Letopis naučnih radova
Godina 28 (2004), broj 1, strana 68–73

UDK: 514:512.534

Originalni naučni rad
Original scientific paper

NEKI NOVI 2-DIZAJNI

Snežana Matić-Kekić[1], Mudrinski V.[2]

REZIME

Grupa automorfizma, koja je korištena za generisanje dizajna, je oblika „wreath” proizvoda, G # H, gde je G podgrupa reda 3 projektivne grupe PSL(2,2), a H je normalizator Klajnove podgrupe grupe PSL(2,7). Normalizator H ima 24 elementa.
Pronađeni su sledeći 2-dizajni: 2-(24, 4,3·s) za s iz skupa {27,33,38} i 2-(24, 5,20·s) za s koje pripada skupu {23, 27, 38}. Prema našem saznanju, od ovih 6 dizajna, 5 su novi. Poznat je bio dizajn 2-(24,4,99).

Ključne reči: dizajn, grupa, automorfizam

UVODNI POJMOVI I MOTIVACIJA

Kolekcija B, k-točlanih podskupova, koje zovemo blokovi, skupa S_v sa v elemenata, koji zadovoljavaju osobinu da se svaki t-točlani podskup skupa S_v nalazi u tačno λ blokova iz kolekcije B, je dizajn (ili blok-šema) sa parametrima k,v,t,λ ($t<k<v$), koje zapisujemo na sledeći način t-(v,k,λ). U tom slučaju kažemo da je dizajn B tipa t-(v,k,λ), ili t-dizajn.

Primer 1. Kolekcija troelementnih blokova B=(b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10), datih u tabeli 1, nad skupom S_5 = {1,2,3,4,5} je takozvani trivijalan dizajn sa parametrima 2-(5,3,3).

b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
2	2	2	3	3	4	3	3	4	4
3	4	5	4	5	5	4	5	5	5

Tabela 1. Blokovi trivijalnog dizajna – Table 1. Trivial design

1 dr Snežana Matić-Kekić, vanr. prof. Poljoprivrednog fakulteta, Novi Sad
2 dr Vojislav Mudrinski, docent Tehnološkog fakulteta, Novi Sad

Zaista, svaki dvočlani poskup skupa {1,2,3,4,5} se nalazi u tačno 3 bloka, tako se dvočlani podskup {1,2} nalazi u b1,b2 i b3, … {1,4} u b2, b4 i b6, … dok je poslednji deseti dvočlani podskup {4,5} u blokovima b6,b9 i b10. Ovaj 2 dizajn je trivijalan jer su za blokove izabrani svi Tročlani podskupovi skupa S_5. Netrivijalni dizajni koji su interesatni za konstruisanje imaju za blokove pravi podskup skupa svih k-točlanih podskupova skupa S_v.

Primer 2. Sledeća kolekcija 3-članih blokova nad skupom S_7 ={1,2,3,4,5,6,7}, data u tabeli 2, je netrivijalan (izabrano je 7 od ukupno 35 3-članih podskupova skupa S_7), poznat dizajn, tipa 2-(7,3,1):

b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	7	6	6	7

Tabela 2. Dizajn tipa 2-(7,3,1) – Table 2. Well-known 2-(7,3,1) design

Svaki 2-dizajn je ujedno i 1-dizajn. Tako, u prvom primeru dizajn 2-(5,3,3), je ujedno i 1-(5,3,6) dizajn, dok je u drugom primeru dizajn 2-(7,3,1), ujedno i dizajn tipa 1-(7,3,3). Odnosno, svaki elemenat od 1 do 5 se u prvom primeru pojavljuje u tačno 6 blokova, dok se u drugom primeru, svaki element od 1 do 7 pojavljuje u tačno 3 bloka. Kako uopšteno važi da je svaki t-(v,k,λ) dizajn ujedno i s-(v,k,λs) dizajn, za svaki prirodan broj $s < t$. Štaviše, λs, broj pojavljivanja s-točlanih podskupova u blokovima, može tačno da se izračuna ako su poznate vrednosti t,v,k,λ i s po formuli

$$\lambda s = (k-t)!\cdot(v-s)!\cdot\lambda \,/\, ((k-s)!\cdot(v-t)!) \qquad (1)$$

Stoga, tip dizajna, t-(v,k,λ), zapisujemo sa maksimalnim mogućim parametrom t. Trivijalan dizajn iz prvog primera bi imao tip 3-(5,3,1), jer je maksimalna vrednost parametra t jednaka 3.

U nastavku kad kažemo dizajn podrazumevamo netrivijalan dizajn.

Broj blokova nekog t-(v,k,λ) dizajna nije parametar koji se posebno naglašava, jer je posledica poznavanja preostalih parametara. Preciznije, ako broj blokova označimo sa b, možemo ga izračunati na sledeći način:

$$b = \binom{v}{t}\cdot\lambda \Big/ \binom{k}{t} \qquad (2)$$

Svaki t-(v,k,λ) dizajn sa kolekcijom blokova B, ima svoj „komplementarni" dizajn t-(v,k,λ^C) koji bi sadržao sve preostale k-točlane podskupove skupa S_v, koji nisu u B, pri čemu važi da je

$$\lambda + \lambda^C = \binom{v}{k}\cdot\binom{k}{t} \qquad (3)$$

Veza (2) je posledica činjenice da bi unijom ovakva dva međusobno komplementarna dizajna dobili trivijalan dizajn sa $\binom{v}{k}$ blokova, u svakom od kojih ima $\binom{k}{t}$, t-točlanih podskupova. Stoga se jedino traže novi t-(v,k,λ) dizajni čiji parametar λ ne prelazi polovinu od broja $\binom{v}{k}\cdot\binom{k}{t}$.

PRIMENA DIZAJNA (DEGUSTACIJA VINA)

Primene dizajna su veoma raznolike. U statistici se t-dizajni koriste za planiranje organizacije eksperimenata, dok se u elektrotehnici dizajni koriste za konstruisanje kodova koji ispravljaju greške – šumove. Sledi primer primene dizajna u planiranju eksperimenta – degustacije vina.

Dizajn tipa 2-(7,3,1), zadat njegovim blokovima u prethodnoj tabeli, može da se koristi u degustaciji vina na sledeći način: Neka je potrebno ispitati 7 vrsti vina, koja su označena brojevima od 1 do 7. Neka na raspolaganju imamo 7 stručnjaka-degustatora. Ako degustatorima redom pridružimo po jedan od blokova b1, ...,b7 iz prethodne tabele, svaki degustator će isprobati 3 vina, svako vino će biti degustirano od strane troje stručnjaka, a svaki par vina će biti ispitan od strane jednog degustatora. Odnosno za dizajn tipa t-(v,k,λ) parametri u odgovarajućoj degustaciji vina su:

v – broj različitih vina,
k – broj vina koje proba jedan degustator (težimo što manjem k zbog kompetentnosti degustatora),
λ – broj degustatora koji upoređuju t vina.

Kako bilo kojih s vina, s = 1, 2, ... t upoređuje isti broj, λ_s degustatora (1), obezbeđen je ravnopravan tretman svih vina.

ALGEBARSKA OSNOVA ZA KONSTRUKCIJU NOVIH DIZAJNA

Neka su date dve grupe G i H čiji nosači su redom označeni sa G i H. „Wreath" proizvod, G#H je grupa koja ima nosač G×H, i koja deluje na sledeći način:

$$(i,j)(f,h) = (i^{f(j)}, j^{h}), \tag{4}$$

gde je h iz H, f je preslikavanje skupa H u G, i pripada G, j pripada H, a (f,h) je iz G#H.

Za grupu G smo izabrali podgrupu reda 3 projektivne grupe PSL(2,2), a grupa H je konstruisana kao normalizator Klajnove podgrupe grupe PSL(2,7).

Kako se zna da grupa PSL(2,2), deluje 2 tranzitivno na projektivnoj pravoj G reda 2, i da je izomorfna grupi GL(2,2), svih regularnih matrica tipa 2×2 nad poljem GF(2), na taj način je i generisana. Njeni elementi su matrice:

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}$$

Slično, smo grupu GF(2,7) predstavili kao grupu svih regularnih matrica tipa 2×2 nad poljem GF(7).

Grupa PSL(2,2) je takođe izomorfna sa grupom simetrija S3, pa je za grupu G izabrana njena alternativna podgrupa A3. Normalizator, H, Klajnove podgrupe, grupe PSL(2,7) je poznat (Huppert, 1967) i reda je 24.

k-orbite neke grupe na nosaču sa v elemenata, predstavljaju razbijanje svih k-točlanih podskupova nosača, na one k-točlane podskupove, koji su zatvoreni pod dejstom grupe. Dakle, grupa deluje kao grupa automorfizma i ona je podgrupa cele grupe automorfizma.

Matrica incidencije, između k-orbita i t-orbita, u oznaci $\Lambda_v(t,k)[i,j]$, predstavlja broj pojavljivanja elemenata i-te t-orbite u svim elementima j-te k-orbite. Taj broj je za fiksiranu t-orbitu i fiksiranu k-orbitu konstantan, zbog dejstva grupe.

Kramer-Mesnerova metoda (Kramer, 1976) predlaže traženje dizajna kao uniju orbita neke grupe. Na osnovu matrice incidencije $\Lambda_v(t,k)$, traže se poskupovi onih k-orbita, čiji zbirovi vrednosti iz matrice $\Lambda_v(t,k)$ za svaku t-orbitu su konstantni. Znači, ako u matrici incidencije (videti, npr. tabelu 3), k-orbite pridružimo kolonama, a t-orbite vrstama, tražimo kolone čiji je zbir $\Lambda_v(t,k)[i,j]$ po svim vrstama, konstantan. Ta konstanta je jednaka odgovarajućem parametru λ, za t-(v,k,λ) dizajn, čiji blokovi su jednaki uniji nađenih k-orbita. Grupa PSL(2,2)#PSL(2,7) je reda $6^8\cdot168$, i njeno generisanje računarom ne predstavlja problem. Međutim grupa PSL(2,2)#PSL(2,7) uz korišćenje Kramer-Mesnerovog metoda nije dala dizajne. Koristeći rezultate (Acketa, Mudrinski, 1996) da se orbite pod dejstvom neke grupe particioniraju na orbite pod dejstvom njene podgrupe, istraživanja su usmerena na dejstvo podgrupe grupe PSL(2,2)#PSL(2,7), odnosno grupe G#H. Motivacija za izbor grupe, koja je oblika „wreath" proizvoda, je veoma bogata kolekcija generisnih novih 2-dizajna (Acketa, Mudrinski, Matić-Kekić, 2000), dejstvom grupe G#H1, gde je grupa H1 bila tranzitivna podrupa reda 21 grupe PSL(3,2).

2-DIZAJNI NA SKUPU OD 24 ELEMENTA

Računarom su izgenerisane sve k-orbite grupe G#H, za $k<13$. Ispostavilo se, da su se svi dvočlani podskupovi nosača (ima ih 276), razbili na 4 2-orbite, 212520 četvoročlanih podskupova su razbijeni na 20 4-orbita, a 807576 petočlanih podskupova su podeljeni u 33 5-orbita.

Unijom izabranih 4-orbita grupe G#H, generisani su dizajni tipa 2-$(24,4,\lambda)$ za $\lambda\in\{81,99,114\}$. U tabeli 4. su dati u drugoj vrsti redni brojevi izabranih 4-orbita za odgovarajuće vrednosti parametra λ. Od generisana tri dizajna tipa 2-$(24,4,\lambda)$, ustanovljeno je da je poznat 2-(24,4,99), na osnovu preglednog rada o svim nađenim dizajnima do 30 elemenata (Chee, Colbourn, Kreher, 1990).

U tabeli 3 je data matrica incidencije $\Lambda_{24}(2,4)$, za 2-orbite i 4-orbite grupe G#H. Prva vrsta sadrži redne brojeve 4-orbita. U drugoj vrsti su redom dati brojevi pojavljivanja elemenata prve 2-orbite u svih dvadeset 4-orbita, ...u poslednjoj vrsti su vrednosti $\Lambda_{24}(2,4)$ za četvrtu 2-orbitu.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
36	27	9	27	12	12	6	18	18	18	24	18	4	2	0	0	0	0	0	0
54	18	9	18	12	6	12	9	18	12	6	12	0	0	9	30	4	2	0	0
54	27	27	27	18	36	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2
0	0	0	0	27	27	27	0	0	27	27	27	9	9	0	27	9	9	3	3

Tabela 3. Matrica incidencije $\Lambda_{24}(2,4)$ – Table 3. The matrix $\Lambda_{24}(2,4)$

λ = 81(6)	λ = 99(6)	λ = 114(18)
2 5 7 9 10 15	1 3 5 10 11 17 18	1 5 7 9 11 12 19 20

Tabela 4. Redni brojevi 4-orbita, čija unija daje dizajn
Table 4. Ordinary numbers of colummns of the matrix for found parameters

Primedba. Čak bi i dizajn 2-(24,4,81), sa najmanje blokova, bio preglomazan za eksplicitno ispisivanje svih njegovih blokova. Broj njegovih blokova po formuli (2) je 3726. Inače, broj svih 4-članih podskupova, na skupu od 24 elementa je 212520 i oni su particionirani grupom G#H u 20 4-orbita.

Grupa G#H je dala i 2-(24,5,λ) dizajne, za λ iz skupa {460,540,760}, čiji blokovi su unija onih 5-orbita čiji su redni brojevi dati u tabeli 6. Ukupan broj 5-orbita za razmatranu grupu je 33. U tabeli 5 su navedeni podaci o broju pojavljivanja svakog elementa neke od 4 2-orbita u elementima 5-orbita.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11.	12.	13.	14.	15.	16.
270	216	54	54	72	36	54	90	72	54	90	72	24	12	6	12
216	216	108	90	54	90	90	54	54	54	54	54	12	24	6	12
162	324	54	54	108	108	54	54	108	162	54	108	36	36	6	72
0	0	0	81	81	81	81	81	81	81	81	81	54	54	27	54

17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.
6	2	108	72	36	36	24	8	36	12	8	4	0	0	0	0	0
2	6	54	90	18	12	24	6	12	2	6	0	54	48	14	4	0
18	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
27	27	81	81	27	54	54	27	54	27	27	12	27	54	27	12	4

Tabela 5. Matrica incidencije 2-orbita i 5-orbita – Table 5. The matrix $\Lambda_{24}(2,5)$

λ = 460(51)	λ = 540(283)	λ = 760(1265)
1 4 5 13 15 16 17 26 28 30 31 32 33	3 8 9 10 11 12 20 21 29	2 7 10 11 12 14 18 19 20 21 23 26 27 29 31 33

Tabela 6. Redni brojevi uniranih 5-orbita
Table 6. Ordinary numbers of colummns of the matrix for found parameters

Dizajna tipa 2-(24,3,λ) i 2-(24,k,λ), za k = 6,7,8,... 12, sa ovom grupom automorfizama, nije bilo. Zbog kompletnosti istraživanja nađeni 2-dizajni su svi koji se mogu dobiti sa grupom automorfizama G#H.

ZAKLJUČAK

Kramer-Mesnerov metod za generisanje dizajna je i ovog puta dao rezultate, nove dizajne. Mada, izabrana grupa nije bila bogata novim dizajnima, za razliku od grupe koju smo koristili u (Acketa, Mudrinski, Matić-Kekić, 2000). Metod se ne bi mogao, zbog velike složenosti strukture, primeniti bez pomoći računara.

Napomena: Rad je finansiran sa projekta tehnološkog razvoja – oblast biotehnologije broj 06889 i projekta 006832 Ministarstva nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije.

LITERATURA

1. Acketa, D.M., Mudrinski, V.: Two 5-designs on 32 points, Discrete Math., 163 (1997), 209–210.
2. Acketa, D.M., Mudrinski, V.: A family of 4-designs on 26 points, Comment. Math. Univ. Carolinae 37,4 (1996), 843–860.
3. Acketa, D.M., Mudrinski, V.: A family of 4-designs on 38 points, Ars Combinatoria.
4. Acketa, D.M., Mudrinski, V., Snežana Matić-Kekić: A large collection of designs from a wreath product on 21 points, Ars Combinatoria, 54 (2000), pp 109–118
5. Alltop, W.O.: Extending t-designs, Jour. of Comb. Theory (A) 18(1975), 177–186.
6. Chee, Y. M., Colbourn, C.J., Kreher, D.L.: Simple t-designs with $v \leq 30$, Ars Combinatoria, Vol. 29, (1990), 193–258.
7. Huppert, B.: Endliche Gruppen, I.: Die Grundlehren der matematischen Wissenschaften, Band 134 (1967), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, xii+793 pp.
8. Kramer, E.S., Mesner, D.M.: t-designs on hypergraphs, Discrete Math. 15(1976), 263–296.
9. Kramer, E.S.: t-designs using $M_{21} = PSL_3(4)$, Ars Combinatoria, Vol. 17, (1984), 191–208.

SOME NEW 2-DESIGNS

by
Snežana Matić-Kekić, Mudrinski V.

SUMMARY

As a group of automorpism we use the wreath product G # H, where G denotes the subgroup of order 3 of PSL(2,2) and H constructed as a normalizer of the Klein subgroup of PSL(2,7). Normalizer H has the cardinality 24.

It has been found 2-(24, 4,3·s) designs for s in the set {27,33,38} and 2-(24, 5,20·s) designs for s in the set {23, 27, 38}. Up to our knowledge, 5 of 6 of these found designs are new.

Key words: designs, group, automorphism

Primljeno: 11. 03. 2005.
Prihvaćeno: 20. 03. 2005.
Recenzent: Prof. dr Olga Bodroža-Pantić, PMF