munoz i Hsu (1997) [7], ukazujući da izbor vrednosti eksponenata od 1.5 nije uvek optimalan. Za utegnute elemente, oni predlažu aproksimaciju površi sledećim, znatno složenijim, izrazom:

$$\left[\left(\frac{M_{ux}}{M_{nb}} \cdot \gamma_1 \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{nb}} \cdot \gamma_2 \right)^{\alpha_1} \right]^{\frac{1}{\alpha_1}} + \left(\frac{N_u - N_{lim}}{N_0 - N_{lim}} \right)^{\alpha_2} = 1, \quad (9)$$

gde su koeficijenti γ_1 i γ_2 zavisni od intenziteta aksijalne sile N_u , a M_{nb} , α_1 i α_2 zavise od karakteristika poprečnog preseka.

Kombinovani postupak

Bonet i ostali [2] daju predlog u kojem, na izvestan način, sublimiraju prethodne koncepte aproksimacije interakcione površi. Predlaže se postupak analitičkog definisanja interakcione površi na bazi dva karakteristična horizontalna preseka: prvi odgovara nultoj aksijalnoj sili (presek kojim se odvaja pritisnuti i zategnuti deo površi), i drugi, kvazi horizontalan, odgovara promenljivoj aksijalnoj sili N_{max} , koja je za svaki napadni ugao određena maksimalnom vrednošću momenta savijanja. Naime, drugim presekom se odvaja rastući od opadajućeg dela interakcione površi. Iako je promenljiva sila N_{max} nešto veća od sile N_{lim} , koja odgovara simultanom lomu, vrednosti ove dve sile su vrlo bliske, te se može opravdanim smatrati njihovo izjednačavanje.

Ako su poznate vrednosti N_{lim} za svaki od pravaca ($N_{lim,x}$, $N_{lim,y}$), vrednost ove sile za neki napadni pravac α se smatra dovoljno tačnim odrediti pravilom linearne interpolacije:

$$N_{max}(\alpha) \approx N_{d2} = N_{lim,x} + \alpha \cdot \frac{N_{lim,y} - N_{lim,x}}{\pi/2}. \quad (10)$$

Za napadni pravac α , dobijaju se dve tačke (korišćene su oznake tačaka uticaja **S** i **T**) na ova dva preseka. Nominalna vrednost momenta savijanja koji odgovara napadnom pravcu α i nultoj aksijalnoj sili biće obeležena sa M_{d1} , a moment koji odgovara aksijalnoj sili $N_{d2}(\beta)$, na drugoj, kvazi horizontalnoj krivoj, sa M_{d2} . Tako, prva tačka ima koordinate $\mathbf{S}(M_{d1} \cdot \cos \alpha, M_{d1} \cdot \sin \alpha, 0)$, a druga $\mathbf{T}(M_{d2} \cdot \cos \alpha, M_{d2} \cdot \sin \alpha, N_{d2})$.

Korišćeni horizontalni preseki se mogu približno definisati na način kako je to pokazano kod metode horizontalnog preseka (4):

$$\left[\frac{M_{d1} \cdot \cos \alpha}{M_{d1,x}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{M_{d1} \cdot \sin \alpha}{M_{d1,y}} \right]^{\gamma_2} = 1, i$$

$$\left[\frac{M_{d2} \cdot \cos \alpha}{M_{d2,x}} \right]^{\eta_1} + \left[\frac{M_{d2} \cdot \sin \alpha}{M_{d2,y}} \right]^{\eta_2} = 1 \quad (11)$$

Za obostrano simetrično armirane poprečne preseke, bilo da je armatura grupisana u uglovima ili je armatura na neki način raspoređena po obimu preseka, opravdano je usvojiti jednake vrednosti eksponenata za oba pravca [2] na način kojim se uvodi uticaj čelika za armiranje (preko mehaničkog koeficijenta armiranja - ω):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -1.3 \cdot \omega + 2 \quad i$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = -0.22 \cdot \omega + 1.15.$$

Konačno, sada su za jedan napadni ugao poznate dve tačke zamenjujuće površi (**S** i **T**). Uz dve tačke koje

odgovaraju maksimalnoj i minimalnoj aksijalnoj sili (**U** i **V**), a koje je jednostavno odrediti, to su četiri tačke na vertikalnom preseku kroz interakcionu površ za zadati napadni ugao. Kroz ove četiri tačke provlači se zamenjujuća kriva data sa dva analitička izraza (posebno za rastuću i opadajuću granu):

$$\left(\frac{M_u - M_{d1} \cdot (1 - N_u / N_{ut})}{M_{d2} - M_{d1} \cdot (1 - N_{d2} / N_{ut})} \right) - \left(\frac{N_u - N_{ut}}{N_{d2} - N_{ut}} \right) \cdot \left(\frac{N_u}{N_{d2}} \right) = 0, i \quad (12)$$

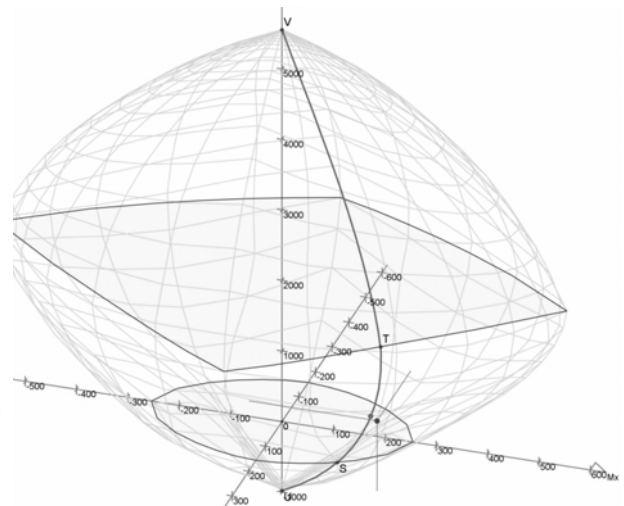
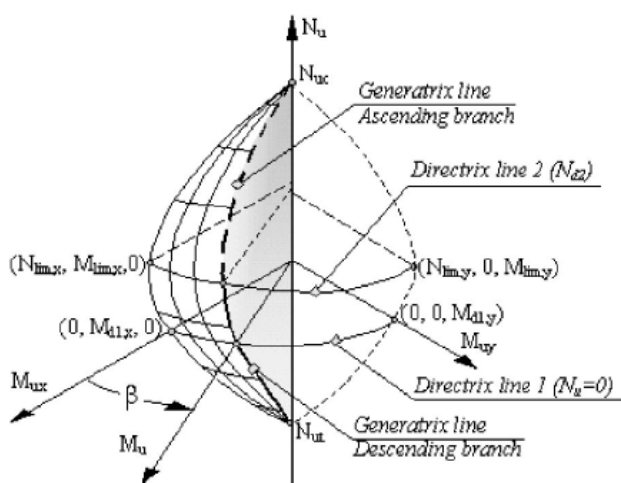
$$\left(\frac{N_{uc} - N_u}{N_{uc} - N_{d2}} \right)^{\xi} - \frac{M_u}{M_{d2}} = 0, \text{ gde je}$$

$$\xi = (0.8 \cdot \omega - 0.7) \cdot \left(\frac{N_{uc} - N_u}{N_{uc} - N_{lim}} \right) + 0.95. \quad (13)$$

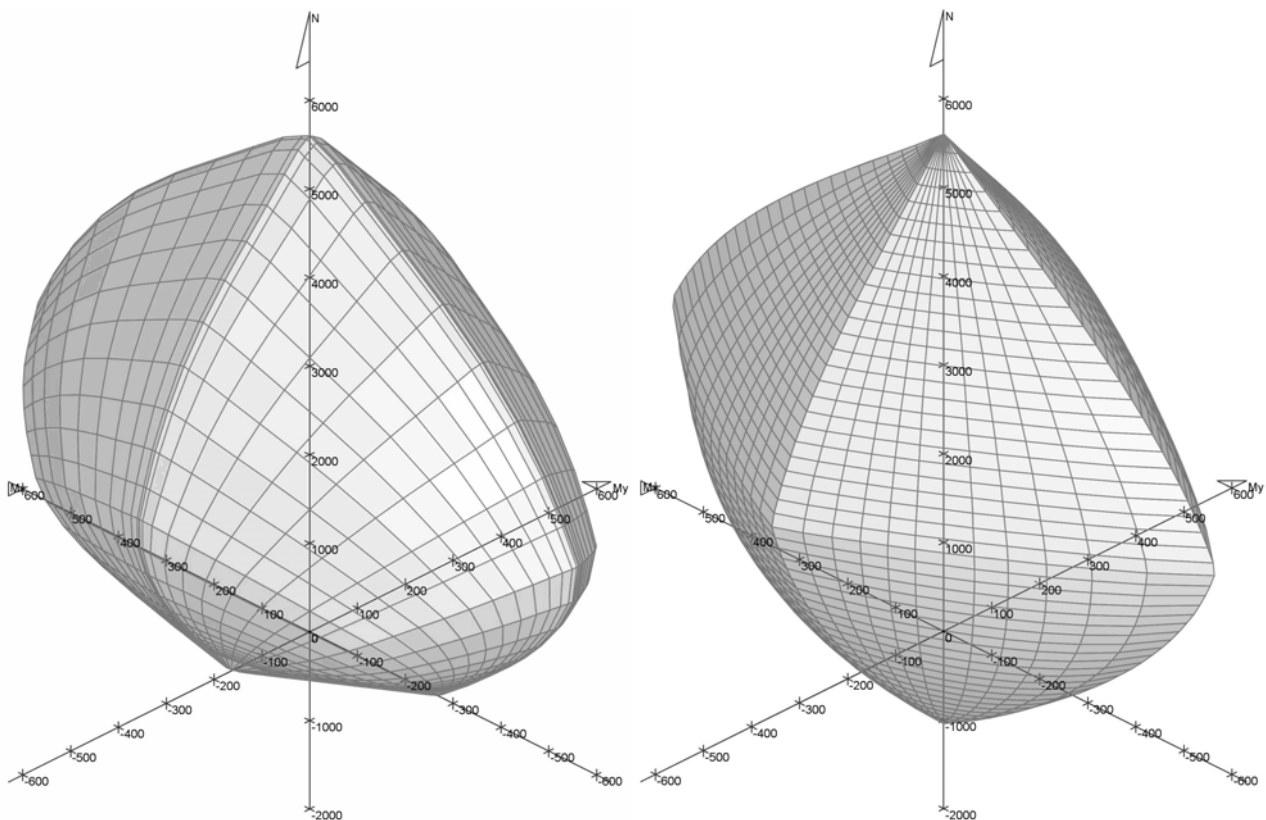
Variranjem napadnog ugla, na opisani način je moguće formirati zamenjujuću interakcionu površ.

Prikazani kombinovani postupak, kao i prethodno prikazani postupci, bazira na poznatim karakterističnim tačkama površi, koje odgovaraju slučajevima jednoosno savijanog preseka. Očigledna prednost ovog postupka je u činjenici da se na jedinstven način, nezavisno od spoljašnjih uticaja, analitički određuje zamenjujuća interakciona površ. Dodatno, postupak je definisan za ceo domen aksijalne sile, čime je „pokrivena“ i zona u kojoj je presek zategnut. Ipak, mora se primetiti da je postupak i dalje prilično komplikovan i zametan za praktičnu primenu.

Na sl. 12 su, ilustracije radi, prikazane aproksimativne interakcione površine dobijene primenom *Bresler*-ovog postupka recipročne sile i prikazanim kombinovanim postupkom.



Slika 11. Korišćene veličine u kombinovanom postupku [2]



Slika 12. Oblici aproksimativnih interakcionih površi prema Bresler-ovom i kombinovanom postupku

Komentar

Prikazano je nekoliko najčešće korišćenih približnih postupaka dimenzionisanja ili kontrole nosivosti koso svijanog poprečnog preseka. Postupci su, pri tome, klasifikovani saglasno načinu aproksimacije. Grafičkim metodama je moguće ostvariti visoku tačnost proračuna, a postupak dimenzionisanja ima shemu identičnu onoj za jednoosno savijane preseke. Međutim, uslov je postojanje biblioteka preseka interakcionih površi. Iako se njihovom bezdimenzionalnošću može problem generalisati da ne zavisi od npr. kvaliteta betona, broj varijabilnih parametara je i dalje velik, čime bi neka upotrebljiva biblioteka dijagrama sadržala na hiljade istih. Alternativa su odgovarajuće računarske procedure, no upitna je opravdanost korišćenja ovakvog rešenja za potrebe aproksimativnog rešenja.

Sa inženjerskog stanovišta su, svakako, najinteresantnije metode kojima se nastoji aproksimirati interakciona površ. Prikazani postupci recipročne sile i horizontalnog preseka (oba inicijalno postavljena od strane Bresler-a) su reprezentivi dva osnovna prilaza ovoj aproksimaciji.

Primenom metode recipročne sile stvarna interakciona površ se zamenjuje aproksimativnom površi vrlo sličnog oblika. Istina, zamenjujuća površ je definisana samo na strani pritiska po aksijalnoj sili, no ovo i jeste situacija koja je najčešće od interesa. Sam postupak je definisan relativno jednostavnim analitičkim izrazom, a treba primetiti da u praktičnim problemima ne postoji potreba za određivanjem kompletne površi (od

interesa su samo pojedine njene tačke). Ipak, primena metode u praksi nije jednostavna i brza. Naime, valja imati na umu da se zamenjujuća površ formira na kompletno poznatim interakcionim krivama za jednoosno savijane preseke (za svaku od glavnih osa), i da zamenjujuća površ ne figuriše u obliku analitički opisane površi, nego jednom paru projekcija ekscentriciteta odgovara jedna tačka zamenjujuće površi. Ovim se podrazumeva da je za svaki set uticaja potrebno odrediti tri karakteristične tačke na poznatim interakcionim krivama, a zatim, na osnovu njih, odrediti tačku zamenjujuće površi. U situacijama (vrlo česte u praksi) kada se stub dimenzioniše na veliki broj kombinacija opterećenja, ovakav pristup može biti vrlo zametan. Dodatno, tačke zamenjujuće površi ne mogu biti povezane po kriterijumu jednakog stanja dilatacija ili jednakog ugla savijanja (metoda se nikako ne vezuje za ove veličine), kao što je to slučaj sa tačkama stvarne interakcione površi. Iako za sam proces dimenzionisanja ovo nije presudno, ovakve informacije se u inženjerskim proračunima smatraju poželjnim. Konačno, metoda postaje bar za red veličine zametnija za primenu ukoliko se pokuša iskoristiti za određivanje potrebne količine armature, umesto za kontrolu dovoljnosti postojeće, pretpostavljene ili na neki drugi aproksimativni način određene.

Metodom horizontalnog preseka se nastoji što preciznije analitički opisati horizontalni presek bezdimenzionalne interakcione površi na nekom nivou aksijalne sile, pri čemu se nosivosti u dva glavna pravca normiraju na jednake vrednosti. Jasno je da se

pogodnim izborom analitičkog oblika funkcije može postići visok stepen poklapanja sa stvarnom krivom preseka. Međutim, broj parametara kojima je ovaj oblik definisan je, i ovde, velik. Predlozima za usvajanje vrednosti pojedinih parametara se, uvek, nastoji obezbediti konzervativnost postupka. Pokazano je da postupci kojima se obuhvata i uticaj količine čelika za armiranje moraju biti favorizovani. Primena postupka, opet nije jednostavna, i slične je složenosti kao i prethodni postupak. Svakom nivou aksijalne sile odgovara novi horizontalni presek, čime je, u najmanju ruku, promenjen način relativizacije momenata savijanja.

Konačno, prezentovani *kombinovani postupak* sublimira dva prethodna pristupa. Njegova primena nije vezana za konkretne uticaje, štu u situacijama velikog broja kombinacija opterećenja predstavlja prednost. Rezultujući oblik interakcione površi je sličan stvarnom, no očigledna je i želja za obezbeđenjem konzervativnosti postupka – relativno linearni horizontalni preseki. I ovaj postupak je sličnog, možda i većeg, stepena složenosti kad je o praktičnoj primeni reč.

5. ZAKLJUČAK

Problem računskog utvrđivanja konačnog stanja naprezanja koso savijanog preseka je zavisano od velikog broja parametara, i samim tim kompleksan. Otud se ni jednostavni aproksimativni postupci ne mogu očekivati. Prikazanim algoritamskim rešenjem problem se rešava brzo na nivou poprečnog preseka i, danas je opravdano očekivati da su koso savijani preseki proračunati korišćenjem ovakve ili slične programske procedure.

REZIME

PRORAČUN KOSO SAVIJANIH AB PRESEKA

Zoran BRUJIĆ

Radom se analiziraju metode i postupci proračuna koso savijanih armiranobetonskih preseka.

Dat je opis opšteg algoritamskog rešenja problema, kojim se rešava problem određivanja potrebne količine armature u presek. Tačnost rezultata ovog pristupa je ograničena tačnošću postavljenih osnovnih proračunskih hipoteza, te postavljenim tolerancijama. Prikazano rešenje se odlikuje maksimalnom brzinom proračuna, ali i većim brojem mogućih proračunskih singulariteta. Zato je posebno istaknut način rešavanja potencijalnih kritičnih mesta u proračunu.

Kako i savremena inženjerska praksa za proračun koso savijanih preseka koristi aproksimativne metode, to je u radu data klasifikacija postupaka proračuna i opisani su najčešće korišćeni postupci. Posebna pažnja posvećena je metodama kojima se aproksimira interakciona površ preseka. Većina opisanih postupaka namenjena je kontroli postojeće/usvojene armature. Postupci su analizirani sa stanovišta jednostavnosti praktične primene, kao i mogućnosti primene u situacijama određivanja potrebne količine armature.

Ključne reči: koso savijanje, interakciona površ, algoritamsko rešenje, aproksimativna rešenja

6. LITERATURA

- [1] Beton i armirani beton, prema BAB 87 – 2. Prilozi, Građevinska knjiga, Beograd, 1991, 702 str.
- [2] Bonet, J. L., Miguel, P. F., Fernandez, M. A., Romero, M. L. [2004]: Analytical Approach to Failure Surfaces in Reinforced Concrete Sections Subjected to Axial Loads and Biaxial Bending, Journal of Structural Engineering, December 2004, pages 2006 – 2015.
- [3] Brujić, Z. [2004]: Algoritamsko rešenje proračuna AB preseka napregnutih na koso savijanje, JDGK Simpozijum 04, Vrnjačka Banja, 29.09. – 01.10. 2004., Zbornik radova, Knjiga 2, str. 381-386.
- [4] CEB-FIP [1973]: Buckling Manual, Bulletin D'Information No. 93, Londres, Octobre 1973, 190 pages.
- [5] CEN [2004]: Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules For Buildings, EN 1992-1, European Committee for Standardization, CEN, Brussels, English version, December 2004, 225 pages.
- [6] Fanella, D. A., Rabbat, B. G. (editors) [2002]: PCA Notes on ACI 318-02 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications, Portland Cement Association, 2002, USA, 967 pages.
- [7] Munoz, R., Hsu, T. C. [1997]: Biaxially Loaded Concrete Encased Composite Columns: Design Equation, Journal Of Structural Engineering, December 1997, pages 1576 – 1585.
- [8] Silva, M. A., Swan, C. C., Arora, J. S., Brasil, R. [2001]: Failure Criterion For Rc Members Under Biaxial Bending and Axial Load, Journal of Structural Engineering, August 2001, pages 922–929.

SUMMARY:

DESIGN OF BIAXIALLY BENDED RC SECTIONS

Zoran BRUJIĆ

Methods and calculation procedures dealing with design of biaxial bended RC cross-sections are given in the paper.

General algorithmic solution, which can be used to determine necessary amount of reinforcement in the section is given. Its accuracy is limited only by approximations in basic design hypothesis and by adopted calculation tolerances. Given solution is characterized with maximal calculation speed, but with few possible calculation singularities, as well. Therefore, all critical points within the procedure are especially analyzed.

The use of approximate procedures of design of biaxial bended sections is still actual in practice. Therefore, the classification of methods and description of most frequently used procedures are given. Close attention is given to the methods that approximate failure surfaces. Most of described procedures are used to check if adopted/existing reinforcement amount in the section could resist exterior loads. Simplicity of use in everyday practice and the possibility of using when amount of reinforcement is not known are analyzed for each method.

Key words: biaxial bending, failure surface, algorithmic solution, approximate solutions