Letopis naučnih radova
Godina 32 (2008), broj I, strana 27-34

UDK: 531.73 :630*53 :502

Originalni naučni rad
Original scientific paper

ODREĐIVANJE ZAPREMINE KROŠNJI PIRAMIDALNOG, KUPASTOG, ELIPSOIDNOG I SFERNOG OBLIKA U PRIRODI

Snežana Matić-Kekić[∞]

REZIME

Dati su postupci koji ne narušavaju okolinu a sadrže što manji broj merenja i računskih operacija, kao i odgovarajuće pojednostavljene formule za određivanje zapremine krošnji piramidalnog, kupastog, elipsoidnog i sfernog oblika u prirodi. Upoređene su formule dobijene vektorskim i euklidsko-trigonometrijskim pristupom i utvrđena je superiornost (očekivana) vektorskog pristupa.

Ključne reči: nagib terena, nagib stabla, efikasan metod merenja, ekološki pristup

UVOD I METODE

Oblici krošnji u prirodi su vrlo raznolikog i često vrlo nepravilnog oblika, čak i na parkovskim održavanim površinama, ukoliko krošnje nisu oblikovane redovnim orezivanjem. S drvoredima je ista priča. Ipak, ukoliko krošnje mogu da se aproksimiraju sfernim, elipsoidnim, kupastim ili piramidalnim oblikom njihovu zapreminu moguće je odrediti alatom koji ne narušava prirodno okruženje. Dodatni podaci kao što su: broj i veličina listova u m^3 zapremine, doba godine, sorta… omogućili bi izračunavanje doprinosa nekog drvoreda ili parka u produkciji kiseonika i apsorpciji ugljen-dioksida neke urbane sredine. Ako se ovim podacima dodaju i podaci tipa broj stanovnika, gustina saobraćaja, demografski podaci… preciznije planiranje novih zelenih površina bilo bi moguće.

U radu je korišten matrični račun Matić-Kekić (2002) i elementi analitičke i euklidske geometrije Acketa i Matić-Kekić (2000).

[∞] dr Snežana Matić-Kekić, vanredni profesor, Departman za Poljoprivrednu tehniku, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, snmk@polj.ns.ac.yu

REZULTATI

Ugao padanja sunčevih zraka α na tangentu u stojištu

Iako postoje ispravljene tablice Matić-Kekić (2006) za ugao deklinacije Sunca (ugao δ pod kojim sunčevi zraci u podne padaju na Ekvator) i formula za isti:

$\delta(t) = 23{,}4 \cdot \cos(2 \cdot \pi\, t : 365{,}25 :),$ (1)

dok t pripada $[-182, 182]$,

pod pretpostavkom da je jedinica za vreme t, jedan dan, i da se razmatra period od jedne ne prestupne godine. Za prestupnu godinu, t pripada intervalu $[-183, 182]$. Kada t uzima celobrojne vrednosti dobijaju se dani u godini. Tako, npr., vrednosti $t = 0$, odgovara 21. junu,♦ vrednosti $t = -20$, 1. junu, $t = 91$, 23. septembru, itd.

Iako je takođe poznata veza između ugla geografske širine koji se standardno obeležava sa φ i ugla deklinacije δ koja nam daje ugao padanja sunčevih zraka na tangentu u stojištu označen sa α na slici 1:

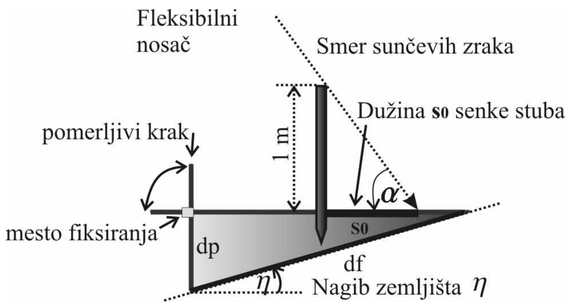
$$\alpha = 90^o - \varphi + \delta, \qquad (2)$$

i postoji tabela u radu Matić-Kekić (2006) izračunatih vrednosti ugla α za područje Novog Sada u periodu od 1. juna do 15. oktobra, u praksi nam najčešće treba neki drugi deo dana (ne podne), neka druga geografska širina i neko drugo doba godine, što znači da nema smisla koristiti nikakve tablice već se mora koristiti ili sledeća formula:

$$\alpha = 90^o - \varphi + 23{,}4 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t : 365{,}25) \pm \kappa, \qquad (3)$$

dok t pripada $[-182, 182]$, i $t = 0$ za 21. jun, φ je geografska širina, a κ je korekcija ugla α u odnosu na podne (približno $+15^o$ za svaki h posle i -15^o za svaki h pre podne).

Drugi, praktičniji, način za određivanje ugla α i ugla nagiba terena η (sl. 1) koji ne zahteva nikakva izračunavanja niti poznavanje vrednosti geografske širine i korekcionog ugla κ već samo podrazumeva egzistenciju jednostavne opreme, koja je nazvana fleksibilni nosač, koju je lako napraviti i još lakše koristiti na bilo kakvom mestu u prirodi.



Slika 1. *Ugao padanja sunčevih zraka α na horizontalnicu i ugao nagiba zemljišta η*
Figure 1. *Angle α of the slope of Sun rays to the horisontal axis and angle η of the slope of the ground*

Oprema podrazumeva štap dužine 1 m učvršćen pod pravim uglom na fleksibilan nosač prikazan na slici 1, čiji jedan krak (krak na koji pada senka štapa) je pomerljiv. Kada se pomerljivi krak fiksira za drugi krak koji je uvek paralelan sa štapom njegov pravac se poklapa sa pravcem tangente (horizontalnica) na stojište štapa. Na drugom kraku su ugravirane vrednosti ugla nagiba terena η, i posle fiksiranja pomerljivog kraka za njega samo se očita ugao nagiba terena η. Treći krak je takođe fiksiran i stabilan na podlozi. Njegova dužina df mora biti dovoljno velika da senka štapa u ranim prepodnevnim ili kasnim poslepodnevnim satima ne bi pala van pomerljivog kraka. Na pomerljivom kraku su ugravirane vrednosti ugla α. Vrednost ugla α zavisi od dužine senke štapa i očitava se na kraju senke štapa so. Određivanje mesta graviranja odgovarajućih vrednosti ugla α i vrednosti ugla nagiba terena η dobijaju se iz veza:

$$\alpha = \mathrm{ctg}^{-1}\ \mathrm{so}\ \text{ i }\ \eta = \sin^{-1} (\mathrm{dp:df}), \tag{4}$$

gde je dp dužina na nepomerljivom kraku od mesta fiksiranja sa pomerljivim krakom, a df je fiksna dužina kraka (hipotenuze pravouglog trougla koga grade kraci fleksibilnog nosača) na podlozi. Da li smo precizno fiksirali pomerljivi krak za dugi krak proverava se viskom (ili libelom) da li je štap ortogonalan na horizontalnicu.

U daljem tekstu se podrazumeva da su ugao padanja sunčevih zraka α na horizontalnicu i ugao nagiba zemljišta η određeni.

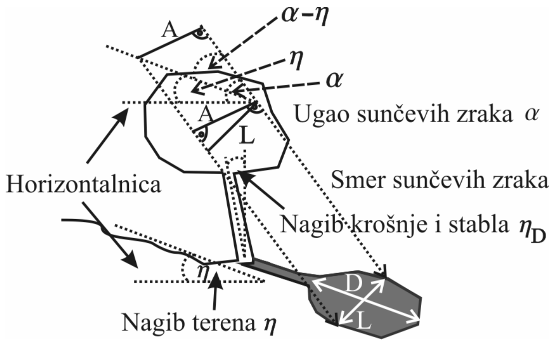
Sferna i elipsoidna krošnja

Neka su na terenu izmerene dužina D i širina L senke krošnje (sl. 2) koja može biti aproksimirana sfernim odnosno elipsoidnim oblikom tada se zapremina krošnje sfernog oblika Vs, odnosno zapremina krošnje elipsoidnog oblika Ve računa iz izraza:

$$Vs = 4/3\ \pi\ R^3, \qquad R= (D/4 + L/4) \sin (\alpha-\eta), \tag{5}$$

$$Ve = 4/3\ \pi\ ABC, \qquad A= D/2 \sin (\alpha-\eta),\ B= L/2 \sin (\alpha-\eta), \tag{6}$$

gde je R poluprečnik sferne krošnje, a A i B su dve poluose elipsoidne krošnje dok treća poluosa elipsoidne krošnje C, koja je u pravcu padanja sunčevih zraka, te se ne može meriti na senci krošnje, mora da se pažljivo izmeri na terenu ispod same krošnje uz proveru da je metar u horizontalnom položaju ako nema nagiba stabla i krošnje drveta. Ugao nagiba stabla i krošnje drveta η_D ne utiče na poluprečnik sferne krošnje, niti na određivanje stvarnih veličina osa A i B elipsoidne krošnje, dok se kod merenja treće ose C elipsoidne krošnje ukoliko postoji isti nagib krošnje i stabla drveta η_D (sl. 2) pravac metra mora biti pod uglom η_D u odnosu na horizontalnicu (videti sl. 2) pri merenju ose C.

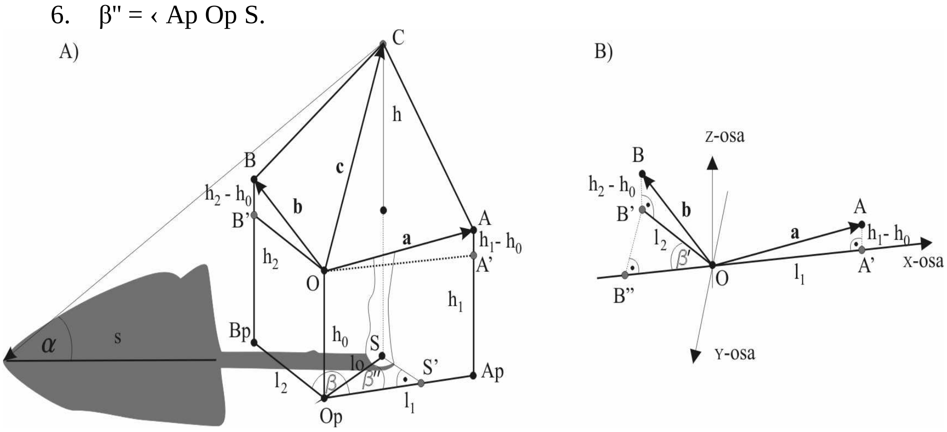


Slika 2. *Senka krošnje nagnutog drveta zy ugao η_D na terenu s nagibom η*
Figure 2. *Shadow of top tree with terrain slope η and tree slope η_D*

Piramidalna trostrana krošnja

Izračunavanje zapremine krošnje piramidalnog oblika je najsloženije. Ukoliko teren nije nagnut i ukoliko se radi o stablu čija krošnja ima oblik nepravilne trostrane piramide sa vrhom iznad stabla, potrebno je izmeriti sledeće veličine (videti sl. 3,A):

1. s = dužina senke krošnje;
2. h_0, h_1, h_2 = udaljenosti temenà osnove piramidalne krošnje od podloge;
3. l_1, l_2 = horizontalno rastojanje najnižeg temena osnove do susednih temenà na osnovi;
4. β = ‹ Bp Op Ap, gde su tačke Bp, Op i Ap ortogonalne projekcije temenà osnove krošnje B, O i P na podlogu (ukoliko su temena B, O i P na visini koja onemogućuje primenu viska i nižih merdevina za određivanje pozicija projekcija Bp, Op i Ap na podlozi, dovoljno je sačekati da Sunce bude u zenitu, odnosno $\alpha = 90^o$, pa će senka krošnje obeležiti tačke Bp, Op i Ap);
5. lo = rastojanje projekcije Op do središta podnožja stabla S, ukoliko se ortogonalna projekcija Cp vrha krošnje C na podlogu poklapa sa S, ako ne lo je rastojanje projekcije Op do Cp;
6. β'' = ‹ Ap Op S.



Slika 3. *A) Uspravna krošnja oblika trostrane piramide i njena senka na terenu bez nagiba*
B) Položaj Dekartovog koordinatnog sistema i koordinate temena krošnje

Figure 3. *A) Vertical pyramidal top tree shape and their shadow on the ground without slope*
B) Positions coordinates of edges of top tree and orthogonal Decart's coordinate system

Tačke koje su ortogonalne projekcije na pravce paralelne osama, S', B', B'' i A' su označene sivim tačkama, dok su ortogonalne projekcije na podlogu označene sa Ap, Bp, Op i S=Cp na slici 3. Sa α je i dalje označen ugao pod kojim padaju sunčevi zraci na površinu Zemlje, a koordinatni početak neka bude smešten u najniže teme osnove krošnje O. Ako je sa h označena visina krošnje i teren nije nagnut, tada je:

$$h = s \text{ tg } \alpha. \tag{7}$$

Neka je sa β' označen ugao koji je suplement od β ($\beta' = 180^o - \beta$) za $\beta > 90^o$, a jednak β za $\beta < 90^o$. Neka se x-osa Dekartovog koordinatnog sistema poklapa sa pravom OA' (pravac joj je paralelan sa podlogom odnosno sa vektorom **OpAp**$^{\rightarrow}$). Tada su koordinate vektora:

$^{\rightarrow}$ Svi vektori u daljem tekstu će biti naznačeni zadebljanim fontom.

$\mathbf{a} = \mathbf{OA} = (l_1, 0, h_1\text{-}h_0)$ iz $\Delta OA'A$,

$\mathbf{b} = \mathbf{OB} = (l_2 \cos\beta', l_2 \sin\beta', h_2\text{-}h_0)$ iz $\Delta OB'B''$ (sl. 3.B), (8)

$\mathbf{c} = \mathbf{OC} = (lo \cos\beta'', lo \sin\beta'', h)$ iz $\Delta OpS'S$ (sl. 3.A).

Poznato je da je zapremina trostrane piramidalne krošnje Vp sa temenima u tačkama O, A, B i C jednaka šestini apsolutne vrednosti mešovitog proizvoda nad vektorima **a**, **b** i **c**, Vp = 1/6 | **a** · (**b** x **c**)|, odnosno,

$$Vp = 1/6 \left| \begin{vmatrix} l1 & 0 & h1-h0 \\ l2\cos\beta' & l2\sin\beta' & h2-h0 \\ lo\cos\beta'' & lo\sin\beta'' & h \end{vmatrix} \right| \qquad (9)$$

$$= 1/6\, |l_1(h\cdot l_2 \sin\beta' - (h_2-h_0) lo \sin\beta'') + (h_1-h_0)(l_2 \cos\beta' \cdot lo \sin\beta'' - l_2 \sin\beta' \cdot lo \cos\beta'')|$$

Ukoliko bi se zapremina trostrane piramidalne krošnje Vp sa temenima u tačkama O, A, B i C bila izrazila, nakon dužeg izvođenja, uz upotrebu trigonometrije i Euklidske geometrije, bilo bi:

$$Vp = 1/6 \sin\beta' \cdot (l_1^2+(h_1-h_0)^2)^{½}(l_2^2+(h_1-h_0)^2)^{½} (h - lo\ tg\ \sin^{-1}((h_1-h_0)/$$

$$/(l_1^2+ l_2^2-2\, l_1\, l_2 \cos\beta)^{½})) \cdot \cos \sin^{-1}((h_1-h_0)/(l_1^2+ l_2^2-2\, l_1\, l_2 \cos\beta)^{½}) \qquad (10)$$

Formula (10) je aritmetički♥ znatno složenija od formule (9). U razvijenom obliku formule (9) ima 11 množenja, 5 operacija sabiranja-oduzimanja i 4 trigonometrijske funkcije, dok u formuli (10) ima 17 množenja-deljenja, 7 operacija sabiranja-oduzimanja i 5 trigonometrijskih funkcija. Ovaj broj osnovnih operacija se podrazumeva ukoliko se obezbede 2 memorijska mesta za vrednosti $l_2 \sin\beta'$ i $lo \sin\beta''$ formuli (9), dok je u formuli (10) potrebno 4 memorijska mesta za vrednosti $(h_1-h_0)^2$, l_1^2, l_2^2, $\sin^{-1}((h_1-h_0)/(l_1^2+ l_2^2-2\, l_1\, l_2 \cos\beta)^{½})$.

Složenost računanja ilustrovana je na sledećem primeru: ako su senke štapa i trostrane piramidalne krošnje redom so=0,5 m i s= 3 m, tada je po formuli (4) $\alpha=60^o$, a po formuli (7), visina krošnje h=6 m. Neka su dodatno izmerene vrednosti h_0, h_1, h_2, lo, l_1, l_2, β i β'' redom 0,5 m, 0,7 m, 0,7 m, 1 m, 2 m, 2,5 m 90^o i 60^o, tada je zapremina te krošnje

$$Vp = 1/6 \left| \begin{vmatrix} 2\,m & 0 & 0{,}2m \\ 0 & 2{,}5m & 0{,}2m \\ 0{,}5m & \sqrt{3}/2m & 6m \end{vmatrix} \right| = 1/6 \left| \begin{vmatrix} 2\,m & 0 & 0{,}2m \\ 0 & 2{,}5m & 0{,}2m \\ 0 & \sqrt{3}/2m & 5{,}95m \end{vmatrix} \right| = 4.9\ m^3$$

Uvrštavanjem svih potrebnih vrednost u formulu (10) dobija se posle primetno dužeg računanja zapremina od 4,97 m^3. Naravno, u praksi treba na teren poneti računar i unapred oformiti sledeću tabelu:

♥ Osnovne aritmetičke operacije su sabiranje (oduzimanje) i množenje (deljenje), pri čemu je množenje bitno složenija operacija od sabiranja, dok je izračunavanje vrednosti trigonometrijske funkcije značajno složenije od množenja, jer se vrednost trigonometrijske funkcije izračunava preko većeg broja množenja i sabiranja. Unarna operacija vađenja drugog korena je slične složenosti kao i množenje.

Ulazne izmerene veličine									
Senka štapa	Senka krošnje	Udaljenosti temenà osnove krošnje od podloge			Horizontalna rastojanja temena			Ugao	Ugao
so	s	h_0	h_1	h_2	l_1	l_2	lo	β	β"

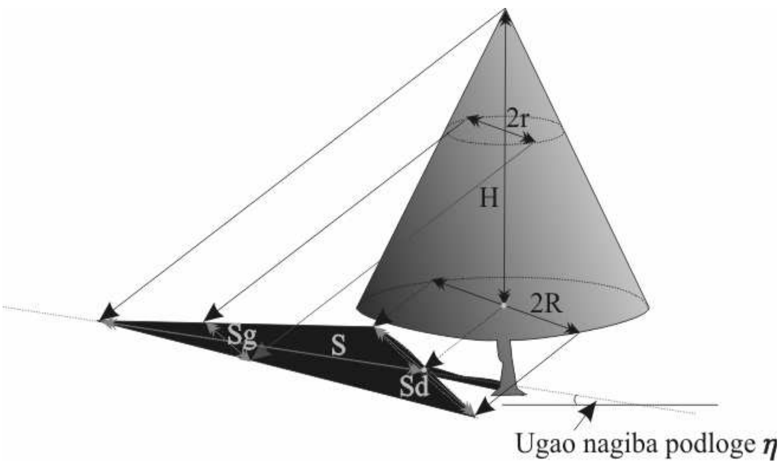
Pomoćne i izlazne veličine					
Ugao sunčevih zraka	Visina krošnje	Ugao	Pomoćne vrednosti		**Zapremina krošnje oblika trostrane piramide**
α (4)	h (7)	β'	$l_2 \sin \beta'$	Lo sin β"	Vp formula (9)

Tabela 1. *Radna tabela za izračunavanje zapremine krošnje oblika trostrane piramide*
Table 1. *Spreat-shit for top-tree volume determination of pyramidal shape*

Kupasta krošnja

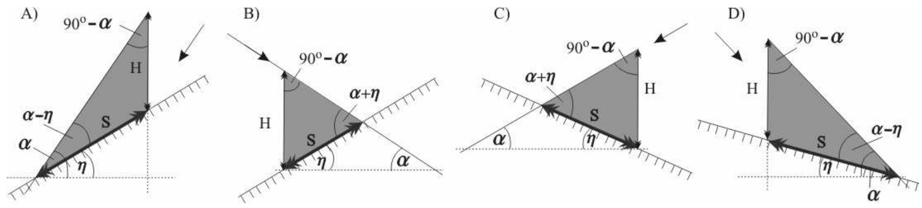
Zapremina krošnje oblika kupe Vk ili zarubljene kupe Vz nakon merenja senki S, Sd i Sg za zarubljenu, odnosno S i Sd za nezarubljenu kupu (sl. 4) i uvršćavanjem visine h po formuli (7), poluprečnika donje osnove $R = Sd/2 \text{ tg } \alpha$ i gornje osnove $r = Sg/2 \text{ tg } \alpha$ u poznate formule se računa:

$$Vk = \pi/24 \cdot S \cdot Sd^2 \cdot tg^3\,\alpha,\ Vz = \pi/24 \cdot S\ (Sd \cdot Sg + Sd^2 + Sg^2)\ tg^3\,\alpha. \qquad (11)$$



Slika 4. *Krošnja kupastog oblika na nagnutom terenu*
Figure 4. *Top tree of conical shape at the ground with slope η*

Ukoliko je teren nagnut pod uglom η, u formulama 11) činilac tgα, treba zameniti činiocem (tgα · cosη ± sinη), za izračunavanje zapremine krošnje kupastog, odnosno zarubljeno kupastog oblika. Predznak + se koristi kada je pravac sunčevih zraka u odnosu na nagib terena u položaju B) ili C) prikazanim na slici 5, a predznak - u slučajevima A) i D).



Slika 5. *Četiri različite mogućnosti za ugao nagiba terena η i ugao sunčevih zraka α*
Figure 5. *Four different positions for angle α (slope of Sun rays) and angle η (slope of the ground)*

Ova potrebna modifikacija u formulama 11) je posledica sledećeg izvođenja:

- na sl. 5, je sa S označena dužina senke objekta na podlozi, čija je realna visina označena sa H, a sa strelicom je označen smer sunčevih zraka;
- iz sivih trouglova i sinusne teoreme je $H=S \cdot \sin(\alpha \pm \eta) / \sin(90^o - \alpha)$ (+ za položaje B) i C), a - u slučajevima A) i D));
- zamenom $\sin(90^o - \alpha)$ sa $\cos\alpha$ i razvojem sinusa zbira odnosno razlike dobija se

$$H=S(\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\eta \pm \sin\eta). \qquad (12)$$

Inače, kada nema nagiba terena, odnosno $\eta=0^o$, visina objekta H izražena je preko senke S i ugla sunčevih zraka α (sl. 1) izrazom:

$$H=S\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (13)$$

Upoređivanjem izraza 12) i 13) jasno je da je u 11) potrebno $\mathrm{tg}\alpha$, kada postoji nagib terena veličine η, zameniti sa $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\eta \pm \sin\eta$.

ZAKLJUČAK

U radu su dati predlozi kako da se izračunaju zapremine krošnji bez narušavanja okoline i bez upotrebe teške mehanizacije. Potrebna je skromna količina alata i spoljašnjih okolnosti: sunčan dan bez većih niskih oblaka, metar, visak ili libela, lake merdevine, fleksibilni nosač (sl. 1) i lap-top.

Krošnje u prirodi imaju vrlo raznolike oblike. Mnogi od tih oblika mogu da se aproksimiraju onim oblicima za koji su u ovom radu opisani postupci i date formule za izračunavanje zapremine:

- sferna krošnja (zapremina označena sa Vs u formuli 5),
- elipsoidna krošnja (zapremina označena sa Ve u formuli 6),
- krošnja u obliku trostrane piramide (zapremina označena sa Vp u formuli 9),
- kupasta krošnja (zapremina označena sa Vk u formuli 11),
- zarubljena kupasta krošnja (zapremina označena sa Vz u formuli 11).

Naravno, ovim ni približno nisu iscrpljene sve mogućnosti za oblik krošnje u prirodi.

Ukazano je na potrebne modifikacije predloženih formula za zapremine krošnji ukoliko postoji nagib terena, a za sferni i elipsoidni oblik krošnje analiziran je i potencijalni nagib stabla.

Za najsloženiji razmatrani oblik krošnje, oblik nagnute nepravilne trostrane piramide, date su dve formule za izračunavanje zapremine, i ukazano je da je formula dobijena korišćenjem vektora aritmetički jednostavnija.

LITERATURA

1. Acketa, D., Matić-Kekić Snežana (2000): *Geometrija za informatičare*, Prirodno-matematički fakultet, Edicija Univerzitetski udžbenici 113, Novi Sad, s. 399
2. Matić-Kekić Snežana (2002): *MATEMATIKA za studente agroekonomskog smera*, Poljoprivredni fakultet, Novi Sad, s. 189,
3. Matić-Kekić Snežana (2006): *Optimalan ugao solarnog kolektora u odnosu na vertikalu,* Letopis naučnih radova Poljoprivrednog fakulteta 30(1), pp 161-168.

TOP TREES VOLUME DETERMINATION OF CONICAL, PYRAMIDAL, OVAL AND SPHERE SHAPE AT THE PARKS OF NATURE

by
Snežana Matić-Kekić[1]

SUMMARY

There are procedures which do not disturb the environment and contain least number of measuring and standard operations, as analogous simplified formulae for volume determination of top trees of conical, pyramidal, oval and sphere shape in outdoor environment. Formulae acquired by vector and Euclid principle are compared and it's been verified expected superiority of vector principle.

Key words: terrain slope, tree slope, efficient model of measuring, ecological approach

Primljeno: 1.9.2008.
Prihvaćeno: 25.9.2008.

♦ Astronomska godina počinje prolećnom (21. marta), a završava se jesenjom (23. septembra) ravnodnevnicom, i za nju je nulti dan 21. mart, a u formuli (1) umesto kosinusne koristi se obično sinusna funkcija u literaturi. U ovom radu koristi se sinusna funkcija, a za nulti dan izabran je 21. jun, kao dan sa najdužom obdanicom.

[1] The work was supported in part by Serbian Government under Grant No. BTR20065.B and by Serbian Government under Grant No. BTR20078.B